

Educación



para todos

Educación para todos no es un proyecto lucrativo, sino un esfuerzo colectivo de estudiantes y profesores de la UNAM para facilitar el acceso a los materiales necesarios para la educación de la mayor cantidad de gente posible. Pensamos editar en formato digital libros que por su alto costo, o bien porque ya no se consiguen en bibliotecas y librerías, no son accesibles para todos.

Invitamos a todos los interesados en participar en este proyecto a sugerir títulos, a prestarnos los textos para su digitalización y a ayudarnos en toda la labor técnica que implica su reproducción. El nuestro, es un proyecto colectivo abierto a la participación de cualquier persona y todas las colaboraciones son bienvenidas.

Nos encuentras en los Talleres Estudiantiles de la Facultad de Ciencias y puedes ponerte en contacto con nosotros a la siguiente dirección de correo electrónico:

eduktodos@gmail.com http://eduktodos.dyndns.org

Calculus

Tom M. Apostol

CALCULUS

VOLUMEN I

Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal

Segunda edición



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título de la obra original:
CALCULUS, One -Variable Calculus, with an introduction to Linear Algebra

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts

Versión española por:
Dr. D. Francisco Vélez Cantarell
Profesor adjunto de la Facultad de Ciencias de Barcelona

Revisada por:
Dr. D. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A. y
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona - ESPAÑA
E-mail:reverte@reverte.com
Internet: http://www.reverte.com

REVERTÉ EDICIONES, S.A. DE C.V
Río Pánuco 141 Col Cuauhtémoc
C.P. 06500 México, D.F. - MÉXICO
E-mail: resavbp@data.net.mx
101545.2361@compuserve.com

9ª Reimpresión 2001

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 5002 - 1 (España)
ISBN - 968 - 6708 - 10 - 3 (México)
Depósito Legal: B - 32464 - 2001

Impreso por Imprimeix S.L.
Eduard Maristany, 100
08912 Badalona (Barcelona)

a

Jane y Stephen

PRÓLOGO

Extracto del prólogo a la primera edición

Parece que no hay acuerdo sobre lo que ha de constituir un primer curso de Cálculo y Geometría Analítica. Unos sostienen que el camino verdadero para entender el Cálculo principia con un estudio completo del sistema de los números reales desarrollándolo paso a paso de manera lógica y rigurosa. Otros insisten en que el Cálculo es ante todo un instrumento para los ingenieros y físicos; y por consiguiente, que un curso debe llevar a las aplicaciones del Cálculo apelando a la intuición, para después, por el ejercicio en la resolución de problemas, alcanzar destreza operatoria. En ambos puntos de vista hay mucha parte de razón. El Cálculo es una ciencia deductiva y una rama de la Matemática pura. Al mismo tiempo es muy importante recordar que el Cálculo tiene profundas raíces en problemas físicos y que gran parte de su potencia y belleza deriva de la variedad de sus aplicaciones. Mas es posible combinar un desarrollo teórico riguroso con una sana formación técnica, y este libro representa un intento de establecer un sensible equilibrio entre las dos tendencias. Aunque se trate el Cálculo como ciencia deductiva, no por eso se abandonan las aplicaciones a problemas físicos. Las demostraciones de todos los teoremas importantes se consideran como una parte esencial en el desarrollo de las ideas matemáticas, y con frecuencia van precedidas de una discusión geométrica o intuitiva para dar al estudiante una visión más penetrante del porqué de la demostración. Aunque estas discusiones intuitivas pueden ser suficientes para el lector que no esté interesado en los detalles de la demostración, también se incluye la demostración completa para aquellos que prefieran una exposición más rigurosa.

La disposición de este libro ha sido sugerida por el desarrollo histórico y filosófico del Cálculo y la Geometría Analítica. Por ejemplo, se estudia la integración antes de la diferenciación. Aunque esta manera de ordenar la materia del curso sea poco frecuente, es históricamente correcta y pedagógicamente adecuada. Además, es el mejor camino para hacer patente la verdadera conexión entre la derivada y la integral.

El concepto de integral se define en primer lugar para funciones escalonadas. Puesto que la integral de una función escalonada no es más que una suma, la

teoría de la integración es extremadamente sencilla en este caso. Mientras el estudiante aprende las propiedades de la integral para funciones escalonadas, adquiere experiencia en el uso de la notación sumación y al mismo tiempo se familiariza con el simbolismo de la integral. De esta manera se van construyendo los peldaños para que la transición de funciones escalonadas a otras funcicnes más generales parezca fácil y natural.

Prólogo a la segunda edición

La segunda edición difiere de la primera en muchos aspectos. Se ha añadido el Álgebra lineal; los teoremas del valor medio y las aplicaciones del Cálculo se han introducido en los primeros capítulos, y se ha añadido buen número de nuevos y sencillos ejercicios. Una inspección del índice revela que el libro se ha dividido en capítulos de menor extensión, desarrollándose cada uno sobre un concepto importante. Varias secciones han sido escritas de nuevo y reorganizadas para proporcionar una mejor fundamentación y mejorar la fluidez de las ideas.

Al igual que en la primera edición, cada concepto nuevo importante viene precedido de una introducción histórica, que describe su desarrollo desde una primera noción física intuitiva hasta su formulación matemática precisa. El estudiante descubre en parte los esfuerzos del pasado y los triunfos de los hombres que más han contribuido al tema. De este modo el estudiante se convierte en participante activo en la evolución de las ideas y no queda como mero observador pasivo de los resultados.

La segunda edición, como la primera, está dividida en dos volúmenes. Las dos terceras partes primeras del Volumen I tratan del Cálculo con funciones de una variable, incluyendo las series y una introducción a las ecuaciones diferenciales. La última tercera parte del Volumen I introduce el Álgebra lineal con aplicaciones a la Geometría y al Análisis. Gran parte de estos temas se apoya sólidamente en el cálculo de ejemplos que ilustran la teoría general. Ello proporciona una mezcla de Álgebra y de Análisis y contribuye a preparar el camino para la transición del Cálculo con una variable al Cálculo con varias variables, que se trata en el Volumen II. Un desarrollo más amplio de Álgebra lineal se hará necesario en la segunda edición del Volumen II.

Una vez más reconozco con agrado mi deuda con los profesores H. F. Bohnenblust, A. Erdélyi, F. B. Fuller, K. Hoffman, G. Springer, y H. S. Zuckerman. Su influencia en la primera edición ha continuado en la segunda. En la preparación de la segunda edición, recibí también la ayuda del profesor Basil Gordon, que sugirió muchas mejoras. Estoy también agradecido a George Springer y William P. Ziemer, que leyeron las últimas pruebas. El personal de Blaisdell Publishing Company, como siempre, ha prestado una gran ayuda; aprecio su simpática aceptación de mis deseos en lo relativo al formato y a la tipografía.

Por último, tengo especial satisfacción en expresar mi gratitud a mi esposa por haber contribuido en diversas formas a la preparación de las dos ediciones. En testimonio de mi agradecimiento le dedico este libro.

T. M. A.

Pasadena, California

ÍNDICE ANALÍTICO

I. INTRODUCCIÓN

Parte 1. Introducción histórica

Parte 2. Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

Parte 3. Un conjunto de axiomas para el sistema de números reales

Parte 4. Inducción matemática, símbolos sumatorios y cuestiones relacionadas

1. LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO INTEGRAL

2. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

3. FUNCIONES CONTINUAS

4. CÁLCULO DIFERENCIAL

5. RELACIÓN ENTRE INTEGRACIÓN Y DERIVACIÓN

6. FUNCIÓN LOGARITMO, FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

7. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS

8. INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

9. NÚMEROS COMPLEJOS

10. SUCESIONES, SERIES, INTEGRALES IMPROPIAS

11. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

12. ÁLGEBRA VECTORIAL

13. APLICACIONES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

14. CÁLCULO CON FUNCIONES VECTORIALES

15. ESPACIOS LINEALES

16. TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

Calculus

INTRODUCCIÓN

Parte I. - Introducción histórica

I 1.1 Los dos conceptos básicos del Cálculo

El considerable progreso habido en la ciencia y en la técnica durante los últimos cien años procede en gran parte del desarrollo de las Matemáticas. La rama de la Matemática conocida por Cálculo integral y diferencial es un instrumento natural y poderoso para atacar múltiples problemas que surgen en Física, Astronomía, Ingeniería, Química, Geología, Biología, y en otros campos, incluyendo recientemente algunos de Ciencias sociales.

Para dar una idea al lector de los muy diversos tipos de problemas que pueden tratarse por los métodos de Cálculo se expone a continuación una pequeña muestra de cuestiones seleccionadas entre los ejercicios que aparecen en capítulos posteriores de este libro.

¿Con qué velocidad debería ser impulsado un cohete para que nunca volviera a la Tierra? ¿Cuál es el radio del menor disco circular que cubra a todo triángulo isósceles de perímetro L? ¿Cuál es el volumen de material extraído de una esfera de radio $2r$ al atravesarla por un orificio cilíndrico de radio r cuyo eje pase por el centro de la esfera? Si un cultivo de bacterias crece en razón directa a la cantidad que hay en cada instante, y la población se duplica en una hora, ¿en cuánto se habrá incrementado al cabo de dos horas? Si una fuerza de diez libras estira una cuerda elástica una pulgada, ¿qué trabajo se necesita para estirarla un pie?

Estos ejemplos, elegidos en distintos campos, ilustran algunas de las cuestiones técnicas que pueden ser resueltas como aplicaciones más o menos rutinarias del Cálculo.

El Cálculo no sólo es un instrumento técnico, sino que contiene una colección de ideas fascinadoras y atrayentes que han ocupado el pensamiento humano durante centurias. Estas ideas están relacionadas con *velocidad, área, volumen, razón de crecimiento, tangente a una línea,* y con otros conceptos referentes a otros dominios. El Cálculo obliga a detenerse y a pensar cuidadosamente acerca del significado de estos conceptos. Otro carácter notable del Cálculo es su poder

unificador. Muchos de estos problemas pueden ser formulados de manera que se reduzcan a otros problemas de naturaleza puramente geométrica. A continuación se procede a una breve descripción de tales problemas.

Considérese una curva C situada encima de una línea horizontal base, como se indica en la figura I.1. Se supone que esta curva tiene la propiedad de ser cortada por cada vertical, en un punto a lo más. La parte sombreada de la figura está formada por aquellos puntos situados por debajo de la curva C, encima de la horizontal, y entre dos segmentos verticales paralelos que unen C con la base. El primer problema fundamental del Cálculo es el siguiente: *Determinar un número que mida el área de esta región sombreada.*

Considérese después una recta que sea tangente a la curva, tal como se ve en la figura I.1. El segundo problema fundamental puede formularse de la siguiente manera: *Determinar un número que mida la pendiente de esta recta.*

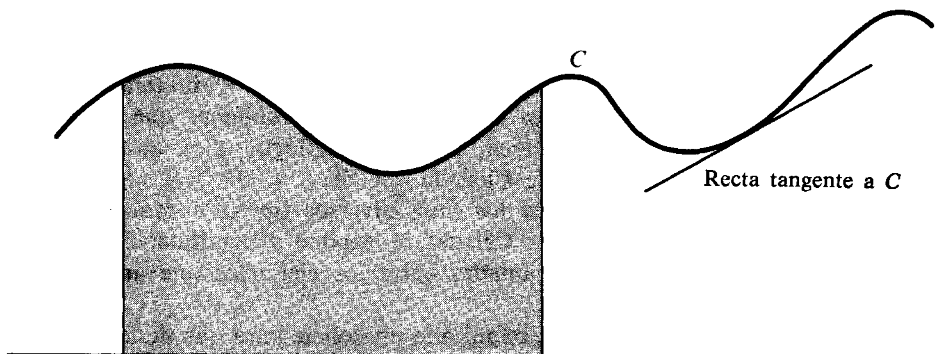


FIGURA I.1

Fundamentalmente, el Cálculo se ocupa en la formulación precisa y la resolución de estos dos problemas considerados. En el Cálculo se *definen* los conceptos de área y tangente y se *calculan* el área de una región dada y la pendiente de la tangente a una curva dada. El *Cálculo integral* se ocupa del problema del área y será discutido en este capítulo 1. El *Cálculo diferencial* se ocupa del problema de la tangente y será introducido en el capítulo 4.

El estudio del Cálculo exige una cierta preparación matemática. El presente capítulo trata de estos conceptos básicos y está dividido en cuatro partes: La 1.ª parte da una perspectiva histórica; la 2.ª se refiere a la notación y terminología en la matemática de conjuntos; la 3.ª trata del sistema de números reales; la 4.ª ofrece la inducción matemática y la notación sumatoria. Si el lector está informado de estos temas, puede abordar directamente el desarrollo del Cálculo integral en el capítulo 1. Si no, deberá familiarizarse con las materias contenidas en esta introducción antes de iniciar el capítulo 1.

I 1.2 Introducción histórica

El origen del Cálculo integral se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos intentaban resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron *método de exhaución.* Las ideas esenciales de este método son realmente muy simples y se pueden describir brevemente como sigue: Dada una región cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor y se continúa el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región dada. La figura I.2 es una ilustración del método en el caso de una región semicircular. Este método fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 A.C.) para hallar fórmulas exactas de las áreas del círculo y de algunas otras figuras especiales.

Desde Arquímedes, el desarrollo del método de exhaución tuvo que esperar casi 18 siglos, hasta que el uso de símbolos y técnicas algebraicas se hizo preciso en los estudios matemáticos. El Álgebra elemental que hoy día es familiar a la mayoría de los alumnos de los últimos cursos de enseñanza secundaria, era totalmente desconocida en tiempos de Arquímedes, lo que hacía imposible extender el método a cualquier clase de regiones, sin poseer manera adecuada de poder expresar los largos cálculos en forma simplificada.

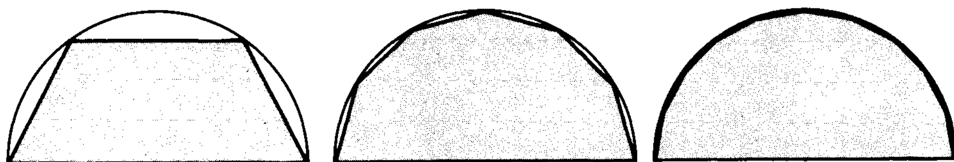


FIGURA I.2 *El método de exhaución aplicado a una región semicircular.*

Un cambio lento pero revolucionario, en el desarrollo de las notaciones matemáticas, empezó en el siglo XVI D.C. El engorroso sistema de numeración romano fue desplazado gradualmente por los caracteres arábigos utilizados hoy día; los signos + y — fueron introducidos por primera vez, y se empezaron a reconocer las ventajas de la notación decimal. Durante este mismo período, los brillantes resultados de los matemáticos italianos Tartaglia, Cardano y Ferrari que dieron soluciones algebraicas a las ecuaciones cúbica y cuártica, estimuló el desarrollo de la Matemática y animó a la aceptación del lenguaje algebraico nuevo y superior. Con la introducción muy extendida de los bien elegidos símbolos algebraicos, revivió el interés por el antiguo método de exhaución y en el siglo XVI descubrieron múltiples resultados parciales, los que como Cavalieri, Toricelli, Roberval, Fermat, Pascal y Wallis fueron pioneros.

Gradualmente, el método de exhaución fue transformándose en lo que hoy se conoce como Cálculo integral, nueva y potente disciplina que tiene numerosísimas aplicaciones no sólo en problemas relativos a áreas y volúmenes, sino también en problemas de otras ciencias. Este método, que mantiene alguno de los caracteres originales del método de exhaución, recibió su mayor impulso en el siglo XVII, debido a los esfuerzos de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), y su desarrollo continuó durante el siglo XIX, hasta que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Bernhard Riemann (1826-1866) le dieron una base matemática firme. Posteriores afinamientos y extensiones de la teoría han llegado hasta la Matemática contemporánea.

I 1.3 El método de exhaución para el área de un segmento de parábola

Antes de proceder al estudio sistemático del Cálculo integral, será instructivo aplicar el método de exhaución directamente a una de las figuras particulares tratadas por el mismo Arquímedes. La región en cuestión está presentada en la figura I.3 y puede describirse como sigue: Si se elige un punto arbitrario de la base de la figura y se designa por x su distancia a 0, la distancia vertical de este punto a la curva es x^2. En particular, si la longitud de la base es b la altura de la figura es b^2. La distancia vertical de x a la curva se denomina «ordenada» de x. La curva así descrita se denomina *parábola* y la región limitada por ella y por los dos segmentos rectilíneos, se llama *segmento parabólico.*



FIGURA I.3 *Segmento parabólico*

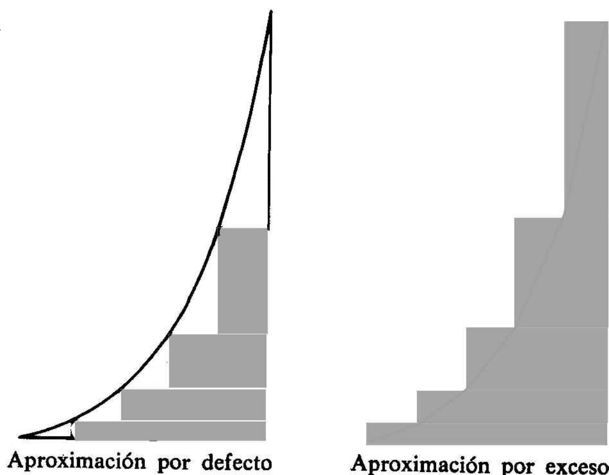


FIGURA I.4

Esta figura puede encerrarse en un rectángulo de base b y altura b^2, como se ve en la figura I.3. Observando la figura parece natural afirmar que el área del segmento parabólico es menor que la mitad del área del rectángulo. Arquímedes hizo el sorprendente descubrimiento de que el área del segmento parabólico es exactamente *un tercio* de la del rectángulo; es decir, $A=b^3/3$, donde A designa el área del segmento parabólico. Se verá a continuación cómo se llega a este resultado.

Se hace notar que el segmento parabólico dibujado en la figura I.3 no está elegido exactamente tal como lo dibujó Arquímedes y que los detalles que

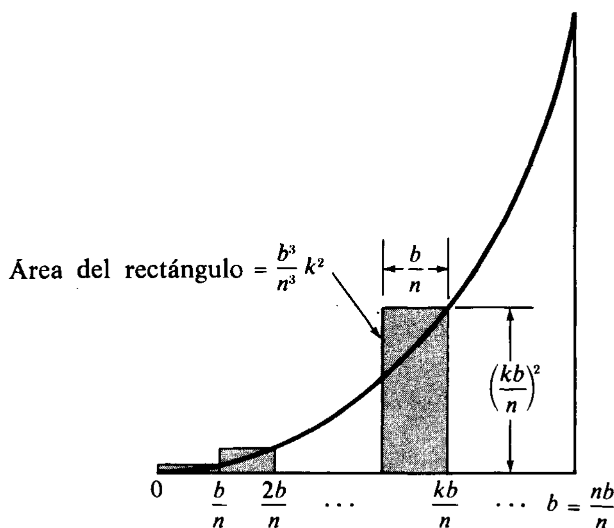


FIGURA I.5 *Cálculo del área de un segmento parabólico.*

siguen no son exactamente los utilizados por él. Sin embargo, las *ideas* esenciales son las de Arquímedes; lo que aquí se expone puede considerarse como el método de exhaución expuesto con la notación moderna.

El método consiste simplemente en lo siguiente: se divide la figura en un cierto número de bandas y se obtienen dos aproximaciones de la región, una por defecto y otra por exceso, utilizando dos conjuntos de rectángulos como se indica en la figura I.4. (Se utilizan rectángulos mejor que polígonos arbitrarios para simplificar los cálculos.) El área del segmento parabólico es mayor que el área total de los rectángulos interiores pero menor que la de los rectángulos exteriores.

Si cada banda se subdivide a su vez, se obtiene una nueva aproximación con mayor número de bandas, la reunión de las áreas de los rectángulos inte-

riores *crece,* mientras que el total de las áreas de los rectángulos exteriores *decrece.* Arquímedes vio que se podía lograr el área con el grado de aproximación deseado sin más que tomar un número suficiente de bandas.

El cálculo efectivo en este caso se realiza como se indica a continuación. Con objeto de simplificar se subdivide la base en n *partes* iguales, cada una de longitud b/n (véase fig. I.5). Los puntos de subdivisión corresponden a los siguientes valores de x:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b\,.$$

La expresión general de un punto de la subdivisión es $x = kb/n$, donde k toma los valores sucesivos $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. En cada punto kb/n se construye el rectángulo exterior de altura $(kb/n)^2$ como se indica en la figura I.5. El área de este rectángulo es el producto de la base por la altura y es igual a:

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}k^2.$$

Si se designa por S_n la suma de las áreas de todos los rectángulos exteriores, puesto que el área del rectángulo k-simo es $(b^3/n^3)k^2$ se tiene la fórmula:

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\,. \tag{I.1}$$

De forma análoga se obtiene la fórmula para la suma s_n de todos los rectángulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\,. \tag{I.2}$$

La forma de estas sumas es de gran importancia para su cálculo. Nótese que el factor que multiplica a b^3/n^3 en la ecuación (I.1) es la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\,.$$

(El factor correspondiente en la ecuación (I.2) es análogo salvo que la suma tiene únicamente $n-1$ sumandos.) Para valores grandes de n la obtención de esta suma por adición directa de sus sumandos es pesada, pero afortunada-

mente existe una interesante identidad que hace posible obtener esta suma por un camino más simple, y es la siguiente:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{I.3}$$

Esta identidad es válida para todo entero $n \geq 1$ y puede demostrarse del siguiente modo: Se parte de la fórmula $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ y se pone en la forma

$$3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3 - k^3.$$

Haciendo $k = 1, 2, \ldots, n-1$, obtenemos las $n-1$ fórmulas

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 &= 2^3 - 1^3 \\ 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 &= 3^3 - 2^3 \\ &\vdots \\ 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1 &= n^3 - (n - 1)^3. \end{aligned}$$

Al sumar estas fórmulas, todos los términos del segundo miembro se reducen excepto dos y se obtiene

$$3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n - 1)^2] + 3[1 + 2 + \cdots + (n - 1)] + (n - 1) = n^3 - 1^3.$$

La segunda suma del primer miembro es la suma de los términos de una progresión aritmética cuyo valor es $\frac{1}{2} n(n-1)$. Por tanto la última igualdad nos da

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n - 1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{I.4}$$

Sumando n^2 a los dos miembros, obtenemos (I.3).

Las expresiones exactas dadas en los segundos miembros de (I.3) y (I.4) no son necesarias para el objeto que aquí se persigue, pero sirven para deducir fácilmente las dos *desigualdades* que interesan

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n - 1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \tag{I.5}$$

que son válidas para todo entero $n \geq 1$. Estas desigualdades pueden deducirse fácilmente como consecuencias de (I.3) y (I.4), o directamente por inducción. (Véase la Sección I 4.1.)

Multiplicando ambas desigualdades en (I.5) por b^3/n^3 y haciendo uso de (I.1) y (I.2) se tiene:

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \tag{I.6}$$

para cada n, y observándose que se presenta por primera vez el número $b^3/3$. Las desigualdades en (I.6) expresan que para cada n el número $b^3/3$ está comprendido entre s_n y S_n. Pero ahora es fácil probar que $b^3/3$ es el *único* número que goza de esta propiedad; es decir, que si A es un número que verifica las desigualdades

$$s_n < A < S_n \tag{I.7}$$

para cada entero positivo n, ha de ser necesariamente $A = b^3/3$. Por esta razón dedujo Arquímedes que el área del segmento parabólico es $b^3/3$.

Para probar que $A = b^3/3$ se utilizan una vez más las desigualdades (I.5). Sumando n^2 a los dos miembros de la desigualdad de la izquierda en (I.5) se obtiene:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

Multiplicando por b^3/n^3 y utilizando (I.1) se tiene

$$S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}. \tag{I.8}$$

Análogamente, restando n^2 de los dos miembros de la desigualdad de la derecha en (I.5) y multiplicando por b^3/n^3 se llega a la desigualdad:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n. \tag{I.9}$$

Por tanto, cada número A que satisfaga (I.7) ha de satisfacer también:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \tag{I.10}$$

para cada entero $n \geq 1$. Ahora bien, hay sólo tres posibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \qquad A < \frac{b^3}{3}, \qquad A = \frac{b^3}{3}.$$

Si se prueba que las dos primeras conducen a una contradicción habrá de ser $A=b^3/3$, ya que, al estilo de Sherlock Holmes, se agotan así todos las posibilidades.

Supóngase que la desigualdad $A > b^3/3$ fuera cierta. De la segunda desigualdad en (I.10) se obtiene:

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \tag{I.11}$$

para cada entero $n \geq 1$. Puesto que $A-b^3/3$ es positivo, se pueden dividir ambos miembros de (I.11) por $A-b^3/3$ y multiplicando después por n se obtiene la desigualdad

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para cada n. Pero esta desigualdad es evidentemente falsa para $n>b^3/(A-b^3/3)$. Por tanto, la desigualdad $A>b^3/3$ conduce a una contradicción. De forma análoga se demuestra que la desigualdad $A<b^3/3$ conduce a su vez a una contradicción y por tanto debe ser $A=b^3/3$ como se ha afirmado antes.

*I 1.4 Ejercicios

1. (a) Modificar la región en la figura I.3 tomando como ordenada para cada x el valor $2x^2$ en vez de x^2. Dibujar la nueva figura. Síganse en este caso los pasos principales del apartado anterior y compárense ambos, estudiando la repercusión del cambio en el cálculo de A. Efectúese lo mismo si la ordenada en cada x es:
(b) $3x^2$, (c) $\frac{1}{4}x^2$, (d) $2x^2 + 1$, (e) $ax^2 + c$.
2. Modifíquese la región en la figura I.3 tomando como ordenada para cada x, x^3 en vez de x^2. Dibújese la nueva figura.
(a) Úsese una construcción análoga a la dibujada en la figura I.5 y pruébese que las sumas interior y exterior S_n y s_n están dadas por

$$S_n = \frac{b^4}{n^4}(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3), \qquad s_n = \frac{b^4}{n^4}[1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3].$$

(b) Utilícense las desigualdades (que pueden probarse por inducción completa; véase Sección I 4.2).

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \tag{I.12}$$

para demostrar que $s_n < b^4/4 < S_n$ para cada n, y probar que $b^4/4$ es el *único* número comprendido entre s_n y S_n para cada n,
(c) ¿Qué número sustituye a $b^4/4$ si la ordenada en cada x es $ax^3 + c$?

3. Las desigualdades (I.5) y (I.12) son casos particulares de las desigualdades más generales

(I.13) $$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

que son válidas para cada entero $n \geq 1$ y cada entero $k \geq 1$. Supuestas válidas (I.13) generalícense los resultados del ejercicio 2.

I 1.5 Análisis crítico del método de Arquímedes

Mediante cálculos análogos a los realizados en el apartado I 1.3, Arquímedes llegó a la conclusión de que el área del segmento parabólico considerado es $b^3/3$. Este hecho se aceptó como un teorema matemático, hasta que pasados unos 2000 años se pensó que debían analizarse los resultados desde un punto de vista más crítico. Para comprender por qué hubo quien puso en duda la validez de las conclusiones de Arquímedes, es necesario tener presente los cambios importantes que han tenido lugar en la reciente historia de la Matemática.

Cada rama del conocimiento es un conjunto de ideas descritas por medio de palabras y símbolos, y no se pueden comprender estas ideas sin un conocimiento exacto de las palabras y símbolos que se utilizan. Ciertas ramas del conocimiento conocidas por *sistemas deductivos,* se distinguen de otras porque en ellas se elige *a priori* un número de conceptos «no definidos» y todo otro concepto en el sistema se define a partir de aquéllos. Ciertas relaciones entre estos conceptos no definidos se toman como *axiomas* o *postulados* y otras relaciones que pueden deducirse de estos axiomas se denominan *teoremas.* El ejemplo más familiar de sistema deductivo es la Geometría elemental euclidiana, que ha sido estudiada por toda persona culta desde la época de la Grecia antigua.

El espíritu de la Matemática griega, siguiendo el método de postulados y teoremas como en la Geometría de los *Elementos* de Euclides, dominó el pensamiento de los matemáticos hasta la época del Renacimiento. Una fase nueva y vigorosa en el desarrollo de la Matemática empezó con la aparición del Álgebra en el siglo XVI; y los 300 años que siguieron fueron testigos de gran cantidad de descubrimientos importantes. El razonamiento lógico preciso del método deductivo con el uso de axiomas, definiciones y teoremas, estuvo manifiestamente ausente en este período. Los matemáticos de los siglos XVI, XVII y XVIII recurrían a una mezcla curiosa de razonamiento deductivo combinado con la intuición y la pura conjetura; y no es extraño que algunos de sus resultados se haya visto posteriormente que eran incorrectos. No obstante, un número sorprendente de descubrimientos importantes ocurren en este período, y una gran parte de esta obra ha sobrevivido la prueba de la Historia, representando un tributo a la destreza y talento de aquellos científicos.

Cuando empezó a disminuir el caudal de nuevos descubrimientos, apareció un nuevo período de análisis crítico; y poco a poco, los matemáticos se vieron obligados a volver a las ideas clásicas del método deductivo, al intentar poner fundamentos firmes a la nueva Matemática . Esta fase del desarrollo, que empezó a principios del siglo XIX y ha continuado hasta el momento presente, ha alcanzado un grado de abstracción y pureza lógica que ha superado todas las tradiciones de la ciencia griega. A la vez, ha proporcionado una comprensión más clara de los fundamentos no sólo del Cálculo, sino de todas las ramas de la Matemática.

Hay muchas formas de estructurar el Cálculo como sistema deductivo. Una manera posible, es tomar los números reales como conceptos no definidos o primitivos. Algunas de las reglas que rigen las operaciones con los números reales pueden tomarse como axiomas. Este sistema de axiomas se ha incluido en la parte 3 de esta introducción. Nuevos conceptos, tales como *integral, límite, continuidad, derivada,* pueden definirse a partir de los números reales. Las propiedades de estos conceptos se deducen como teoremas a partir de los axiomas.

Considerando el Cálculo como una parte del sistema deductivo, el resultado de Arquímedes para el área del segmento parabólico no puede aceptarse como un teorema si no se da previamente una definición satisfactoria de área. No es claro que Arquímedes hubiera formulado alguna vez una definición precisa de lo que él entendía por área. Parece haber tomado como convenio que cada región tiene una área asociada a ella. Con esta hipótesis se ocupa de calcular áreas de regiones particulares. En sus cálculos utiliza propiedades del área que no se pueden probar mientras no se precise qué *se entiende* por área. Por ejemplo, supone que si una región es interior a otra, el área de la región menor no puede exceder a la de la región mayor; y también que si una región se descompone en dos o más partes, la suma de las áreas de cada parte es igual al área de toda la región. Todas estas propiedades se atribuyen al área, y en toda definición que se dé del área estas propiedades han de poder deducirse como teoremas. Es verosímil que el mismo Arquímedes tomara el área como concepto primitivo, utilizando las propiedades mencionadas como *axiomas.*

Actualmente se considera la obra de Arquímedes como importante más que por calcular áreas de figuras particulares, porque ha sugerido un camino razonable para *definir* el concepto de área para figuras más o menos *arbitrarias.* A su vez, el método de Arquímedes sugiere un método para definir un concepto mucho más general, que es la *integral;* y a su vez, la integral no sólo se utiliza para definir y calcular áreas, sino también para establecer conceptos como longitud de un arco, volumen, trabajo y otros.

Anticipándose a futuros desarrollos, y utilizando la terminología del Cálculo integral, el resultado del cálculo efectuado en la Sección I 1.3, para el segmento parabólico, se expresa frecuentemente como sigue:

«La integral de x^2 de 0 a b es $b^3/3$.»

y se escribe simbólicamente:

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

El símbolo $\int$ (una *S* alargada) se llama *signo integral* y fue introducido por Leibniz en 1675. El proceso que determina el número $b^3/3$ se denomina *integración*. Los números 0 y *b* que afectan al signo integral se denominan *límites de integración*. El signo $\int_0^b x^2\,dx$ se ha de considerar como un todo. Su definición debe darse de la misma manera que el diccionario describe la palabra «Marte» sin hacer referencia a «mar» ni a «te».

El símbolo de Leibniz para la integral fue aceptado pronto por muchos matemáticos, porque veían en la integración un tipo de «proceso de sumación» que permitía sumar infinitas «cantidades infinitamente pequeñas». Por ejemplo, en el caso del segmento parabólico, el área se concebía como la «suma» de una infinidad de rectángulos infinitamente pequeños de altura x^2 y base dx. El signo integral representa el proceso de sumación de todos estos rectángulos. Esta forma de razonar es muy sugestiva y útil frecuentemente. Desde el punto de vista lógico, adolece del defecto de no poder atribuir un significado exacto al concepto «cantidad infinitamente pequeña». Actualmente se sabe cómo introducir la integral mediante el número real, sin utilizar conceptos misteriosos e inexplicables, como «infinitesimal». Esta definición se dará en el capítulo 1.

I 1.6 La introducción al Cálculo que se utiliza en este libro

Una exposición rigurosa y completa tanto del Cálculo integral como del diferencial, depende esencialmente de un estudio cuidadoso del sistema de los números reales. El estudio en sí de este sistema llevado a cabo en su totalidad, es un tema muy interesante pero un tanto largo, de forma que requiere un pequeño volumen para su completa exposición. El método seguido en este libro es empezar con los números reales como *elementos primitivos* y tomar simplemente algunas de sus propiedades fundamentales como *axiomas*. Estos axiomas y algunos de los teoremas más sencillos que pueden deducirse de ellos se discutirán en la parte 3 de este capítulo. Muchas de las propiedades de los números reales que se han tomado como axiomas son probablemente familiares al lector, por sus estudios de Álgebra elemental. Sin embargo, hay algunas propiedades de los números reales que no se suelen tener en cuenta en el Álgebra elemental, pero que juegan un papel importante en el Cálculo. Estas propiedades son consecuencia del llamado *axioma del extremo superior* (conocido también por *axioma de la continuidad*) que se estudiará aquí con detalle. El lector puede parar su atención en la parte 3 antes de entrar en el cuerpo fundamental del texto, o bien dejar la lectura de esta materia para más adelante cuando se encuentre con aquellas partes de la teoría en las que se

utilizan propiedades del extremo superior. Las materias en el texto que dependan del axioma del extremo superior se señalarán claramente.

Para desarrollar el Cálculo como una teoría matemática completa, sería necesario exponer, junto al sistema de axiomas del número real, un conjunto de «métodos de demostración» que permitieran deducir los teoremas a partir de los axiomas. Cada afirmación en la teoría tendría que ser justificada o como «una ley establecida» (es decir, un axioma, una definición o un teorema previamente probado), o como el resultado de aplicar a leyes establecidas uno de los métodos de demostración aceptados. Un programa de esta naturaleza resultaría extremadamente largo y trabajoso, y ayudaría muy poco a la comprensión de la materia por el principiante. Afortunadamente no es necesario proceder de esta forma para llegar a una buena comprensión y manejo del Cálculo. En este libro se introducen las cuestiones prescindiendo de un formalismo exagerado y se hace amplio uso del razonamiento geométrico cuando se cree conveniente; pero al mismo tiempo, se procura que la exposición de las materias goce de la precisión y claridad propias de la ciencia moderna. Todos los teoremas importantes de la teoría en cuestión, están explícitamente expuestos y rigurosamente demostrados.

Para evitar interrumpir la sucesión de ideas, algunas de las demostraciones aparecen en secciones separadas señaladas con asterisco. Por la misma razón, algunos de los capítulos van acompañados de secciones suplementarias en las cuales se tratan con detalle algunos temas importantes relacionados con el Cálculo. Algunos de ellos están también señalados con asterisco para indicar que pueden omitirse o posponerse sin que se interrumpa la continuidad de la exposición. El que se tomen más o menos en consideración los apartados con asterisco, depende en parte de la preparación del lector y en parte de su interés. La persona que desee un curso completo de Cálculo tanto en teoría como en la práctica, tendrá que leer toda la materia. El que se interese primeramente por las ideas básicas y la práctica, podrá suprimir los apartados con asterisco.

Parte II. - Conceptos básicos de la Teoría de conjuntos

I 2.1 Introducción a la Teoría de conjuntos

En el estudio de cualquier rama de la Matemática, sea Análisis, Álgebra o Geometría, resulta útil emplear la notación y la terminología de la Teoría de conjuntos. Esta teoría, que fue desarrollada por Boole y Cantor (†) a fines del siglo XIX, ha tenido una profunda influencia en el desarrollo de la Matemática en el si-

(†) George Boole (1815-1864) fue un lógico-matemático inglés. Su libro, *Investigación de las leyes del pensamiento,* publicado en 1854, señala la creación del primer sistema práctico de Lógica simbólica. George F. L. P. Cantor (1845-1918) y su escuela crearon la moderna Teoría de conjuntos en el período 1874-1895.

glo XX. Ha unificado muchas ideas aparentemente inconexas y ha contribuido a reducir gran número de conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos por un método elegante y sistemático. Un estudio riguroso de la Teoría de conjuntos requeriría una amplia discusión que consideramos fuera del alcance de este libro. Por fortuna, las nociones básicas son en número reducido, y es posible desarrollar un conocimiento práctico de los métodos e ideas de la Teoría de conjuntos a través de una discusión informal. En realidad, no vamos a hacer una discusión de la moderna Teoría de conjuntos, sino precisar la terminología que deberemos aplicar a las ideas más o menos familiares.

En Matemáticas, la palabra «conjunto» se emplea para representar una colección de objetos considerada como una sola entidad. Las colecciones designadas con nombres tales como «rebaño», «tribu», «muchedumbre», «equipo» y «electorado» son todas ejemplos de conjunto. Los objetos que constituyen la colección se llaman *elementos* o *miembros* del conjunto, y de ellos se dice que *pertenecen* o que están *contenidos* en el conjunto. A su vez, se dice que el conjunto *contiene* o está *compuesto de* sus elementos.

Nos ocuparemos principalmente de conjuntos de entes matemáticos: conjuntos de números, de curvas, de figuras geométricas, etc. En muchas aplicaciones conviene considerar conjuntos en los que no se supone nada acerca de la naturaleza de sus elementos. Tales conjuntos se llaman abstractos. La Teoría de conjuntos abstractos ha sido desarrollada para tratar con tales colecciones de objetos arbitrarios, y precisamente a esa generalidad se debe el gran alcance de tal teoría.

I 2.2. Notaciones para designar conjuntos

Corrientemente los conjuntos se designan con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$; y los elementos con minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Utilizamos la notación

$$x \in S$$

para indicar que «x es un elemento de S» o que «x pertenece a S». Si x no pertenece a S escribimos $x \notin S$. Cuando convenga, designaremos conjuntos escribiendo los elementos entre corchetes; por ejemplo, el conjunto de los enteros positivos pares menores que 10 se expresa con el símbolo $\{2, 4, 6, 8\}$ mientras que el de *todos* los enteros positivos se representa con $\{1, 2, 3, \ldots\}$; los tres puntos significan «y así sucesivamente». Los puntos suspensivos tan sólo se utilizan cuando el significado de «y así sucesivamente» sea claro. El método de citar los elementos de un conjunto entre corchetes se llama frecuentemente la *notación en lista.*

El primer concepto fundamental que relaciona un conjunto con otro es la *igualdad* de conjuntos:

DEFINICIÓN DE IGUALDAD DE CONJUNTOS. *Se dice que dos conjuntos A y B son iguales (o idénticos) si constan exactamente de los mismos elementos, en cuyo*

caso escribiremos $A=B$. *Si uno de los conjuntos contiene algún elemento que no está en el otro, decimos que los conjuntos son distintos y escribimos* $A \neq B$.

EJEMPLO 1. De acuerdo con esta definición, los dos conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ y $\{2, 8, 4, 6\}$ son iguales, ya que ambos constan de los cuatro elementos 2, 4, 6, y 8. De este modo, cuando usamos la notación en lista para expresar un conjunto, el orden en que aparecen los elementos es indiferente.

EJEMPLO 2. Los conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ y $\{2, 2, 4, 4, 6, 8\}$ son iguales a pesar de que en el segundo conjunto los elementos 2 y 4 están citados dos veces. Ambos conjuntos contienen los cuatro elementos 2, 4, 6, 8 y no otros, así que la definición exige que consideremos iguales esos conjuntos. Este ejemplo pone de manifiesto que no debemos exigir que los elementos citados en la notación en lista sean todos distintos. Análogamente el conjunto de letras en la palabra *Mississippi* es idéntico al conjunto $\{M, i, s, p\}$ que consta de las cuatro letras distintas M, i, s, y p.

I 2.3 Subconjuntos

A partir de un conjunto dado podemos formar nuevos conjuntos, llamados *subconjuntos* de aquél. Por ejemplo, el conjunto de los enteros positivos menores que 10 y divisibles por 4 (que es el conjunto $\{4, 8\}$) es un subconjunto de los enteros positivos pares menores que 10. En general, daremos la definición siguiente:

DEFINICIÓN DE SUBCONJUNTO. *Se dice que un conjunto A es un subconjunto del conjunto B, y escribimos*

$$A \subseteq B,$$

cuando todo elemento de A pertenece también a B. Decimos también que A está contenido en B o que B contiene a A. El símbolo $\subseteq$ *se utiliza para representar la relación de inclusión de conjuntos.*

La relación $A \subseteq B$ no excluye la posibilidad de que $B \subseteq A$. En realidad, podemos tener las dos relaciones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ pero esto se presenta tan sólo si A y B tienen los mismos elementos. En otras palabras,

$$A=B \quad \textit{si y sólo si} \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A .$$

Este teorema es consecuencia inmediata de las definiciones anteriores de igualdad e inclusión. Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, decimos que A es un *subconjunto propio* de B; indicamos esto escribiendo $A \subset B$.

En todas nuestras aplicaciones ocurrirá que tendremos fijado de antemano un cierto conjunto S, y sólo nos interesarán subconjuntos de aquél. El conjunto fun-

damental S puede variar de una aplicación a otra; y será considerado como el *conjunto universal* de cada teoría particular. La notación

$$\{x \mid x \in S \quad \text{y} \quad x \text{ satisface } P\}$$

designará el conjunto de todos los elementos x de S que satisfacen la propiedad P. Cuando el conjunto universal al que nos refiramos se sobrentiende, omitiremos el citarlo abreviando la notación poniendo $\{x \mid x \text{ satisface } P\}$. Esto se lee «el conjunto de todos los x que satisfacen P». Los conjuntos representados de este modo quedan caracterizados por una *propiedad definidora.* Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales positivos podría designarse por $\{x \mid x>0\}$; el conjunto universal S en este caso se sobrentiende que es el conjunto de todos los números reales. Del mismo modo, el conjunto de todos los números pares positivos $\{2, 4, 6, \ldots\}$ puede designarse con $\{x \mid x \text{ entero par positivo}\}$. Naturalmente, la letra x puede reemplazarse por otro signo adecuado. Así, se puede escribir

$$\{x \mid x > 0\} = \{y \mid y > 0\} = \{t \mid t > 0\}$$

etcétera.

Puede ocurrir que un conjunto no contenga elementos. Un tal conjunto se llama *conjunto vacío,* y se representa mediante el símbolo $\varnothing$. Consideremos el $\varnothing$ como subconjunto de cualquier conjunto. Hay quien imagina un conjunto como un recipiente (tal como una bolsa o una caja) que contiene ciertos objetos, sus elementos. Entonces, el conjunto vacío sería un recipiente vacío.

Para evitar dificultades y confusiones, debemos distinguir entre el elemento x y el conjunto $\{x\}$ cuyo único elemento es x. (Una caja con un sombrero dentro, es conceptualmente distinto del sombrero considerado solo.) En particular el conjunto vacío $\varnothing$ no es lo mismo que el conjunto $\{\varnothing\}$. En realidad el conjunto vacío $\varnothing$ no contiene elementos, mientras que el conjunto $\{\varnothing\}$ contiene un elemento, $\varnothing$ (Una bolsa que contiene una bolsa vacía no está vacía.) Los conjuntos que contienen un solo elemento se llaman *conjuntos de un elemento.*

Con frecuencia nos ayudamos de diagramas para hacer intuitivas las relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, podemos pensar que el conjunto universal S es una región en el plano, y cada uno de sus elementos un punto. Los subconjuntos de S pueden imaginarse como colecciones de puntos interiores a S. Por ejemplo, en la figura I.6(b) la porción sombreada es un subconjunto de A y también de B. Las ayudas gráficas de este tipo se llaman *diagramas de Venn* y se utilizan para comprobar la validez de ciertos teoremas de la Teoría de conjuntos o para sugerir métodos de demostración de los mismos. Naturalmente, tales demostraciones se basan en las definiciones y conceptos y su validez dependerá de un razonamiento correcto y no precisamente de los diagramas.

I 2.4 Reuniones, intersecciones, complementos

A partir de dos conjuntos dados A y B, siempre podemos formar un nuevo conjunto llamado *reunión* de A y B. Este nuevo conjunto se representa con el símbolo

$$A \cup B \text{ (se lee «}A\text{ reunión }B\text{»)}$$

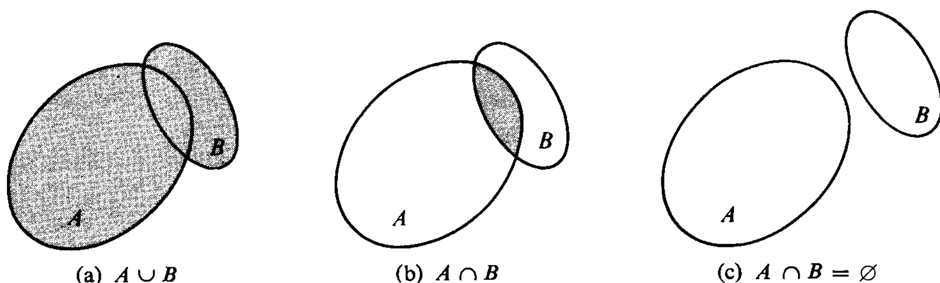


FIGURA I.6 *Reuniones e intersecciones.*

y se define como el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Es decir, $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos A, B. En la figura I.6(a) la parte sombreada representa $A \cup B$.

Análogamente, la *intersección* de A y B que se representa con el símbolo

$$A \cap B \text{ (se lee: «}A\text{ intersección }B\text{»)}$$

se define como el conjunto de los elementos comunes a A y a B. En la figura I.6(b) se representa la intersección de A y B. En la figura I.6(c) se ve que la intersección de A y B es el conjunto $\varnothing$, puesto que A y B no tienen elementos comunes. Dos conjuntos A y B se llaman *disjuntos* si $A \cap B = \varnothing$.

Dados dos conjuntos A y B, se define la *diferencia* $A - B$ (que también se llama *complemento de B relativo a A*) como el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B. Así pues, según la definición

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En la figura I.6(b) la porción no sombreada de A representa $A - B$; la no sombreada de B representa $B - A$.

Las operaciones de reunión e intersección poseen muchas analogías formales con la adición y multiplicación ordinarias de números reales. Por ejemplo, puesto

que no existe cuestión de orden en las definiciones de reunión e intersección, se deduce que $A \cup B = B \cup A$ y que $A \cap B = B \cap A$. Es decir, la reunión y la intersección son operaciones *conmutativas*. Asimismo dichas definiciones están dadas de tal modo que las operaciones son *asociativas*:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad \text{y} \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Estos y otros teoremas relativos al «álgebra de conjuntos» se citan como Ejercicios en la Sección I 2.5. Uno de los mejores métodos para que el lector se familiarice con la terminología y las notaciones antes introducidas es deducir las demostraciones de cada una de estas leyes formales. Una muestra del tipo de razonamiento que se necesita aparece inmediatamente después de los Ejercicios.

Las operaciones de reunión e intersección pueden extenderse a colecciones finitas o infinitas de conjuntos, de la manera siguiente: Sea $\mathscr{F}$ una clase (†) no vacía de conjuntos. La reunión de todos los conjuntos de $\mathscr{F}$ se define como el conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos de $\mathscr{F}$, y se representa con el símbolo

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A.$$

Si $\mathscr{F}$ es una colección finita de conjuntos, sea por ejemplo $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, escribimos

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Análogamente, la intersección de todos los conjuntos de $\mathscr{F}$ se define como el conjunto de aquellos elementos que pertenecen a todos los conjuntos de $\mathscr{F}$; se representa con el símbolo

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A.$$

Al igual que antes, para colecciones finitas de conjuntos escribimos:

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

(†) Para simplificar el lenguaje llamamos *clase* a una colección de conjuntos. Para representar clases empleamos letras mayúsculas cursivas. La terminología y la notación usuales de la Teoría de conjuntos se aplica, naturalmente, a las clases. Así, por ejemplo, $A \in \mathscr{F}$ significa que A es uno de los conjuntos de la clase $\mathscr{F}$, y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ significa que todo conjunto de $\mathscr{A}$ pertenece a $\mathscr{B}$, y así sucesivamente.

La reunión y la intersección se han definido de manera que las leyes asociativas se satisfacen inmediatamente. En consecuencia no existirá ambigüedad cuando escribimos $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ o $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

I 2.5 Ejercicios

1. Utilizar la notación en lista para representar los siguientes conjuntos de números reales.

$$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}. \qquad D = \{x \mid x^3 - 2x^2 + x = 2\}.$$

$$B = \{x \mid (x - 1)^2 = 0\}. \qquad E = \{x \mid (x + 8)^2 = 9^2\}.$$

$$C = \{x \mid x + 8 = 9\}. \qquad F = \{x \mid (x^2 + 16x)^2 = 17^2\}.$$

2. Para los conjuntos del Ejercicio 1, obsérvese que $B \subseteq A$. Citar todas las relaciones de inclusión $\subseteq$ que son válidas entre los conjuntos A, B, C, D, E, F.
3. Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Discutir la validez de las afirmaciones siguientes (probar que unas son ciertas y explicar por qué las otras son falsas).

(a) $A \subset B$. (d) $1 \in A$.
(b) $A \subseteq B$. (e) $1 \subseteq A$.
(c) $A \in B$. (f) $1 \subset B$.

4. Resolver el Ejercicio 3 si $A = \{1\}$ y $B = \{\{1\}, 1\}$.
5. Dado el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Expresar todos los subconjuntos de S. Hay en total 16, si contamos $\varnothing$ y S.
6. Dados los cuatro conjuntos siguientes

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{\{1\}, \{2\}\}, \qquad C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \qquad D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

discutir la validez de las afirmaciones siguientes (probar que unas son ciertas y explicar por qué las otras no lo son).

(a) $A = B$. (d) $A \in C$. (g) $B \subset D$.
(b) $A \subseteq B$. (e) $A \subset D$. (h) $B \in D$.
(c) $A \subset C$. (f) $B \subset C$. (i) $A \in D$.

7. Demostrar las propiedades siguientes de la igualdad de conjuntos.

(a) $\{a, a\} = \{a\}$.
(b) $\{a, b\} = \{b, a\}$.
(c) $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.

Demostrar el conjunto de relaciones de los Ejercicios 8 al 19. (Al final de esta Sección se dan ejemplos de estas demostraciónes).

8. *Leyes conmutativas*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

9. *Leyes asociativas:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

10. *Leyes distributivas:* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

11. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A,$
12. $A \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq A.$
13. $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$
14. $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$
15. Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C.$
16. Si $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$, entonces $C \subseteq A \cap B.$
17. (a) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, probar que $A \subset C.$
    (b) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, probar que $A \subseteq C.$
    (c) ¿Qué puede afirmarse si $A \subset B$ y $B \subseteq C$?
    (d) Si $x \in A$ y $A \subseteq B$, ¿es cierto necesariamente que $x \in B$?
    (e) Si $x \in A$ y $A \in B$, ¿es cierto necesariamente que $x \in B$?
18. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$
19. Sea $\mathscr{F}$ una clase de conjuntos. Entonces

$$B - \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{A \in \mathscr{F}} (B - A) \qquad \text{y} \qquad B - \bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} (B - A).$$

20. (a) Demostrar que una de las dos fórmulas siguientes es siempre correcta y la otra algunas veces es falsa:

$$\text{(i) } A - (B - C) = (A - B) \cup C,$$

$$\text{(ii) } A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

(b) Establecer una condición necesaria y suficiente adicional para que la fórmula que sea incorrecta sea siempre válida.

Demostración de la ley conmutativa $A \cup B = B \cup A$. Sean $X = A \cup B$, $Y = B \cup A$. Para demostrar que $X = Y$ se demuestra que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$. Supóngase que $x \in X$. Entonces x está por lo menos en A o en B. Luego, x está por lo menos en B o en A; de modo que $x \in Y$. Así, pues, todo elemento de X está también en Y, con lo que $X \subseteq Y$. Análogamente, encontramos que $Y \subseteq X$, de modo que $X = Y$.

Demostración de $A \cap B \subseteq A$. Si $x \in A \cap B$, x está simultáneamente en A y en B. En particular, $x \in A$. Así, pues, todo elemento de $A \cap B$ está también en A; por lo tanto, $A \cap B \subseteq A$.

Parte III. - Un conjunto de axiomas para el sistema de números reales

I 3.1 Introducción

Hay muchos métodos para introducir el sistema de los números reales. Un método corriente es el de empezar con los enteros positivos 1, 2, 3, . . . y utilizarlos como base para construir un sistema más amplio que tenga las propiedades deseadas. Brevemente, la idea de este método es tomar los enteros positivos como base para formar un sistema más amplio, que es el de los números *racionales* positivos (cocientes de enteros positivos). Los números racionales positivos se utilizan a su vez como base para construir los *irracionales* positivos (números reales como $\sqrt{2}$ y π que no son racionales). El paso final es la introducción de los números reales negativos y el cero. La parte más difícil del proceso total es el paso de los números racionales a los números irracionales.

Aunque la necesidad del número irracional se había presentado ya a los matemáticos de la antigua Grecia en sus estudios geométricos, no se introdujeron métodos satisfactorios de construcción de los números reales a partir de los racionales hasta entrado el siglo XIX. En esta época se perfilaron tres teorías distintas por Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916). En 1889, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) dio cinco axiomas para los enteros positivos que se utilizaron como punto de partida para la construcción total. Una exposición detallada de esta construcción empezando por los axiomas de Peano y utilizando el método de Dedekind para introducir el número irracional, se encuentra en el libro de E. Landau, *Fundamentos del Análisis* (Nueva York, Chelsea Publishing Co., 1951).

El punto de vista adoptado aquí no es constructivo. Se inicia el proceso en un punto bastante avanzado, considerando los números reales como conceptos primitivos que satisfacen a un cierto número de propiedades que se toman como axiomas; es decir, se supone que existen ciertos objetos, llamados números reales, que satisfacen los 10 axiomas enunciados en las cinco Secciones que siguen. Todas las propiedades de los números reales que se utilizarán en este libro, o están entre los axiomas o se pueden deducir de ellos. Cuando los números reales se definen mediante un proceso constructivo, las propiedades que se toman como axiomas tendrán que demostrarse como teoremas.

Mientras no se diga lo contrario, las letras *a, b, c, . . . x, y, z* que aparecen en los axiomas representan números reales cualesquiera. Los axiomas se agrupan en forma natural en tres grupos, que son, *axiomas de cuerpo, axiomas de orden* y *axioma del extremo superior* (llamado también *axioma de continuidad* o *axioma de completitud*).

I 3.2 Axiomas de cuerpo

Junto con el conjunto de los números reales se supone la existencia de dos operaciones llamadas *adición y multiplicación,* tales que para cada par de números reales x e y se puede formar la *suma* de x e y, que es otro número real designado por $x+y$ y el *producto* de x por y designado por xy o $x \cdot y$. La suma $x+y$ y el producto xy están unívocamente determinados por x e y. A los signos $+$ y $\cdot$ no se les asigna otro significado especial que el precisado en los axiomas.

AXIOMA 1. PROPIEDAD CONMUTATIVA. $x+y=y+x, \quad xy=yx.$

AXIOMA 2. PROPIEDAD ASOCIATIVA. $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x(yz)=(xy)z.$

AXIOMA 3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. $x(y+z)=xy+xz.$

AXIOMA 4. EXISTENCIA DE ELEMENTOS NEUTROS. *Existen dos números reales distintos, que se indican por* 0 *y* 1 *tales que para cada número real x se tiene:* $0+x=x+0=x$ y $1 \cdot x=x \cdot 1=x$.

AXIOMA 5. EXISTENCIA DE NEGATIVOS. *Para cada número real x existe un número real y tal que* $x+y=y+x=0$.

AXIOMA 6. EXISTENCIA DEL RECÍPROCO. *Para cada número real* $x \neq 0$ *existe un número real y tal que* $xy=yx=1$.

Nota: Los números 0 y 1 de los axiomas 5 y 6 son los mismos que los del axioma 4.

De los axiomas anteriores se puede deducir todas las leyes usuales del Álgebra elemental. Las más importantes de ellas se recogen a continuación como teoremas. En todos estos teoremas las letras *a, b, c, d,* representan números reales cualesquiera.

TEOREMA I.1. LEY DE SIMPLIFICACIÓN PARA LA SUMA. *Si* $a+b=a+c$, *entonces* $b=c$. *(En particular esto prueba que el número* 0 *del axioma* 4 *es único.)*

TEOREMA I.2. POSIBILIDAD DE LA SUSTRACCIÓN. *Dados a y b existe uno y sólo un x tal que* $a+x=b$. *Este x se designa por* $b-a$. *En particular* $0-a$ *se escribe simplemente* $-a$ *y se denomina el negativo de a.*

TEOREMA I.3. $b-a=b+(-a)$.

TEOREMA I.4. $-(-a)=a$.

TEOREMA I.5. $a(b-c)=ab-ac$.

TEOREMA I.6. $0 \cdot a=a \cdot 0=0$.

TEOREMA I.7. LEY DE SIMPLIFICACIÓN PARA LA MULTIPLICACIÓN. Si $ab=ac$ *y* $a \neq 0$, *entonces* $b=c$. *(En particular esto demuestra que el número* 1 *del axioma* 4 *es único.)*

TEOREMA I.8. POSIBILIDAD DE LA DIVISIÓN. *Dados* a *y* b *con* $a \neq 0$, *existe uno y sólo un* x *tal que* $ax=b$. *La* x *se designa por* b/a *o* $\frac{b}{a}$ *y se denomina cociente de* b *y* a. *En particular* $1/a$ *se escribe también* a^{-1} *y se designa recíproco de* a.

TEOREMA I.9. *Si* $a \neq 0$, *entonces* $b/a = b \cdot a^{-1}$.

TEOREMA I.10. *Si* $a \neq 0$, *entonces* $(a^{-1})^{-1} = a$.

TEOREMA I.11. *Si* $ab=0$ *entonces o* $a=0$ *o* $b=0$.

TEOREMA I.12. $(-a)b = -(ab)$ *y* $(-a)(-b) = ab$.

TEOREMA I.13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ *si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$.

TEOREMA I.14. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ *si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$.

TEOREMA I.15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ *si* $b \neq 0$, $c \neq 0$, *y* $d \neq 0$.

Para poner de manifiesto cómo estos teoremas pueden obtenerse como consecuencia de los axiomas, se dan las demostraciones de I.1 hasta I.4, y sería instructivo para el lector tratar de demostrar los restantes.

Demostración de I.1. Dado $a+b=a+c$. En virtud del axioma 5, se puede elegir y de manera que $y+a=0$, con lo cual $y+(a+b)=y+(a+c)$, y aplicando la propiedad asociativa $(y+a)+b=(y+a)+c$, o sea, $0+b=0+c$. Pero en virtud del axioma 4, se tiene $0+b=b$ y $0+c=c$, o sea, $b=c$. Obsérvese que este teorema demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 y $0'$ tuvieran ambos esta propiedad, entonces, $0+0'=0$ y $0+0=0$; por tanto, $0+0'=0+0$ y por la ley de simplificación $0=0'$.

Demostración de I.2. Dados a y b se elige y de manera que $a+y=0$ y sea $x=y+b$. Entonces, $a+x=a+(y+b)=(a+y)+b=0+b=b$. Por tanto, hay por lo menos una x tal que $a+x=b$. Pero en virtud del teorema I.1, hay a lo sumo una. Luego hay *una y sólo una* x en estas condiciones.

Demostración de I.3. Sea $x=b-a$ y sea $y=b+(-a)$. Se trata de probar que $x=y$. Por definición de $b-a$, $x+a=b$ y

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Por tanto, $x+a=y+a$, y en virtud de I.1, $x=y$.

Demostración de I.4. Se tiene $a+(-a)=0$ por definición de $-a$. Pero esta igualdad dice que a es el opuesto de $(-a)$, es decir, que $a=-(-a)$ como se afirma en el teorema.

*I 3.3 Ejercicios

1. Demostrar los teoremas del I.5 al I.15, utilizando los axiomas 1 al 6 y los teoremas I.1 al I.4.

En los ejercicios del 2 al 10, demostrar las afirmaciones indicadas, o establecer las igualdades dadas. Aplíquense los axiomas 1 al 6 y los teoremas del I.1 al I.15.

2. $-0 = 0$.
3. $1^{-1} = 1$.
4. El cero no tiene recíproco.
5. $-(a+b) = -a-b$.
6. $-(a-b) = -a+b$.
7. $(a-b)+(b-c) = a-c$.
8. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
9. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$.
10. $(a/b)-(c/d) = (ad-bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

I 3.4 Axiomas de orden

Este grupo de axiomas se refiere a un concepto por el que se establece una *ordenación* entre los números reales. Según esta ordenación se puede decidir si un número real es mayor o menor que otro. Se introducen aquí las propiedades de orden, como un conjunto de axiomas referentes al nuevo concepto primitivo de *positivo,* para definir después los conceptos de *mayor que* y *menor que* a partir del de *positivo.*

Supondremos que existe un cierto subconjunto $\mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}$, llamado conjunto de números *positivos,* que satisfacen los tres axiomas de orden siguientes:

AXIOMA 7. *Si x e y pertenecen a $\mathbf{R}^+$, lo mismo ocurre a $x+y$ y xy.*

AXIOMA 8. *Para todo real $x \neq 0$, o $x \in \mathbf{R}^+$ o $-x \in \mathbf{R}^+$, pero no ambos.*

AXIOMA 9. $0 \notin \mathbf{R}^+$.

Ahora se pueden definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$, y $\geq$ llamados respectivamente *menor que, mayor que, igual o menor que,* e *igual o mayor que,* de la manera siguiente:

$$x<y \text{ significa que } y-x \text{ es positivo.}$$

$y > x$ significa que $x < y$.

$x \leq y$ significa que o $x < y$ o $x = y$.

$y \geq x$ significa que $x \leq y$.

Por lo tanto, se tiene $x > 0$ si y sólo si x es positivo. Si $x < 0$ se dice que x es *negativo*; si $x \geq 0$ se dice que x es *no negativo*. El par de desigualdades simultáneas $x < y$, $y < z$ se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$; interpretaciones análogas se dan a las desigualdades compuestas $x \leq y < z$, $x < y \leq z$, $x \leq y \leq z$.

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades, las más importantes de las cuales se dan a continuación como teoremas.

TEOREMA I.16. PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA. *Para a y b números reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$.*

TEOREMA I.17. PROPIEDAD TRANSITIVA. *Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$.*

TEOREMA I.18. *Si $a < b$ es $a + c < b + c$.*

TEOREMA I.19. *Si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$.*

TEOREMA I.20. *Si $a \neq 0$ es $a^2 > 0$.*

TEOREMA I.21. $1 > 0$.

TEOREMA I.22. *Si $a < b$ y $c < 0$, es $ac > bc$.*

TEOREMA I.23. *Si $a < b$, es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$.*

TEOREMA I.24. *Si $ab > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos.*

TEOREMA I.25. *Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.*

También aquí se demostrarán sólo algunos de estos teoremas, como ejemplo de cómo se procede en la demostración. Los demás se dejan como ejercicio al lector.

Demostración de I.16. Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$ y, por tanto, en virtud del axioma 9 no puede ser ni $a > b$ ni $b > a$.

Si $x \neq 0$, el axioma 8 afirma que o $x > 0$ o $x < 0$, pero no ambos; por consiguiente, o es $a < b$ o es $b < a$, pero no ambos. Por tanto se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a = b$, $a < b$, $b < a$.

Demostración de I.17. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$. En virtud del axioma 7 se puede sumar obteniéndose $(b - a) + (c - b) > 0$. Es decir, $c - a > 0$, y por tanto, $a < c$.

Demostración de I.18. Sea $x = a + c$, $y = b + c$. Entonces $y - x = b - a$. Pero $b - a > 0$, por tanto, $a < b$. De donde $y - x > 0$, lo que significa $x < y$.

Demostración de I.19. Si $a < b$ entonces $b - a > 0$. Si $c > 0$ en virtud del axioma 7, se puede multiplicar c por $(b - a)$ obteniéndose $(b - a)c > 0$. Pero $(b - a)c = bc - ac$, por tanto, $bc - ac > 0$ y esto significa $bc > ac$ como se quería demostrar.

Demostración de I.20. Si $a > 0$, en virtud del axioma 7 $a \cdot a > 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y, por tanto, $(-a) \cdot (-a) > 0$ en virtud del axioma 7. En ambos casos se tiene $a^2 > 0$.

Demostración de I.21. Aplicando el teorema I.20 al caso $a = 1$.

*I 3.5 Ejercicios

1. Demostrar los teoremas I.22 al I.25 utilizando los teoremas anteriores y los axiomas del 1 al 9.

En los ejercicios del 2 al 10 demostrar las proposiciones y establecer las desigualdades dadas. Se pueden utilizar los axiomas del 1 al 9 y los teoremas del I. 1 al I. 25.

2. No existe ningún número real tal que $x^2 + 1 = 0$.
3. La suma de dos números negativos es un número negativo.
4. Si $a > 0$, también $1/a > 0$; si $a < 0$, entonces $1/a < 0$.
5. Si $0 < a < b$, entonces, $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
6. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, es $a \leq c$.
7. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ y $a = c$, entonces $b = c$.
8. Para números reales a y b cualesquiera, se tiene $a^2 + b^2 \geq 0$. Si $ab \neq 0$, entonces es $a^2 + b^2 > 0$.
9. No existe ningún número real a tal que $x \leq a$ para todo real x.
10. Si x tiene la propiedad que $0 \leq x < h$ para *cada* número real positivo h, entonces $x = 0$.

I 3.6 Números enteros y racionales

Hay ciertos subconjuntos de **R** que se distinguen porque tienen propiedades especiales de que no gozan todos los números reales. En esta Sección se discutirán dos de estos subconjuntos, los *números enteros* y los *números racionales*.

Para introducir los enteros positivos se empieza con el número 1, cuya existencia queda asegurada por el axioma 4. El número $1 + 1$ se representa por 2, el $2 + 1$ por 3, y así sucesivamente. Los números 1, 2, 3, ..., obtenidos de este modo por la adición repetida del 1 son todos positivos, y se llaman *enteros positivos.* En rigor, esta descripción de los enteros positivos no es del todo precisa pues no hemos explicado con detalle lo que entendemos por «y así sucesivamente» o por «adición repetida del 1». Si bien la significación intuitiva puede parecer clara, en un estudio cuidadoso del sistema de los números reales es necesario dar una definición más precisa de los enteros positivos. Hay varios modos de hacerlo. Un método consiste en introducir primero la noción de *conjunto inductivo.*

DEFINICIÓN DE CONJUNTO INDUCTIVO. *Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las propiedades siguientes:*

a) *El número* 1 *pertenece al conjunto.*

b) *Para todo* x *en el conjunto, el número* $x + 1$ *pertenece también al conjunto.*

Por ejemplo, **R** es un conjunto inductivo. También lo es el conjunto $\mathbf{R}^+$. Definiremos los enteros positivos como aquellos números reales que pertenecen a todo conjunto inductivo.

DEFINICIÓN DE ENTEROS POSITIVOS. *Un número real se llama entero positivo si pertenece a todo conjunto inductivo.*

Sea **P** el conjunto de todos los enteros positivos. Es un conjunto inductivo ya que a) contiene el 1, y b) contiene a $x + 1$ siempre que contenga x. Puesto que los elementos de **P** pertenecen a todo conjunto inductivo, nos referiremos a **P** como el *menor* conjunto inductivo. Esta propiedad del conjunto **P** constituye la base lógica para un tipo de razonamiento que los matemáticos denominan *demostración por inducción,* que se expone con detalle en la parte 4 de esta Introducción.

Los opuestos de los enteros positivos se llaman *enteros negativos.* Los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0 (cero), constituyen un conjunto **Z** que se llama simplemente *conjunto de los enteros.*

En un estudio completo del sistema de los números reales, sería necesario al llegar aquí demostrar ciertos teoremas acerca de los enteros. Por ejemplo, la suma, la diferencia o el producto de dos enteros es un entero, pero el cociente de dos enteros no es necesariamente entero. Sin embargo, no entraremos en los detalles de tales demostraciones.

Los cocientes de enteros a/b (siendo $b \neq 0$) se llaman *números racionales.* El conjunto de los números racionales, representado por **Q**, contiene a **Z** como subconjunto. El lector debería comprobar que **Q** satisface todos los axiomas de cuerpo y de orden. Por esta razón se dice que el conjunto de los números racio-

nales es un *cuerpo ordenado.* Los números reales que no pertenecen a **Q** se llaman *irracionales.*

I 3.7 Interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta

Sin duda que el lector debe estar familiarizado con la representación de los números reales por medio de los puntos de una recta. Se elige un punto para representar el 0 y otro a la derecha del 0 para representar el 1, como se indica en la figura I.7. Esta elección determina la escala. Si se adopta un conjunto de axiomas apropiados para la Geometría euclídea, cada número real corresponde a uno y sólo un punto de la recta y, recíprocamente, cada punto de la recta a un número real y sólo uno. Por esta razón la recta se denomina frecuentemente *recta real* o *eje real,* y es costumbre utilizar las palabras *número real* y *punto* como sinónimos. Por eso se dice muchas veces el *punto* x en vez del punto correspondiente al número real x.

La relación de orden entre los números reales tiene una interpretación geométrica simple. Si $x < y$, el punto x está a la izquierda del punto y, como se ve en la figura I.7. Los números positivos están a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda del 0. Si $a < b$, un punto x satisface las desigualdades $a < x < b$, si y sólo si x está entre a y b.

Esta posibilidad de representar geométricamente los números reales es un auxiliar poderoso, pues permite descubrir y comprender mejor ciertas propiedades de los números reales. Aunque el lector debe observar que todas las propiedades de los números reales que se han dado como teoremas deben deducirse de los axiomas sin ninguna referencia geométrica, esto no prejuzga que no deba hacerse uso de la Geometría en el estudio de las propiedades de los números reales. Por el contrario, la Geometría sugiere a menudo el método de demostración para un teorema particular, y algunas veces un argumento geométrico es más sugestivo que la demostración puramente *analítica* (dependiente exclusivamente de los axiomas del número real). En este libro, se utiliza con frecuencia la intuición geomé-

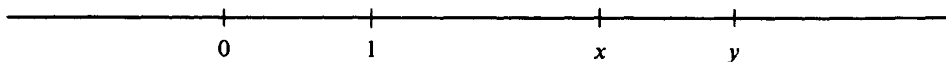


FIGURA I.7 *Números reales representados geométricamente en una línea*

trica para aclarar determinadas cuestiones o para inducir a discusiones de otras. No obstante, las demostraciones de todos los teoremas importantes se presentan en forma analítica.

I 3.8 Cota superior de un conjunto. elemento máximo, extremo superior

Los nueve axiomas expuestos hasta ahora contienen todas las propiedades de los números reales estudiados ordinariamente en Álgebra elemental. Hay otro

axioma de importancia fundamental en el Cálculo que de ordinario no se estudia en los cursos de Álgebra elemental. Este axioma (u otro equivalente) es necesario para establecer la existencia del número irracional.

En Álgebra elemental se presentan números irracionales cuando se trata de resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea tener un número real x tal que $x^2 = 2$. A partir de los nueve axiomas anteriores no se puede probar que exista un x en el sistema de los números reales que verifique tal ecuación, ya que estos nueve axiomas son satisfechos también por los números racionales y no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. (En el Ejercicio 11 de la Sección I 3.12 se esboza una demostración de esta afirmación.) El axioma 10 permite introducir números irracionales en el sistema de los números reales. Se verá también que atribuye al conjunto de los números reales una propiedad de continuidad que es especialmente importante en el estudio del Cálculo.

Antes de exponer el axioma 10, conviene introducir alguna terminología y notación especiales. Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número B tal que

$$x \leq B$$

para todo x de S. Entonces se dice que S está *acotado superiormente* por B. El número B se denomina una *cota superior* para S. Decimos *una* cota superior debido a que todo número mayor que B también es una cota superior. Si una cota superior B pertenece también a S, entonces B se llama el *elemento máximo* de S. A lo sumo puede existir un B que sea elemento máximo. Si existe, se escribe

$$B = \max S .$$

Así que, $B = \max S$ si $B \in S$ y $x \leq B$ para todo x de S. Un conjunto sin cota superior se dice que es *no acotado superiormente*.

Los ejemplos que siguen ilustran el significado de estas denominaciones.

EJEMPLO 1. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos. Es un conjunto no acotado superiormente. No tiene cotas superiores ni elemento máximo.

EJEMPLO 2. Sea S el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. Este conjunto está acotado superiormente por el 1. Su elemento máximo es el 1.

EJEMPLO 3. Sea T el conjunto de todos los números reales x tales que $0 \leq x < 1$. Es parecido al conjunto del ejemplo 2 salvo que el punto 1 no está incluido. Este conjunto está acotado superiormente por el 1 pero no tiene elemento máximo.

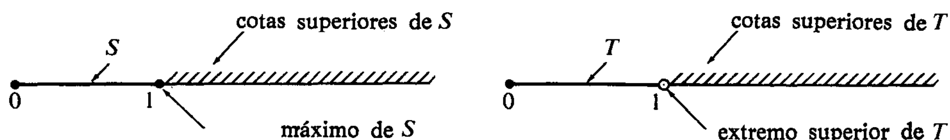
Algunos conjuntos, parecidos al del ejemplo 3, están acotados superiormente pero no tienen máximo. Para ellos existe un concepto que sustituye al del máximo. Este se llama *extremo superior* del conjunto y se define como sigue:

DEFINICIÓN DE EXTREMO SUPERIOR. *Un número B se denomina extremo superior de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes:*

a) *B es una cota superior de S.*

b) *Ningún número menor que B es cota superior para S.*

Si S tiene máximo, éste es también extremo superior de S. Pero si S no posee máximo, puede tener extremo superior. En el ejemplo 3 precedente, el número 1 es extremo superior para T si bien T no tiene máximo. (Ver figura I.8.)



a) S tiene máximo: max $S = 1$

b) T no tiene máximo, pero sí extremo superior: sup $T = 1$

FIGURA I.8 *Cotas superiores, máximo y extremo superior.*

TEOREMA I.26. *Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.*

Demostración. Sean B y C dos extremos superiores para un conjunto S. La propiedad b) implica que $C \geq B$ puesto que B es extremo superior; análogamente, $B \geq C$ ya que C es extremo superior. Luego, tenemos $B = C$.

Este teorema nos expresa que si existe extremo superior para un conjunto S, hay *solamente* uno y puede decirse *el* extremo superior.

Con frecuencia se emplea el término *supremo* de un conjunto en vez de extremo superior utilizando la abreviatura *sup*, escribiendo entonces:

$$B = \sup S .$$

I 3.9 Axioma del extremo superior (axioma de completitud)

Podemos ahora establecer el axioma del extremo superior para el sistema de números reales.

AXIOMA 10. *Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que* $B = \sup S$.

Insistamos una vez más en que el extremo superior de S no pertenece necesariamente a S. En realidad $\sup S$ pertenece a S si y sólo si S posee máximo, en cuyo caso $\max S = \sup S$.

Las definiciones de *cota inferior, acotado inferiormente, mínimo,* se formulan en forma parecida. El lector debería hacerlo como ejercicio. Si S tiene mínimo, se expresa poniendo $\min S$.

Un número L se llama *extremo inferior* (o *ínfimo*) de S si a) L es una cota inferior para S, y b) ningún número mayor que L es cota inferior para S. El extremo inferior de S, cuando existe, es único y se designa por $\inf S$. Si S posee mínimo, entonces $\min S = \inf S$.

Con el axioma 10, se puede demostrar el siguiente

TEOREMA I.27. *Todo conjunto no vacío S acotado inferiormente posee extremo inferior; esto es, existe un número real L tal que* $L = \inf S$.

Demostración. Sea $-S$ el conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente. El axioma 10 nos dice que existe un número B que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-B = \inf S$.

Consideremos una vez más los ejemplos de la Sección anterior. En el ejemplo 1, el conjunto de todos los números reales positivos, tiene el 0 como extremo inferior. Ese conjunto no tiene mínimo. En los ejemplos 2 y 3, el 0 es el mínimo.

En todos esos ejemplos resulta fácil decidir si el conjunto S es o no acotado superior o inferiormente, y también es fácil determinar los números $\sup S$ e $\inf S$. El ejemplo siguiente muestra que averiguar la existencia de las cotas superior o inferior puede resultar difícil.

EJEMPLO 4. Sea S el conjunto de todos los números de la forma $(1 + 1/n)^n$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si, por ejemplo, hacemos $n = 1, 2$, y 3, encontramos que los números 2, $\frac{9}{4}$, y $\frac{64}{27}$ pertenecen a S. Todo número del conjunto es mayor que 1, con lo que el conjunto está acotado inferiormente y por tanto tiene un extremo inferior. Con un pequeño esfuerzo podemos probar que 2 es el menor elemento de S de modo que $\inf S = \min S = 2$. También el conjunto S está acotado superiormente, aunque no es tan fácil demostrarlo. (¡Inténtese!) Una vez sabido que S está acotado superiormente, el axioma 10 nos asegura la existencia del extremo superior de S. En este caso no resulta fácil determinar el valor del extremo superior de S a partir de la definición de este conjunto. En un próximo capítulo veremos que el $\sup S$ es un número irracional aproximadamente igual a 2,718. Es un número importante en Cálculo llamado número de Euler o número e.

I 3.10 La propiedad arquimediana del sistema de los números reales

Esta Sección contiene algunas propiedades importantes del sistema de los números reales que son consecuencia del axioma del extremo superior.

TEOREMA I.28. *El conjunto* **P** *de los enteros positivos* 1, 2, 3, ... *no está acotado superiormente.*

Demostración. Supóngase **P** acotado superiormente. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. Puesto que **P** no es vacío, el axioma 10 nos dice que **P** tiene extremo superior, sea éste b. El número $b - 1$, siendo menor que b, no puede ser cota superior de **P**. Luego, existe un mínimo entero positivo n tal que $n > b - 1$. Para este n tenemos $n + 1 > b$. Puesto que $n + 1$ pertenece a **P**, esto contradice el que b sea una cota superior para **P**.

Como corolarios del teorema I.28, se obtienen inmediatamente las consecuencias siguientes:

TEOREMA I.29. *Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$.*

Demostración. Si no fuera así, x sería una cota superior de **P**, en contradicción con el teorema I.28.

TEOREMA I.30. *Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.*

Demostración. Aplicar el teorema I.29 cambiando x por y/x.

La propiedad descrita en el teorema I.30, se denomina frecuentemente *propiedad arquimediana* del sistema de los números reales. Geométricamente significa que cada segmento, tan largo como se quiera, puede ser recubierto por un número finito de segmentos de longitud positiva dada, tan pequeña como se quiera. En otras palabras, una regla corta puede medir distancias tan largas como se quiera colocándola consecutivamente. Arquímedes, considerando ésta como una propiedad fundamental de la línea recta, la consideró como uno de los axiomas de la Geometría. En los siglos XIX y XX se han construido geometrías no arquimedianas en las que se prescinde de este axioma.

A partir de la propiedad arquimediana, podemos demostrar el teorema siguiente que nos será útil en Cálculo integral.

TEOREMA I.31. *Si tres números reales a, x, e y satisfacen las desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \tag{I.14}$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$.

Demostración. Si $x > a$, el teorema I.30 nos dice que existe un entero positivo n que satisface $n(x - a) > y$, en contradicción con (I.14). Luego no puede ser $x > a$, con lo que deberá ser $x = a$.

I 3.11 Propiedades fundamentales del extremo superior

En esta Sección se consideran tres propiedades fundamentales de los extremos superior e inferior que se utilizarán en lo sucesivo. La primera de ellas establece que todo conjunto de números con extremo superior contiene números tan próximos como se quiera a dicho extremo; del mismo modo, un conjunto con extremo inferior contiene números tan próximos a él como se quiera.

TEOREMA I.32. *Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.*

a) *Si S tiene extremo superior, para un cierto x de S se tiene*

$$x > \sup S - h .$$

b) *Si S tiene extremo inferior, para un cierto x de S se tiene*

$$x < \inf S + h .$$

Demostración de a). Si es $x \leq \sup S - h$ para todo x de S, entonces $\sup S - h$ sería una cota superior de S menor que su extremo superior. Por consiguiente debe ser $x > \sup S - h$ por lo menos para un x de S. Esto demuestra a). La demostración de b) es parecida.

TEOREMA I.33. PROPIEDAD ADITIVA. *Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de* **R**, *sea C el conjunto*

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} .$$

a) *Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior, y*

$$\sup C = \sup A + \sup B .$$

b) *Si A y B tienen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior, e*

$$\inf C = \inf A + \inf B .$$

Demostración. Supongamos que A y B tengan extremo superior. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \leq \sup A + \sup B$;

de modo que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de C. Esto demuestra que C tiene extremo superior y que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B .$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema I.32 (con $h = 1/n$) existen un a en A y un b en B tales que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \qquad b > \sup B - \frac{1}{n}.$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}, \quad \text{o} \quad \sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n},$$

puesto que $a + b \leq \sup C$. Por consiguiente hemos demostrado que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema I.31, debe ser $\sup C = \sup A + \sup B$. Esto demuestra a), y la demostración de b) es parecida.

TEOREMA I.34. *Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de* **R** *tales que*

$$s \leq t$$

para todo s de S y todo t de T. Entonces S tiene extremo superior, y T extremo inferior, y se verifica

$$\sup S \leq \inf T .$$

Demostración. Cada t de T es cota superior para S. Por consiguiente S tiene extremo superior que satisface la desigualdad $\sup S \leq t$ para todo t de T. Luego $\sup S$ es una cota inferior para T, con lo cual T tiene extremo inferior que no puede ser menor que $\sup S$. Dicho de otro modo, se tiene $\sup S \leq \inf T$, como se afirmó.

*I 3.12 Ejercicios

1. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número real z tal que $x < z < y$.

2. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$.
3. Si $x > 0$, demostrar que existe un entero positivo n tal que $1/n < x$.
4. Si x es un número real arbitrario, demostrar que existe un entero n único que verifica las desigualdades $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la *parte entera* de x y se designa por $[x]$. Por ejemplo, $[5] = 5, [\frac{5}{2}] = 2$, $[-\frac{8}{3}] = -3$.
5. Si x es un número real arbitrario, probar que existe un entero único n que satisface la desigualdad $n \leq x < n + 1$.
6. Si x e y son números reales arbitrarios, $x < y$, probar que existe por lo menos un número racional r tal que $x < r < y$ y deducir de ello que existen infinitos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es *denso* en el sistema de los números reales.
7. Si x es racional, $x \neq 0$, e y es irracional, demostrar que $x + y$, $x - y$, xy, x/y, y/x son todos irracionales.
8. ¿La suma o el producto de dos números irracionales es siempre irracional?
9. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número irracional z tal que $x < z < y$ y deducir que existen infinitos.
10. Un entero n se llama *par* si $n = 2m$ para un cierto entero m, e *impar* si $n + 1$ es par. Demostrar las afirmaciones siguientes:
   a) Un entero no puede ser a la vez par e impar.
   b) Todo entero es par o es impar.
   c) La suma o el producto de dos enteros pares es par. ¿Qué se puede decir acerca de la suma o del producto de dos enteros impares?
   d) Si n^2 es par, también lo es n. Si $a^2 = 2b^2$, siendo a y b enteros, entonces a y b son ambos pares.
   e) Todo número racional puede expresarse en la forma a/b, donde a y b son enteros, uno de los cuales por lo menos es impar.
11. Demostrar que no existe número racional cuyo cuadrado sea 2.

   [*Indicación.* Utilizar el razonamiento de reducción al absurdo. Supóngase $(a/b)^2 = 2$, siendo a y b enteros, uno de ellos por lo menos impar. Utilizar partes del Ejercicio 10.]

12. La propiedad arquimediana del sistema de números reales se dedujo como consecuencia del axioma del extremo superior. Demostrar que el conjunto de los números racionales satisface la propiedad arquimediana pero no la del extremo superior. Esto demuestra que la propiedad arquimediana no implica el axioma del extremo superior.

*I 3.13 Existencia de raíces cuadradas de los números reales no negativos

Se ha visto anteriormente que la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución entre los números racionales. Con auxilio del axioma 10 se puede demostrar que la ecuación $x^2 = a$ tiene solución entre los números *reales* si $a \geq 0$. Tal x se denomina *raíz cuadrada de a.*

En primer lugar, sin tener en cuenta el axioma 10, se pueden hacer las siguientes consideraciones. Los números negativos no pueden tener raíces cuadradas, pues si $x^2 = a$, al ser a un cuadrado ha de ser no negativo (en virtud del teorema I.20). Además, si $a = 0$, $x = 0$ es la única raíz cuadrada (por el teorema I.11). 'upóngase, pues, $a > 0$. Si $x^2 = a$ entonces $x \neq 0$ y $(-x)^2 = a$, por tanto, x y

su opuesto son ambos raíces cuadradas. Pero *a lo sumo* tiene *dos,* porque si $x^2 = a$ e $y^2 = a$, entonces $x^2 = y^2$ y $(x + y)(x - y) = 0$, y en virtud del teorema I.11, o $x = y$ o $x = -y$. Por tanto, si a tiene raíces cuadradas, tiene *exactamente dos.*

La existencia de una raíz cuadrada por lo menos se deducirá posteriormente de un teorema importante de Cálculo, conocido por el teorema del valor intermedio para las funciones continuas, pero es instructivo ver como la existencia de la raíz cuadrada se puede probar directamente a partir del axioma 10.

TEOREMA I.35. *Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única.*

Nota: Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$. Si $a > 0$, la raíz cuadrada negativa es $-a^{1/2}$ o $-\sqrt{a}$.

Demostración. Si $a = 0$, entonces 0 es la única raíz cuadrada. Supóngase pues que $a > 0$. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos x tales que $x^2 \leq a$. Puesto que $(1 + a)^2 > a$, el número $(1 + a)$ es una cota superior de S. Pero, S es no vacío, pues $a/(1 + a)$ pertenece a S; en efecto $a^2 \leq a(1 + a)^2$ y por tanto $a^2/(1 + a)^2 \leq a$. En virtud del axioma 10, S tiene un extremo superior que se designa por b. Nótese que $b \geq a/(1 + a)$ y por tanto $b > 0$. Existen sólo tres posibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$, $b^2 = a$.

Supóngase $b^2 > a$ y sea $c = b - (b^2 - a)/(2b) = \frac{1}{2}(b + a/b)$. Entonces $0 < c < b$ y $c^2 = b^2 - (b^2 - a) + (b^2 - a)^2/(4b^2) = a + (b^2 - a)^2/(4b^2) > a$. Por tanto, $c^2 > x^2$ para cada x en S, es decir, $c > x$ para cada x en S; luego c es una cota superior de S, y puesto que $c < b$ se tiene una contradicción con el hecho de ser b el *extremo superior* de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 > a$ es imposible.

Supóngase $b^2 < a$. Puesto que $b > 0$ se puede elegir un número positivo c tal que $c < b$ y tal que $c < (a - b^2)/(3b)$. Se tiene entonces:

$$(b + c)^2 = b^2 + c(2b + c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a - b^2) = a\,.$$

Es decir, $b + c$ pertenece a S. Como $b + c > b$, esta desigualdad está en contradicción con que b sea una cota superior de S. Por tanto, la desigualdad $b^2 < a$ es imposible y sólo queda como posible $b^2 = a$.

*I 3.14 Raíces de orden superior. Potencias racionales

El axioma del extremo superior se puede utilizar también para probar la existencia de raíces de orden superior. Por ejemplo, si n es un entero positivo

impar, para cada real x existe un número real y, y uno solo tal que $y^n = x$. Esta y se denomina *raíz n-sima* de x y se indica por:

(I.15) $$y = x^{1/n} \quad \text{o} \quad y = \sqrt[n]{x}\,.$$

Si n es *par*, la situación es un poco distinta. En este caso, si x es negativo, no existe un número real y tal que $y^n = x$, puesto que $y^n \geq 0$ para cada número real y. Sin embargo, si x es positivo, se puede probar que existe un número positivo y sólo uno tal que $y^n = x$. Este y se denomina la *raíz n-sima positiva* de x y se indica por los símbolos (I.15). Puesto que n es par, $(-y)^n = y^n$ y, por tanto, cada $x > 0$ tiene dos raíces *n-simas* reales, y y $-y$. Sin embargo, los símbolos $x^{1/n}$ y $\sqrt[n]{x}$ se reservan para la raíz *n-sima* positiva. No exponemos aquí las demostraciones de estas afirmaciones porque se deducirán más adelante como consecuencia del teorema del valor intermedio para las funciones continuas (ver Sección 3.10).

Si r es un número racional positivo, sea $r = m/n$, donde m y n son enteros positivos, se define x^r como $(x^m)^{1/n}$, es decir como raíz *n-sima* de x^m, siempre que ésta exista. Si $x \neq 0$, se define $x^{-r} = 1/x^r$ con tal que x^r esté definida. Partiendo de esas definiciones, es fácil comprobar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para exponentes racionales: $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$, y $(xy)^r = x^r y^r$.

*I 3.15 Representación de los números reales por medio de decimales

Un número real de la forma

(I.16) $$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\,,$$

donde a_0 es un entero no negativo, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9$, se escribe corrientemente en la forma más breve siguiente:

$$r = a_0.a_1a_2 \cdots a_n\,.$$

Se dice que ésta es la *representación decimal finita* de r. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5\,, \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0{,}02\,, \qquad \frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7{,}25\,.$$

Números reales de esta clase son necesariamente racionales y todos ellos son de la forma $r = a/10^n$ donde a es un entero. Sin embargo, no todos los números racionales pueden expresarse por medio de una representación decimal finita. Por ejemplo, si $\frac{1}{3}$ se pudiera expresar así, se tendría $\frac{1}{3} = a/10^n$ o $3a = 10^n$ para

algún entero a. Pero esto es imposible, puesto que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10.

No obstante, cualquier número real $x > 0$ puede aproximarse con un error tan pequeño como se desee por medio de una suma de la forma (I.16) si se toma n suficientemente grande. La razón de ello puede verse mediante el siguiente argumento geométrico: si x no es entero, x está comprendido entre dos enteros consecutivos, es decir, $a_0 < x < a_0 + 1$. El segmento que une a_0 y $a_0 + 1$ puede subdividirse en diez partes iguales. Si x no coincide con uno de estos puntos de subdivisión, x debe estar comprendido entre dos de ellos. Esto da lugar a un par de desigualdades de la forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},$$

donde a_1 es un entero $(0 \leq a_1 \leq 9)$. Se divide ahora, el segmento que une $a_0 + \dfrac{a_1}{10}$ y $a_0 + \dfrac{a_1 + 1}{10}$ en diez partes iguales (cada una de longitud 10^{-2}) y se continúa el proceso. Si después de un número finito de subdivisiones, uno de los puntos coincide con x, x es un número de la forma (I.16). Si no es así, el proceso se continúa indefinidamente y se engendra un conjunto de infinitos enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ En este caso se dice que x tiene la representación decimal infinita

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots .$$

Después de n subdivisiones, x satisface las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} .$$

las cuales dan dos aproximaciones de x, una por exceso y otra por defecto, por medio de decimales finitos que difieren en 10^{-n}. Por tanto, se puede lograr un grado de aproximación deseado sin más que tomar n suficientemente grande.

Si $x = \frac{1}{3}$, es fácil comprobar que $a_0 = 0$ y $a_n = 3$ para cada $n \geq 1$, y por tanto la aproximación decimal correspondiente es:

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}333 \cdots .$$

Cada número irracional tiene una representación decimal infinita. Por ejemplo, si $x = \sqrt{2}$ se pueden calcular por tanteo tanto dígitos como se deseen de su aproximación decimal. Pues $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1,4 y 1,5 ya que $(1{,}4)^2 <$

$2 < (1{,}5)^2$. Análogamente, elevando al cuadrado y comparando con 2 se obtienen las siguientes aproximaciones sucesivas:

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42\,, \qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\,, \qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143\,.$$

Obsérvese que el proceso anterior engendra una sucesión de intervalos de longitud 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., cada uno contenido en el anterior y conteniendo cada uno el punto x. Esto es un ejemplo del llamado encaje de intervalos, concepto que se utiliza algunas veces como base para construir los números irracionales a partir de los racionales.

Puesto que en este libro se hará poco uso de los decimales, no se estudiarán sus propiedades con todo detalle, y sólo se verá cómo se pueden definir analíticamente expresiones decimales, con auxilio del axioma del extremo superior.

Si x es un número real positivo dado, sea a_0 el mayor entero $\leq x$. Tomado a_0, sea a_1 el mayor entero tal que:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x\,.$$

En general, determinados a_0, a_1, ..., a_{n-1}, sea a_n el mayor entero tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x\,. \tag{I.17}$$

Sea S el conjunto de todos los números:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \tag{I.18}$$

obtenidos de esta forma para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Puesto que S es no vacío y acotado superiormente, tiene un extremo superior que es fácil comprobar que coincide con x. Los enteros a_0, a_1, a_2, ... así obtenidos se pueden utilizar para definir una expresión decimal de x, poniendo:

$$x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$$

donde el dígito a_n que ocupa el lugar n es el mayor entero que satisface (I.17). Por tanto, se puede escribir:

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125000\cdots.$$

Si en (I.17) se sustituye el signo de desigualdad $\leq$ por $<$, se obtiene una definición de la expresión decimal algo distinta. El extremo superior de todos

los números de la forma (I.18) es también x; sin embargo, los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ no han de ser necesariamente los mismos que satisfacen (I.17). Por ejemplo, si se aplica la segunda definición a $x = \frac{1}{8}$, se encuentra $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, y $a_n = 9$ para cada $n \geq 4$. Esto conduce a la representación decimal infinita

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}124999 \cdots .$$

El que dos números reales puedan tener dos representaciones decimales distintas es un simple ejemplo del hecho de que dos conjuntos distintos de números reales pueden tener un mismo extremo superior.

Parte IV. - Inducción matemática, símbolos sumatorios y cuestiones relacionadas

I 4.1 Ejemplo de demostración por inducción matemática

Puesto que sumando 1 al entero k se obtiene $k + 1$ que es mayor que k, no existe ningún entero que sea el *mayor de todos*. Sin embargo, partiendo del número 1, se pueden alcanzar todos los enteros positivos, después de un número finito de pasos, pasando sucesivamente de k a $k + 1$. Ésta es la base de un método de razonamiento que los matemáticos llaman *demostración por inducción*. Se ilustrará la aplicación de este método, demostrando el par de desigualdades usadas en el apartado I 1.3 para el cálculo del área del segmento parabólico, es decir:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2. \tag{I.19}$$

En primer lugar, se considera la desigualdad de la izquierda, fórmula que abreviadamente se indicará por $A(n)$ (afirmación referida a n). Es fácil comprobar esta afirmación directamente para los primeros valores de n. Pues para $n = 1, 2, 3$, por ejemplo, se tiene:

$$A(1)\colon 0 < \frac{1^3}{3}, \qquad A(2)\colon 1^2 < \frac{2^3}{3}, \qquad A(3)\colon 1^2 + 2^2 < \frac{3^3}{3},$$

supuesto que se interpreta que la suma del primer miembro es 0 cuando $n = 1$.

Se trata de probar que $A(n)$ es cierta para cada entero positivo n. Se procede como sigue: se supone que la afirmación se ha probado para un valor particular de n, sea $n = k$. Es decir, se supone que se ha probado

$$A(k)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 < \frac{k^3}{3}$$

para $k \geq 1$ fijo. *Partiendo de ello* se ha de deducir que se verifica para $k + 1$, es decir:

$$A(k+1)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}.$$

Sumando k^2 a los dos miembros de $A(k)$ (que se supone que se ha probado) se obtiene la desigualdad

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < \frac{k^3}{3} + k^2.$$

y para deducir como consecuencia de ella la $A(k + 1)$, basta demostrar

$$\frac{k^3}{3} + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}.$$

Pero esto es consecuencia inmediata de la igualdad:

$$\frac{(k+1)^3}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} = \frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3}.$$

Por tanto, se ha demostrado $A(k + 1)$ como consecuencia de $A(k)$. Puesto que $A(1)$ se ha comprobado directamente, se sigue que también $A(2)$ es cierto. Sabiendo que $A(2)$ es cierto, se sigue que también lo es $A(3)$, y así sucesivamente. Puesto que cada entero puede alcanzarse por este proceso, $A(n)$ es cierto para todo valor de n. Esto demuestra la desigualdad a la izquierda en (I.19). La desigualdad a la derecha puede demostrarse del mismo modo.

I 4.2 El principio de la inducción matemática

Reflexione el lector sobre el *esquema* de la demostración anterior. Primero se comprueba la afirmación $A(n)$ para $n = 1$. Luego se prueba que *si* la afirmación es cierta para un entero particular, *también* es cierta para el entero siguiente. De esto se concluye que la afirmación es cierta para todos los enteros positivos.

La idea de inducción se puede ilustrar de muchas maneras *no* matemáticas. Por ejemplo, supóngase una fila de soldados de plomo numerados consecutivamente, y dispuestos de tal forma que si uno de ellos cae, por ejemplo, el señalado con el símbolo k, choca con el siguiente señalado con el símbolo $k + 1$. En seguida se intuye lo que ocurrirá si el soldado número 1 se hace caer hacia atrás. También es claro que si fuera empujado hacia atrás un soldado que no fuera el primero, por ejemplo, el señalado con n_1, todos los soldados posteriores *a él* caerían. Este ejemplo ilustra una ligera generalización del método de inducción que puede expresarse en la forma siguiente.

Método de demostración por inducción. Sea $A(n)$ una afirmación que contiene el entero n. Se puede concluir que $A(n)$ es verdadero para cada $n \geq n_1$ si es posible:

a) Probar que $A(n_1)$ es cierta.

b) Probar, que supuesta $A(k)$ verdadera, siendo k un entero arbitrario pero fijado $\geq n_1$, que $A(k + 1)$ es verdadera.

En la práctica, n_1 es generalmente igual a 1. La justificación de este método de demostración es el siguiente teorema relativo a números reales.

TEOREMA I.36. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA. *Sea S un conjunto de enteros positivos que tienen las dos propiedades siguientes*:

a) *El número* 1 *pertenece al conjunto S.*

b) *Si un entero k pertenece a S, también $k + 1$ pertenece a S.*

Entonces todo entero positivo pertenece al conjunto S.

Demostración. Las propiedades a) y b) nos dicen que S es un conjunto inductivo. (Véase la Sección I 3.6.) Por consiguiente S contiene cualquier entero positivo.

Cuando se efectúa la demostración de una afirmación $A(n)$ para todo $n \geq 1$ por inducción matemática, se aplica el teorema I.36 al conjunto S formado por todos los enteros para los cuales la afirmación $A(n)$ es cierta. Si se desea probar que $A(n)$ es cierta sólo para todo $n \geq n_1$, entonces se aplica el teorema I.31 al conjunto de los números n para los cuales es cierta $A(n + n_1 - 1)$.

*I 4.3 El principio de buena ordenación

Hay otra propiedad importante de los enteros positivos, llamada principio de buena ordenación, que se utiliza también como base para demostraciones por inducción. Puede formularse como sigue.

TEOREMA I.37. PRINCIPIO DE BUENA ORDENACIÓN. *Todo conjunto no vacío de enteros positivos contiene uno que es el menor.*

Obsérvese que el principio de buena ordenación se refiere a conjuntos de enteros *positivos*. El teorema no es cierto para cualquier conjunto de enteros. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros no tiene uno que sea el menor.

El principio de buena ordenación puede deducirse a partir del principio de inducción. Esto se demuestra en la Sección I 4.5. Concluimos esta Sección con un ejemplo en el que se muestra cómo se puede aplicar el principio de buena ordenación para probar teoremas referentes a enteros positivos.

Sea $A(n)$ la siguiente igualdad:

$$A(n)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Se observa que $A(1)$ es cierta, puesto que

$$1^2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}.$$

Se tienen, pues, dos posibilidades. O bien:

(i) $A(n)$ es cierta para cada entero positivo n, o

(ii) existe por lo menos un entero positivo n para el que $A(n)$ es falsa.

Se trata de probar que si se supone la (ii), se llega a una contradicción. En virtud del principio de buena ordenación existirá un entero positivo k, que será el *menor* entero positivo para el cual $A(n)$ es falsa. k ha de ser mayor que 1 puesto que se ha visto que $A(1)$ es verdadera. Por tanto, la igualdad ha de ser cierta para $k - 1$ ya que k es el menor entero para el cual $A(k)$ es falsa. Se puede, pues, escribir:

$$A(k-1)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)^3}{3} + \frac{(k-1)^2}{2} + \frac{k-1}{6}.$$

Sumando k^2 a los dos miembros y simplificando el de la derecha, se tiene:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}.$$

Pero esta igualdad prueba que $A(k)$ es cierta; con lo cual se llega a una contradicción pues k era un entero para el cual $A(k)$ era falsa. Como la proposición (ii) conduce a una contradicción, se verifica la (i), lo que prueba que la identidad en cuestión es válida para todos los valores de $n \geq 1$. Una consecuencia de esta identidad es la desigualdad de la derecha en (I.19).

Toda demostración en la que, como aquí, se hace uso del principio de buena ordenación, se puede sustituir por una demostración por inducción. Por supuesto, que se podía haber hecho la demostración en la forma acostumbrada, comprobando la $A(1)$, para después pasar de la $A(k)$ a la $A(k+1)$.

I 4.4 Ejercicios

1. Demostrar por inducción las fórmulas siguientes:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

(d) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

2. Obsérvese que

$$1 = 1\,,$$
$$1 - 4 = -(1 + 2)\,,$$
$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3\,,$$
$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)\,.$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción.

3. Obsérvese que

$$1 + \tfrac{1}{2} = 2 - \tfrac{1}{2}\,,$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}\,,$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 2 - \tfrac{1}{8}\,.$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción.

4. Obsérvese que

$$1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,,$$
$$(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}\,,$$
$$(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4}\,.$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción.

5. Hallar la ley general que simplifica el producto

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

y demuéstrese por inducción

6. Sea $A(n)$ la proposición: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$.
   a) Probar que si $A(k)$ es cierta para un entero k, $A(k + 1)$ también es cierta.
   b) Critíquese la proposición «de la inducción se sigue que $A(n)$ es cierta para todo n».
   c) Transfórmese $A(n)$ cambiando la igualdad por una desigualdad que es cierta para todo entero positivo n.
7. Sea n_1 el menor entero positivo n para el que la desigualdad $(1+ x)^n > 1 + nx + nx^2$ es cierta para todo $x > 0$. Calcular n_1, y demostrar que la desigualdad es cierta para todos los enteros $n \geq n_1$.
8. Dados números reales positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tales que $a_n \leq ca_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, donde c es un número positivo fijo, aplíquese el método de inducción para demostrar que $a_n \leq a_1c^{n-1}$ para cada $n \geq 1$.
9. Demuéstrese por inducción la proposición siguiente: Dado un segmento de longitud unidad, el segmento de longitud $\sqrt{n}$ se puede construir con regla y compás para cada entero positivo n.
10. Sea b un entero positivo. Demostrar por inducción la proposición siguiente: Para cada entero $n \geq 0$ existen enteros no negativos q y r tales que:

$$n = qb + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

11. Sean n y d enteros. Se dice que d es un divisor de n si $n = cd$ para algún entero c. Un entero n se denomina *primo* si $n > 1$ y los únicos divisores de n son 1 y n. Demostrar por inducción que cada entero $n > 1$ es o primo o producto de primos.
12. Explíquese el error en la siguiente «demostración» por inducción.

Proposición. Dado un conjunto de n niñas rubias, si por lo menos una de las niñas tiene ojos azules, entonces las n niñas tienen ojos azules.

«*Demostración*». La proposición es evidentemente cierta si $n = 1$. El paso de k a $k + 1$ se puede ilustrar pasando de $n = 3$ a $n = 4$. Supóngase para ello que la proposición es cierta para $n = 3$ y sean G_1, G_2, G_3, G_4, cuatro niñas rubias tales que una de ellas, por lo menos, tenga ojos azules, por ejemplo, la G_1. Tomando G_1, G_2, G_3 conjuntamente y haciendo uso de la proposición cierta para $n = 3$, resulta que también G_2 y G_3 tienen ojos azules. Repitiendo el proceso con G_1, G_2 y G_4, se encuentra igualmente que G_4 tiene ojos azules. Es decir, las cuatro tienen ojos azules. Un razonamiento análogo permite el paso de k a $k + 1$ en general.

Corolario. Todas las niñas rubias tienen ojos azules.

Demostración. Puesto que efectivamente existe una niña rubia con ojos azules, se puede aplicar el resultado precedente al conjunto formado por todas las niñas rubias.

Nota: Este ejemplo es debido a G. Pólya, quien sugiere que el lector compruebe experimentalmente la validez de la proposición.

*I 4.5 Demostración del principio de buena ordenación

En esta Sección se deduce el principio de buena ordenación del de inducción. Sea T una colección no vacía de enteros positivos. Queremos demostrar que

T tiene un número que es el menor, esto es, que hay en T un entero positivo t_0 tal que $t_0 \leq t$ para todo t de T.

Supongamos que no fuera así. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. El entero 1 no puede pertenecer a T (de otro modo él sería el menor número de T). Designemos con S la colección de todos los enteros positivos n tales que $n < t$ para todo t de T. Por tanto 1 pertenece a S porque $1 < t$ para todo t de T. Seguidamente, sea k un entero positivo de S. Entonces $k < t$ para todo t de T. Demostraremos que $k + 1$ también es de S. Si no fuera así, entonces para un cierto t_1 de T tendríamos $t_1 \leq k + 1$. Puesto que T no posee número mínimo, hay un entero t_2 en T tal que $t_2 < t_1$, y por tanto $t_2 < k + 1$. Pero esto significa que $t_2 \leq k$, en contradicción con el hecho de que $k < t$ para todo t de T. Por tanto $k + 1$ pertenece a S. Según el principio de inducción, S contiene todos los enteros positivos. Puesto que T es no vacío, existe un entero positivo t en T. Pero este t debe ser también de S (ya que S contiene todos los enteros positivos). De la definición de S resulta que $t < t$, lo cual es absurdo. Por consiguiente, la hipótesis de que T no posee un número mínimo nos lleva a una contradicción. Resulta pues que T debe tener un número mínimo, y a su vez esto prueba que el principio de buena ordenación es una consecuencia del de inducción.

I 4.6 El símbolo sumatorio

En el cálculo del área de un segmento parabólico, aparece la suma

(I.20) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 .$$

Obsérvese que el término general de esta suma es de la forma k^2 y se obtiene cada uno de los sumandos dando a k los valores $1, 2, 3, \ldots, n$. Existe un símbolo muy útil y conveniente que permite escribir sumas en forma abreviada denominado *símbolo sumatorio* y que consiste en la letra griega $\sum$. Utilizando el símbolo sumatorio se puede escribir la suma (I.20) como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Este símbolo se lee: «Suma de k^2 desde 1 hasta n». El convenio es que los números que aparecen encima y debajo de $\sum$ indican el recorrido de los valores de k. La letra k se considera como el *índice de sumación*. Es evidente que no es necesario utilizar precisamente la letra k, sino que se puede tomar en su lugar otra letra cualquiera. Por ejemplo, en vez de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ se puede escribir $\sum_{i=1}^{n} i^2$, $\sum_{j=1}^{n} j^2$, $\sum_{m=1}^{n} m^2$, etc., todas las cuales son distintas notaciones para una misma cosa. Las letras i, j, k, m, etc., que se utilizan al efecto, se denominan *índices*. No sería acertado utilizar la letra n para el índice en este ejemplo particular, pues n indica ya el número de términos.

Más general, cuando se desea formar la suma de ciertos números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

(I.21) $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

utilizando el símbolo sumatorio se escribe abreviadamente:

(I.22) $$\sum_{k=1}^{n} a_k \, .$$

Por ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \, .$$

Algunas veces es conveniente empezar la sumación por el 0 o por algún valor del índice diferente de 1. Por ejemplo, se tiene:

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \, ,$$

$$\sum_{n=2}^{5} n^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

Otras formas de utilizar el símbolo de sumación, se indican a continuación:

$$\sum_{m=0}^{4} x^{m+1} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$$

$$\sum_{j=1}^{6} 2^{j-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Para poner de manifiesto una vez más que la elección del índice carece de importancia, se observa que la última suma se puede escribir en cada una de las formas siguientes.

$$\sum_{q=1}^{6} 2^{q-1} = \sum_{r=0}^{5} 2^r = \sum_{n=0}^{5} 2^{5-n} = \sum_{k=1}^{6} 2^{6-k}.$$

Nota: Desde un punto de vista estrictamente lógico, los símbolos en (I.21) y (I.22) no se encuentran entre los axiomas del sistema de números reales, y por lo tanto desde un punto de vista riguroso, se tendrían que definir estos nuevos símbolos a partir de los símbolos primitivos del sistema considerado. Esto se consigue mediante una *definición por inducción,* la cual, como la demostración por inducción, consta de dos partes:

a) Se define

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 .$$

b) Supuesta definida $\sum_{k=1}^{n} a_k$ para un $n \geq 1$ fijo, se define:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} .$$

Por ejemplo, se puede tomar $n = 1$ en b) y hacer uso de a) para obtener:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = \sum_{k=1}^{1} a_k + a_2 = a_1 + a_2 .$$

Definida $\sum_{k=1}^{2} a_k$, se puede aplicar otra vez b) con $n = 2$ para obtener

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=1}^{2} a_k + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3 .$$

En virtud de la propiedad asociativa de la adición (axioma 2), la suma $(a_1 + a_2) + a_3$ es la misma que $a_1 + (a_2 + a_3)$ y, por tanto, se pueden suprimir los paréntesis sin peligro de confusión y escribir simplemente $a_1 + a_2 + a_3$ para $\sum_{k=1}^{3} a_k$. Análogamente:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_k + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 .$$

En este caso se puede *demostrar* que la suma $(a_1 + a_2 + a_3) + a_4$ es la misma que $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)$ y que $a_1 + (a_2 + a_3 + a_4)$, y por tanto se pueden suprimir los paréntesis también sin peligro de ambigüedad y escribir:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 .$$

Prosiguiendo así, se encuentra que a) y b) simultáneamente dan una definición completa del símbolo escrito en (I.22). Se considera que la notación (I.21) es más bien otra forma de escribir (I.22). Tal notación está justificada por la ley asociativa general de la adición, que aquí no se enunciará con más detalle ni demostrará.

Nótese que la *definición por inducción* y la *demostración por inducción* encierran la misma idea fundamental. Una definición por inducción se denomina también *definición por recurrencia.*

I 4.7 Ejercicios

1. Hallar los valores numéricos de las sumas siguientes:

(a) $\sum_{k=1}^{4} k$, (c) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$, (e) $\sum_{i=0}^{5} (2i+1)$,

(b) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$, (d) $\sum_{n=1}^{4} n^n$, (f) $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Establecer las siguientes propiedades del símbolo sumatorio.

(a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propiedad aditiva).

(b) $\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (propiedad homogénea).

(c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propiedad telescópica).

Utilícense las propiedades dadas en el Ejercicio 2, siempre que sea posible, para deducir las fórmulas en los Ejercicios del 3 al 8.

3. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$. (El sentido de esta suma es $\sum_{k=1}^{n} a_k$|, cuando $a_k = 1$.)

4. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$. [*Indicación.* $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$.]

5. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. [*Indicación.* Úsese el Ejercicio 3 y el 4].

6. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. [*Indicación.* $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$.]

7. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$.

8. a) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ si $x \neq 1$. ***Nota:*** Por definición $x^0 = 1$.

[*Indicación.* Aplíquese el ejercicio 2 a $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$.]

b) ¿Cuál es la suma cuando $x = 1$?

9. Demostrar por inducción, que la suma $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1)$ es proporcional a n, y hallar la constante de proporcionalidad.

10. a) Dar una definición razonable del símbolo $\sum_{k=m}^{m+n} a_k$.

b) Demostrar por inducción que para $n \geq 1$ se tiene

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

11. Determinar si cada una de las igualdades siguientes es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.

(a) $\sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4$.

(b) $\sum_{j=0}^{100} 2 = 200$.

(c) $\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k$.

(d) $\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$.

(e) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2\right)$.

(f) $\sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k\right)^3$.

12. Inducir y demostrar una regla general que simplifique la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

13. Demostrar que $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ si $n \geq 1$. Utilícese luego este resultado para demostrar que

$$2\sqrt{m} - 2 < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m} - 1$$

si $m \geq 2$. En particular, cuando $m = 10^6$, la suma está comprendida entre 1998 y 1999.

I 4.8 Valor absoluto y desigualdad triangular

Es frecuente en el cálculo el tener que operar con desigualdades. Son de particular importancia las que se relacionan con la noción de *valor absoluto.*

Si x es un número real, el valor absoluto de x es un número real no negativo que se designa por $|x|$ y se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0\,, \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Obsérvese que $-|x| \leq x \leq |x|$. Si los números reales están representados geométricamente en el eje real, el número $|x|$ se denomina distancia de x a 0. Si $a > 0$ y si un punto x está situado entre $-a$ y a entonces $|x|$ está más próximo a 0 que a. La expresión analítica de este hecho, está dada por el siguiente teorema:

TEOREMA I.38. *Si $a \geq 0$, es $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.*

Demostración. Hay que probar dos cuestiones: primero, que la desigualdad $|x| \leq a$ implica las dos desigualdades $-a \leq x \leq a$ y recíprocamente, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.

Supuesto $|x| \leq a$ se tiene también $-a \leq -|x|$. Pero o $x = |x|$ o $x = -|x|$ y, por tanto, $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$, lo cual prueba la primera parte del teorema.

Para probar el recíproco, supóngase $-a \leq x \leq a$. Si $x \geq 0$ se tiene $|x| = x \leq a$; si por el contrario es $x \leq 0$, entonces $|x| = -x \leq a$. En ambos casos se tiene $|x| \leq a$, lo que demuestra el teorema.

La figura I.9. ilustra el significado geométrico de este teorema.

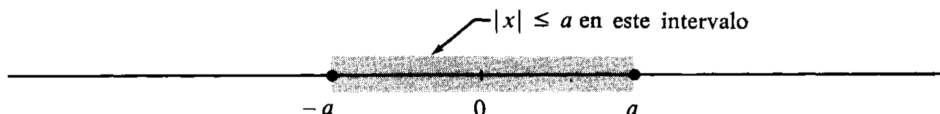


FIGURA I.9 *Significado geométrico del teorema* I.38.

Consecuencia del teorema I.38, es una desigualdad importante que expresa que el valor absoluto de la suma de dos números reales no puede exceder a la suma de sus vaores absolutos.

TEOREMA I.39. *Para x e y números reales cualesquiera se tiene*

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

Nota: Esta propiedad se denomina *desigualdad triangular*, pues cuando se generaliza a vectores, indica que la longitud de cada lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos.

Demostración. Puesto que $x = |x|$ o $x = -|x|$, se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas desigualdades se tiene:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

y por tanto, en virtud del teorema I.38 se concluye que: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Tomando $x = a - c$, e $y = c - b$, es $x + y = a - b$ y la desigualdad triangular toma la forma:

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c|.$$

Esta forma de la desigualdad triangular se utiliza frecuentemente en la práctica.

Por inducción matemática, se puede extender la desigualdad triangular tal como sigue:

TEOREMA I.40. *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Demostración. Para $n = 1$ la desigualdad es trivial y para $n = 2$ es la desigualdad triangular. Supuesta cierta para n números reales, para $n + 1$ números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ se tiene:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|.$$

Por tanto, el teorema es cierto para $n + 1$ números si lo es para n; luego, en virtud del principio de inducción, es cierto para todo entero positivo n.

El teorema que sigue consiste en una desigualdad importante que se utilizará más adelante en Álgebra vectorial.

TEOREMA I.41. DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ. *Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera, se tiene*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{I.23}$$

El signo de igualdad es válido si y sólo si hay un número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada valor de $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Para todo real x se tiene $\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$ porque una suma de cuadrados nunca es negativa. Esto se puede poner en la forma

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0 , \tag{I.24}$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 , \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k , \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

Queremos demostrar que $B^2 \leq AC$. Si $A = 0$, cada $a_k = 0$, con lo que $B = 0$ y el resultado es trivial. Si $A \neq 0$, podemos completar el cuadrado y escribir

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} .$$

El segundo miembro alcanza su valor mínimo cuando $x = -B/A$. Poniendo $x = -B/A$ en (I.24), obtenemos $B^2 \leq AC$. Esto demuestra (I.23). El lector debe comprobar que el signo de igualdad es válido si y sólo si existe un x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada k.

I 4.9 Ejercicios

1. Probar cada una de las siguientes propiedades del valor absoluto.

(a) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
(b) $|-x| = |x|$.
(c) $|x - y| = |y - x|$.
(d) $|x|^2 = x^2$.
(e) $|x| = \sqrt{x^2}$.
(f) $|xy| = |x|\,|y|$.
(g) $|x/y| = |x|/|y|$ si $y \neq 0$.
(h) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
(i) $|x| - |y| \leq |x - y|$.
(j) $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.

2. Cada desigualdad (a_i), de las escritas a continuación, equivale exactamente a una desigualdad (b_j). Por ejemplo, $|x| < 3$ si y sólo si $-3 < x < 3$ y por tanto (a_1) es equivalente a (b_2). Determinar todos los pares equivalentes.

(a_1) $|x| < 3$.
(a_2) $|x - 1| < 3$.
(a_3) $|3 - 2x| < 1$.
(a_4) $|1 + 2x| \leq 1$.
(a_5) $|x - 1| > 2$.
(a_6) $|x + 2| \geq 5$.
(a_7) $|5 - x^{-1}| < 1$.
(a_8) $|x - 5| < |x + 1|$.
(a_9) $|x^2 - 2| \leq 1$.
(a_{10}) $x < x^2 - 12 < 4x$.

(b_1) $4 < x < 6$.
(b_2) $-3 < x < 3$.
(b_3) $x > 3$ o $x < -1$.
(b_4) $x > 2$.
(b_5) $-2 < x < 4$.
(b_6) $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ o $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.
(b_7) $1 < x < 2$.
(b_8) $x \leq -7$ o $x \geq 3$.
(b_9) $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$.
(b_{10}) $-1 \leq x \leq 0$.

3. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.
   (a) $x < 5$ implica $|x| < 5$.
   (b) $|x - 5| < 2$ implica $3 < x < 7$.
   (c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x \geq -\frac{2}{3}$.
   (d) No existe número real x para el que $|x - 1| = |x - 2|$.
   (e) Para todo $x > 0$ existe un $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.
4. Demostrar que el signo de igualdad es válido en la desigualdad de Cauchy-Schwarz si y sólo si existe un número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

*I 4.10 Ejercicios varios referentes al método de inducción

En este apartado se reúnen un conjunto de resultados diversos cuyas demostraciones son buenos ejercicios de aplicación del método de inducción. Algunos de estos ejercicios pueden servir de base de discusión y estudio entre los alumnos y el profesor.

Coeficiente factorial y binomial. El símbolo $n!$ (que se lee *n factorial*) se puede definir por inducción como sigue: $0! = 1$, $n! = (n-1)!\,n$ si $n \geq 1$.
Obsérvese que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Si $0 \leq k \leq n$ el *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ se define por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Nota: Algunas veces se escribe ${}_nC_k$ en vez de $\binom{n}{k}$. Estos números aparecen como coeficientes en la fórmula de la potencia del binomio. (Véase el Ejercicio 4 siguiente.)

1. Calcúlense los valores de los siguientes coeficientes binomiales:

   (a) $\binom{5}{3}$, (b) $\binom{7}{0}$, (c) $\binom{7}{1}$, (d) $\binom{7}{2}$, (e) $\binom{17}{14}$, (f) $\binom{0}{0}$.

2. (a) Demostrar que: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

   (b) Sabiendo que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$ calcular n.

   (c) Sabiendo que $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$ calcular k.

   (d) ¿Existe un k tal que $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?

3. Demostrar que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Esta propiedad se denomina *fórmula aditiva* de los coeficientes combinatorios o *ley del triángulo de Pascal* y proporciona un método rápido para calcular sucesivamente los coeficientes binomiales. A continuación se da el triángulo de Pascal para $n \leq 6$.

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

4. Demuéstrese por inducción la fórmula de la potencia del binomio:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Y utilícese el teorema para deducir las fórmulas:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \qquad \text{si} \quad n > 0.$$

Símbolo producto. El producto de n números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se indica por el símbolo $\prod_{k=1}^{n} a_k$, que se puede definir por inducción. El símbolo $a_1 a_2 \cdots a_n$ es otra forma de escribir este producto. Obsérvese que:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

5. Dar una definición por inducción del producto $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

Demostrar por inducción las siguientes propiedades de los productos:

6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ (propiedad multiplicativa).

Un caso importante es la relación: $\prod_{k=1}^{n} (c a_k) = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k$.

7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ si cada $a_k \neq 0$ (propiedad telescópica).

8. Si $x \neq 1$, demostrar que: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}$.

¿Cuál es el valor del producto cuando $x = 1$?

9. Si $a_k < b_k$ para cada valor de $k = 1, 2, \ldots, n$, es fácil demostrar por inducción $\sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Discutir la desigualdad correspondiente para productos:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} b_k.$$

Algunas desigualdades notables

10. Si $x > 1$, demostrar por inducción que $x^n > x$ para cada $n \geq 2$. Si $0 < x < 1$, demostrar que $x^n < x$ para cada $n \geq 2$.
11. Determínense todos los enteros positivos n para los cuales $2^n < n!$
12. (a) Con el teorema del binomio demostrar que para n entero positivo se tiene

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)\right\}.$$

(b) Si $n > 1$, aplíquese la parte (a) y el Ejercicio 11 para deducir las desigualdades

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$$

13. (a) Sea p un entero positivo. Demostrar que:

$$b^p - a^p = (b - a)(b^{p-1} + b^{p-2}a + b^{p-3}a^2 + \cdots + ba^{p-2} + a^{p-1}).$$

[*Indicación.* Aplíquese la propiedad telescópica para las sumas.]

(b) Si p y n son enteros positivos, demostrar que

$$n^p < \frac{(n + 1)^{p+1} - n^{p+1}}{p + 1} < (n + 1)^p ;$$

Aplicando el apartado (a)

(c) Demuéstrese por inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p + 1} < \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

El apartado (b) ayudará a pasar en la inducción de n a $n + 1$.
14. Sean $a_1, \ldots, a_n$ n números reales, todos del mismo signo y todos mayores que -1. Aplicar el método de inducción para demostrar que:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

En particular, cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x$, donde $x > -1$, se transforma en:

(I.25) $$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \textit{(desigualdad de Bernoulli)}.$$

Probar que si $n > 1$ el signo de igualdad se presenta en (I.25) sólo para $x = 0$.

15. Si $n \geq 2$, demostrar que $n!/n^n \leq (\frac{1}{2})^k$, siendo k la parte entera de $n/2$.
16. Los números 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... tales que cada uno después del segundo es la suma de los dos anteriores, se denominan *números de Fibonacci.* Se pueden definir por inducción como sigue:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad \text{si } n \geq 2.$$

Demostrar que

$$a_n < \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para cada $n \geq 1$.

Desigualdades que relacionan distintos tipos de promedios.
Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n números reales positivos. Si p es un entero no nulo, la *media de potencias p-ésimas* M_p se define como sigue:

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

El número M_1 se denomina *media aritmética,* M_2 *media cuadrática,* y M_{-1} *media armónica.*

17. Si $p > 0$ demostrar que $M_p < M_{2p}$ cuando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no son todos iguales.

[*Indicación.* Aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $a_k = x_k^p$ y $b_k = 1$.]

18. Aplíquese el resultado del Ejercicio 17 para demostrar que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \tfrac{64}{3}$$

si $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ y $a > 0, b > 0, c > 0$.

19. Sean $a_1, \ldots, a_n$ n números reales positivos cuyo producto es igual a 1. Demostrar que $a_1 + \ldots + a_n \geq n$ y que el signo de igualdad se presenta sólo cuando cada $a_k = 1$.

[*Indicación.* Considérense dos casos: a) cada $a_k = 1$; b) no todo $a_k = 1$. Procédase por inducción. En el caso b) obsérvese que si $a_1a_2 \cdots a_{n+1} = 1$, entonces por lo menos un factor, por ejemplo a_1, es mayor que 1, y por lo menos un factor, sea a_{n+1}, es menor que 1. Hágase $b_1 = a_1a_{n+1}$ y aplíquese la hipótesis de inducción al producto $b_1a_2 \cdots a_n$, teniendo en cuenta que $(a_1 - 1)(a_{n+1} - 1) < 0$.]

20. La *media geométrica* G de n números reales positivos $x_1, \ldots, x_n$ está definida por la fórmula $G = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$.
(a) Desígnese con M_p la *media de potencias p-ésimas.* Demostrar que $G \leq M_1$ y que $G = M_1$ sólo cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
(b) Sean p y q enteros, $q < 0 < p$. A partir de (a) deducir que $M_q < G < M_p$ si $x_1, x_2 \ldots, x_n$ no son todos iguales.
21. Aplíquense los resultados del Ejercicio 20 para probar la siguiente proposición: Si a, b, y c son números reales y positivos tales que $abc = 8$, entonces $a + b + c \geq 6$ y $ab + ac + bc \geq 12$.
22. Si $x_1, \ldots, x_n$ son números positivos y si $y_k = 1/x_k$, demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \geq n^2 .$$

23. Si a, b, y c son positivos y si si $a + b + c = 1$, demostrar que $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq$
$\geq 8abc$.

1

LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO INTEGRAL

En este capítulo se expone la definición de integral y algunas de sus propiedades fundamentales. Para entender la definición, es necesario tener conocimiento del concepto de función; por ello se dedican algunas de las secciones que siguen a la explicación de este concepto y de otros relacionados con él.

1.1 Las ideas básicas de la Geometría cartesiana

Como se ha dicho anteriormente, una de las aplicaciones de la integral es la formulación del concepto de área. Ordinariamente no se habla del área en sí, sino del área *de algo*, lo que indica que se parte de ciertos objetos (regiones poligonales, regiones circulares, segmentos parabólicos, etc.), cuyas áreas se desean medir. Si se desea llegar a una definición de área aplicable a clases distintas de objetos, primeramente se deberá encontrar un camino efectivo para describir estos objetos.

El método más simple de precisar dichos objetos fue el de dibujarlos, tal como hicieron los griegos. Un camino mucho mejor fue sugerido por René Descartes (1596-1650) al establecer en 1637 la base de la Geometría analítica. La columna vertebral de la geometría de Descartes (conocida actualmente por *Geometría cartesiana* o *Geometria analítica*) es la idea de representar puntos por números. El método seguido para puntos del plano es el siguiente:

Se eligen dos rectas perpendiculares de referencia (llamadas *ejes coordenados*), uno horizontal (llamado eje de las x), y el otro vertical (el eje de las y). Su punto de intersección, se indica por 0 y se denomina *origen*. En el eje x a la derecha del 0 se elige convenientemente un punto, y su distancia al 0 se denomina *distancia unidad*. Las distancias verticales correspondientes al eje de las y se miden con la misma distancia unidad. Entonces, a cada punto del plano (llamado algunas veces plano xy) se le asigna un par de números, llamados sus *coordenadas*. Estas coordenadas representan las distancias del punto a los

ejes. En la figura 1.1 se dan algunos ejemplos. El punto de coordenadas (3, 2) está situado tres unidades a la derecha del eje y y dos unidades encima del eje x. El número 3 es la coordenada x del punto, y el 2 la coordenada y. Los puntos a la izquierda del eje y tienen la coordenada x negativa, los situados debajo del eje x, la coordenada y negativa. La coordenada x de un punto se denomina también su *abscisa,* y la y su *ordenada.*

Al dar un par de números tal como (a, b) representante de un punto, se conviene que la abscisa a, o coordenada x, se escribe en primer lugar. Por esto, el par (a, b) se considera como un *par ordenado.* Es claro que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) representan el mismo número si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Puntos (a, b) tales que a y b son ambos positivos se dice que están situados en el *primer cuadrante;* si $a < 0$ y $b > 0$ están en el *segundo cuadrante;* si $a < 0$ y $b < 0$ están en el *tercer cuadrante;* y si $a > 0$ y $b < 0$ están en el *cuarto cuadrante.* La figura 1.1 presenta un punto en cada cuadrante.

Para puntos del espacio se procede de forma análoga. Se toman tres rectas en el espacio perpendiculares entre sí y que se corten en un punto (el origen). Estas rectas determinan tres planos perpendiculares dos a dos, y cada punto del espacio puede ser determinado dando tres números, con los signos adecuados, que representan sus distancias a estos planos. De la Geometría cartesiana tridimensional se hablará con más detalle más adelante. De momento interesa la Geometría analítica plana.

Una figura geométrica, tal como una curva plana, es un conjunto de puntos que satisfacen a una o más condiciones. Traduciendo estas condiciones en expre-

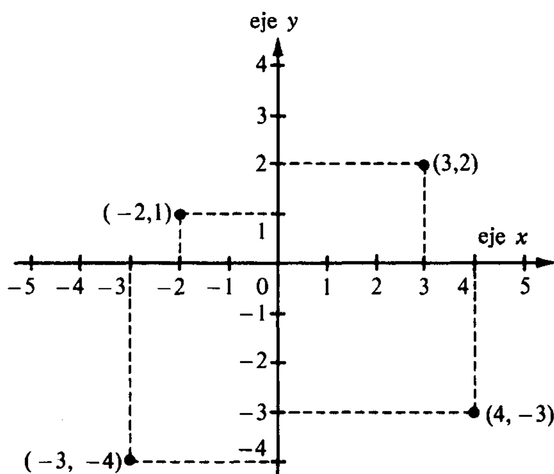


FIGURA 1.1

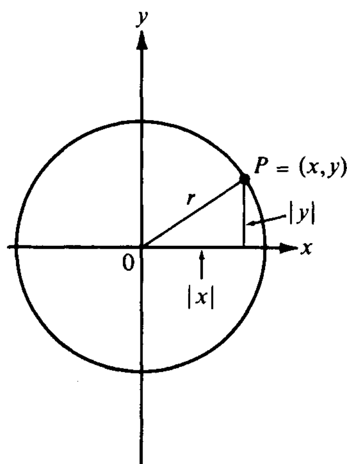


FIGURA 1.2 *La circunferencia representada por la ecuación cartesiana* $x^2 + y^2 = r^2$.

siones analíticas en las coordenadas x e y, se obtienen una o más ecuaciones que caracterizan la curva en cuestión. Por ejemplo, considérese que la curva es una circunferencia de radio r con centro en el origen, como se indica en la figura 1.2. Sea P un punto arbitrario de esta circunferencia, y supóngase que P tiene de coordenadas (x, y). Entonces, el segmento OP es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen de longitud $|x|$, e $|y|$ y por tanto en virtud del teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Esta ecuación se denomina la *ecuación cartesiana* de la circunferencia, y se satisface por las coordenadas de todos los puntos de la circunferencia y sólo por ellas, de manera que esta ecuación caracteriza completamente la circunferencia. Este ejemplo muestra cómo se aplica la Geometría analítica para reducir proposiciones geométricas sobre puntos a proposiciones analíticas con números reales.

Durante todo su desarrollo histórico, el Cálculo y la Geometría analítica han estado íntimamente ligados. Descubrimientos en uno de ellos han dado lugar a progresos en el otro. En este libro se irán tratando conjuntamente como en su desarrollo histórico, pero sin olvidar que el propósito inicial es introducir el Cálculo diferencial e integral. Los conceptos de Geometría analítica requeridos para ello, se irán exponiendo conforme se vayan necesitando. De momento, sólo se requieren pocos conceptos muy elementales de Geometría analítica plana para comprender los rudimentos de Cálculo. Para extender el alcance y las aplicaciones del Cálculo se necesita un estudio más profundo de la Geometría analítica, que se hará en los capítulos 5 y 6 usando los métodos del Cálculo vectorial. Mientras tanto, lo que se necesita de Geometría analítica es estar un poco familiarizado en el dibujo de las gráficas de las funciones.

1.2 Funciones. Ideas generales y ejemplos

En diversos campos de la actividad humana, se presentan relaciones que existen entre un conjunto de unos objetos y otro conjunto de otros objetos. Gráficas, cartogramas, curvas, tablas, fórmulas, encuestas en la opinión pública, etc. son familiares a todo aquel que lee los periódicos. En realidad se trata de puros artificios usados para describir relaciones especiales en forma cuantitativa. Los matemáticos consideran como *funciones* algunos tipos de estas relaciones. En esta Sección, se dan unas ideas generales del concepto de función. En la Sección 1.3 ofrecemos una definición rigurosa de función.

EJEMPLO 1. La fuerza F necesaria para estirar un muelle de acero una longitud x a partir de su longitud normal, es proporcional a x. Es decir $F = cx$, donde c es un número independiente de x, que es la constante del muelle. Esta

fórmula descubierta por Robert Hooke a mediados del siglo XVII se denomina la *ley de Hooke* y se dice que expresa la fuerza en función del alargamiento.

EJEMPLO 2. Se dice que el volumen de un cubo es función de la longitud de sus aristas. Si las aristas tienen de longitud x, el volumen está dado por la fórmula $V = x^3$.

EJEMPLO 3. Un *número primo* es todo entero $n > 1$ que no puede expresarse en la forma $n = ab$, donde a y b son enteros positivos ambos menores que n. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Dado un número real $x > 0$ es posible contar el número de números primos menores que x. Este número se dice que es una función de x, si bien no se conoce una fórmula algebraica sencilla para calcularlo (sin necesidad de contarlos) cuando se conoce x.

La palabra «función» fue introducida en Matemáticas por Leibniz, que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Más tarde se vio que la idea de función de Leibniz tenía un alcance muy reducido, y posteriormente el significado de la palabra función fue experimentando generalizaciones progresivas. Actualmente, la definición de función es esencialmente la siguiente: Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una *función* es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el *dominio* de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el *recorrido* de la función. (Éste puede ser todo el conjunto Y, pero no es necesario.)

Letras de los alfabetos español y griego, se utilizan frecuentemente para designar funciones. En particular se usan mucho las letras f, g, h, G, H, y φ. Si f es una función dada y x es un objeto de su dominio, la notación $f(x)$ se utiliza para designar el objeto que en el recorrido corresponde a x, en la función f, y se denomina el *valor de la función* f en x o la *imagen de* x *por* f. El símbolo $f(x)$ se lee, «f de x».

La idea de función se puede ilustrar esquemáticamente de muchas maneras. Por ejemplo, en la figura 1.3(a) los conjuntos X e Y son sendos conjuntos de puntos, y una flecha indica cómo se aparea un punto arbitrario x de X con su punto imagen $f(x)$ de Y. Otro esquema es el de la figura 1.3(b) donde la función f se imagina como una máquina en la cual los objetos del conjunto X se transforman para producir objetos del conjunto Y. Cuando un objeto x es transformado por la máquina, el resultado final es el objeto $f(x)$.

En Cálculo elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman *funciones de variable real* o más brevemente *funciones reales* y se pueden representar geométricamente mediante una gráfica en el plano xy. Se representa el dominio X en el eje x, y a partir de cada punto x

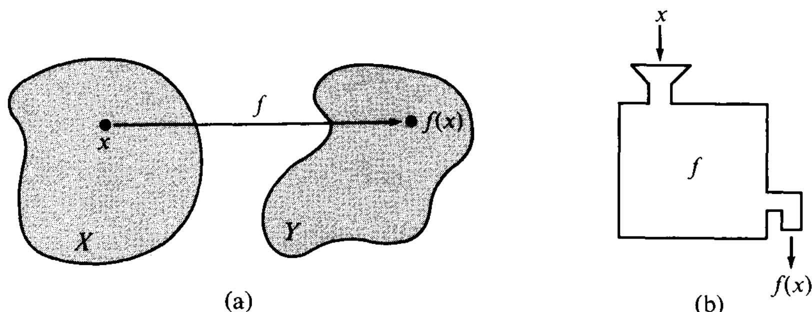


FIGURA 1.3 *Representación esquemática del concepto de función.*

de X se representa el punto (x, y) donde $y = f(x)$. La totalidad de puntos (x, y) se denomina la *gráfica* de la función.

A continuación consideramos otros ejemplos de funciones reales.

EJEMPLO 4. *La función identidad.* Supongamos que $f(x) = x$ para todo real x. Esta función con frecuencia se denomina la *función identidad.* Su dominio es el eje real, esto es, el conjunto de todos los números reales. Para cada punto (x, y) de la gráfica es $x = y$. La gráfica es una recta que forma ángulos iguales con los ejes coordenados (véase figura 1.4). El recorrido de f es el conjunto de todos los números reales.

EJEMPLO 5. *La función valor absoluto.* Consideremos la función que asigna a cada número real x el número no negativo $|x|$. Una parte de su gráfica está representada en la figura 1.5. Designando esta función con la letra φ, se

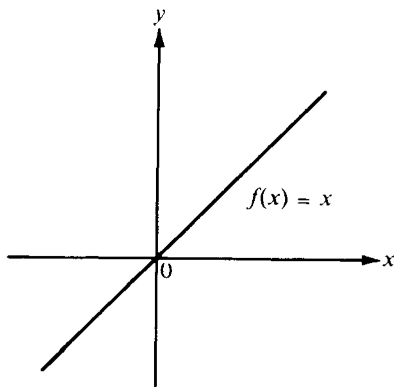


FIGURA 1.4 *Gráfica de la función identidad $f(x) = x$.*

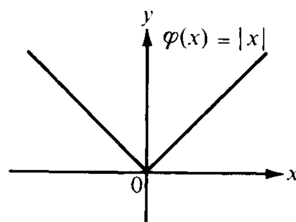


FIGURA 1.5 *Función valor absoluto $\varphi(x) = |x|$.*

tiene $\varphi(x) = |x|$ para todo real x. Por ejemplo, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(-3) = 3$. Con esta notación expresamos algunas propiedades de los valores absolutos.

(a) $\varphi(-x) = \varphi(x)$. (d) $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$.

(b) $\varphi(x^2) = x^2$. (e) $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.

(c) $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ (desigualdad triangular).

EJEMPLO 6. *La función número primo.* Para cualquier $x > 0$, sea $\pi(x)$ el número de números primos menores o iguales a x. El dominio de π es el conjunto de los números reales positivos. Su recorrido es el conjunto de los enteros no negativos $\{0, 1, 2, \ldots\}$. En la figura 1.6 se representa una porción de la gráfica de π.

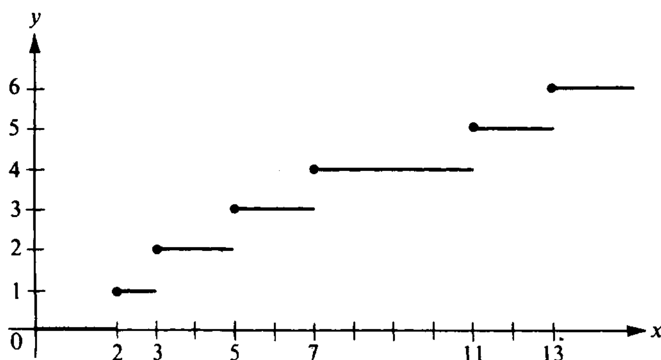


FIGURA 1.6 *La función número primo.*

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

FIGURA 1.7 *La función factorial.*

(En los ejes x e y se han usado escalas distintas.) Cuando x crece, el valor de la función $\pi(x)$ permanece constante hasta que x alcanza un número primo, en cuyo punto el valor de la función presenta un salto igual a 1. Por consiguiente la gráfica de π consiste en segmentos de recta horizontales. Éste es un ejemplo de una clase de funciones llamadas *funciones escalonadas;* éstas desempeñan un papel fundamental en la teoría de la integral.

EJEMPLO 7. *La función factorial.* Para todo entero positivo n, se define $f(n)$ como $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n$. En este ejemplo, el dominio de f es el conjunto de los enteros positivos. Los valores de la función crecen con tanta rapidez que es más conveniente presentar la función en forma tabular que mediante una gráfica. La figura 1.7 es una tabla de pares $(n, n!)$ para $n = 1, 2, \ldots, 10$.

El lector debería observar dos rasgos característicos que tienen en común todos los ejemplos anteriores.

(1) Para cada x del dominio X existe una y sólo una imagen y emparejada con aquel valor particular de x.

(2) Cada función engendra un conjunto de pares (x, y), siendo x un elemento genérico del dominio X, e y es el elemento único de Y que corresponde a x.

En la mayor parte de los ejemplos anteriores, se presentaron los pares (x, y) geométricamente como puntos sobre una gráfica. En el ejemplo 7 los presentamos como pares correspondientes en una tabla. En cada caso, conocer la función es conocer, en una u otra forma, *todos* los pares (x, y) que engendra. Esta sencilla observación es el origen de la definición del concepto de función que se expone en la sección siguiente.

*1.3 Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

En la Sección anterior, una función se describió como una correspondencia que asocia a cada objeto de un conjunto X uno y sólo un objeto de un conjunto Y. Las palabras «correspondencia» y «asocia a» puede que no tengan la misma significación para todo el mundo, de manera que reformularemos el concepto por un camino diferente, basándolo en el concepto de conjunto. Necesitamos primero la noción de *par ordenado* de objetos.

En la definición de igualdad de conjuntos, no se menciona el *orden* en el que aparecen los elementos. Así que, los conjuntos $\{2, 5\}$ y $\{5, 2\}$ son iguales porque constan exactamente de los mismos elementos. En ciertas ocasiones el orden *es* importante. Por ejemplo, en Geometría analítica plana las coordenadas (x, y) de un punto representan un par ordenado de números. El punto de coordenadas $(2, 5)$ no es el mismo que el de coordenadas $(5, 2)$, si bien los *conjuntos* $\{2, 5\}$ y $\{5, 2\}$ son iguales. Del mismo modo, si tenemos un par de objetos a y b (no necesariamente distintos) y deseamos distinguir uno de los objetos, por ejemplo a, como el *primer* elemento y el otro, b, como el *segundo*, encerramos los objetos en un paréntesis (a, b). Lo consideramos como un par ordenado. Decimos que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales. Esto es, se tiene

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \text{ y } b = d\,.$$

Vamos ahora a establecer la definición de función.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN. *Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.*

Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el *dominio* de f. El conjunto de los segundos elementos y se denomina *recorrido* de f, o conjunto de *valores* de f.

Intuitivamente, una función puede imaginarse como una tabla que consta de dos columnas. Cada entrada en la tabla es un par ordenado (x, y); la columna de la x es el dominio de f, y la de las y, el recorrido. Si dos entradas (x, y) y (x, z) aparecen en la tabla con el mismo valor de x, para que represente una función es necesario que $y = z$. Dicho de otro modo, una función no puede tomar dos valores distintos en un punto dado x. Por lo tanto, para todo x en el domino de f existe exactamente un y tal que $(x, y) \in f$. Ya que este y está determinado con unicidad una vez se conoce x, podemos introducir para él un símbolo especial. Es costumbre escribir

$$y = f(x)$$

en lugar de $(x, y) \in f$ para indicar que el par (x, y) pertenece al conjunto f.

Otra manera de describir una función f especificando los pares que contiene, y que es usualmente preferible, consiste en describir el dominio de f, y luego, para cada x del dominio, describir cómo se obtiene el valor de la función $f(x)$. En relación con esto, se tiene el teorema siguiente cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector.

TEOREMA 1.1. *Dos funciones f y g son iguales si y sólo si*
(a) *f y g tienen el mismo dominio, y*
(b) *$f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f.*

Conviene darse cuenta que los objetos x y $f(x)$ que aparecen en los pares ordenados $(x,f(x))$ de una función no tienen porqué ser números sino que pueden ser objetos de cualquier clase. En ocasiones haremos uso de esta idea general, pero en la mayoría de los casos nos interesarán funciones reales, esto es, funciones cuyo dominio y recorrido sean subconjuntos de la recta real.

Algunas de las funciones que aparecen en Cálculo se describen en los ejemplos siguientes.

1.4 Más ejemplos de funciones reales

1. *Funciones constantes.* Una función cuyo recorrido consta de un solo número se llama función constante. En la figura 1.8 se muestra un ejemplo, en la que $f(x) = 3$ para todo x real. La gráfica es una recta horizontal que corta al eje y en el punto $(0, 3)$.

2. *Funciones lineales.* Una función g definida para todo real x mediante una fórmula de la forma

$$g(x) = ax + b$$

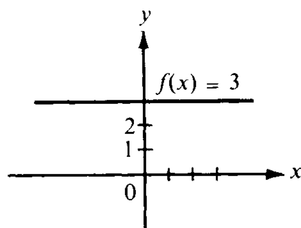


FIGURA 1.8 *Función constante* $f(x) = 3$.

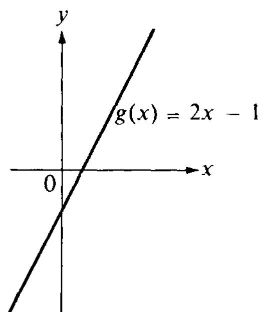


FIGURA 1.9 *Función lineal* $g(x) = 2x - 1$.

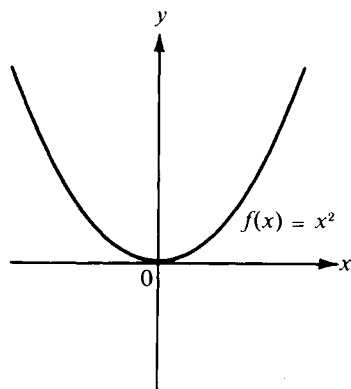


FIGURA 1.10 *Polinomio cuadrático* $f(x) = x^2$.

se llama función lineal porque su gráfica es una recta. El número b es la ordenada en el origen; es la coordenada y del punto $(0, b)$ en el que la recta corta al eje y. El número a es la pendiente de la recta. Un ejemplo, $g(x) = x$, está dibujado en la figura 1.4. En la figura 1.9 se muestra otro $g(x) = 2x - 1$.

3. *Funciones potenciales.* Para un entero positivo n, sea f la función definida por $f(x) = x^n$ para todo real x. Cuando $n = 1$, ésta es la función identidad, representada en la figura 1.4. Para $n = 2$ la gráfica es una parábola, parte de la cual se ve en la figura 1.10. Para $n = 3$, la gráfica es una cúbica y está representada en la figura 1.11 (pág. 69).

4. *Funciones polinómicas.* Una función polinómica P es la definida para todo real x por una ecuación de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n = \sum_{k=0}^{n} c_kx^k.$$

Los números $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son los *coeficientes* del polinomio, y el entero no negativo n es su *grado* (si $c_n \neq 0$). Quedan incluidas en este tipo de funciones, las funciones constantes y las potenciales. Los polinomios de grados 2, 3 y 4 se denominan polinomios *cuadráticos, cúbicos* y *cuárticos* respectivamente. La figura 12 presenta una parte de la gráfica de una función polinómica cuártica P dada por $P(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$.

5. *La circunferencia.* Volvamos a la ecuación cartesiana de la circunferencia, $x^2 + y^2 = r^2$ y resolvámosla respecto a y. Existen dos soluciones dadas por

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

(Recuerde el lector que si $a > 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ representa la raíz cuadrada positiva de a. La raíz cuadrada negativa es $-\sqrt{a}$.) Hubo un tiempo en que los matemáticos decían que y era una función *bi-valente* de x dada por $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. No obstante, modernamente no se admite la «bi-valencia» como propiedad de las funciones. La definición de función exige que a cada x perteneciente al dominio, corresponde uno y sólo un valor de y en el recorrido. Geométricamente, esto significa que las rectas verticales cortan la gráfica en un solo punto. Por consiguiente para hacer hacer compatible el anterior ejemplo con el concepto teórico, decimos que las dos soluciones para y definen *dos* funciones, f y g, siendo

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

para cada x que satisface $-r \leq x \leq r$. Cada una de estas funciones tiene como dominio el intervalo comprendido entre $-r$ y r. Si $|x| > r$, no existe valor real de y tal que $x^2 + y^2 = r^2$, y decimos que las funciones f y g *no están definidas* para tal x. Puesto que $f(x)$ es la raíz cuadrada no negativa de $r^2 - x^2$, la gráfica de f es la semicircunferencia representada en la figura 1.13. Los valores de la función g son ≤ 0, y por tanto la gráfica de g es la semicircunferencia inferior dibujada en la figura 1.13.

6. *Sumas, productos y cocientes de funciones.* Sean f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D. Se pueden construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores. La función u definida por

$$u(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{si} \quad x \in D$$

se denomina *suma* de f y g y se representa por $f + g$. Del mismo modo, el *producto* $v = f \cdot g$ y el *cociente* $w = f/g$ están definidos por las fórmulas

$$v(x) = f(x)g(x) \quad \text{si} \quad x \in D, \qquad w(x) = f(x)/g(x) \quad \text{si} \quad x \in D \ \text{ y } \ g(x) \neq 0.$$

Con el conjunto de los Ejercicios que siguen se intenta dar al lector cierta soltura en el manejo de la notación empleada para las funciones.

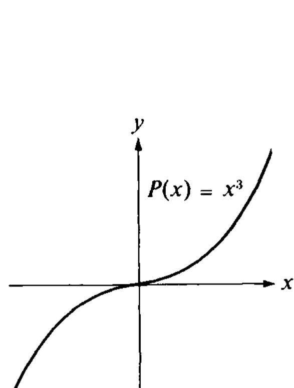


FIGURA 1.11 *Polinomio cúbico* $P(x) = x^3$.

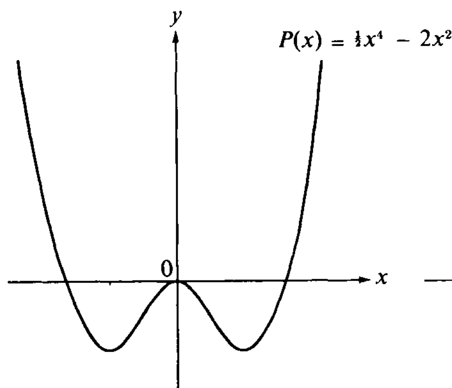


FIGURA 1.12 *Polinomio cuártico* $P(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$.

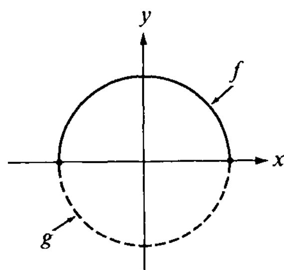


FIGURA 1.13 *Gráficas de las dos funciones*

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$,
$g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

1.5 Ejercicios

1. Sea $f(x) = x + 1$ para todo real x. Calcular: $f(2)$, $f(-2)$, $-f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $1/f(2)$, $f(a + b), f(a) + f(b), f(a)f(b)$.
2. Sean $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 - x$ para todo real x. Calcular: $f(2) + g(2)$, $f(2) - g(2), f(2)g(2), f(2)/g(2), f[g(2)], g[f(2)], f(a) + g(-a), f(t)g(-t)$.
3. Sea $\varphi(x) = |x - 3| + |x - 1|$ para todo real x. Calcular: $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(-1), \varphi(-2)$. Determinar todos los valores de t para los que $\varphi(t + 2) = \varphi(t)$.
4. *Sea* $f(x) = x^2$ para todo real x. Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números reales x, y, t, etc., para los que la fórmula dada es válida.

   (a) $f(-x) = f(x)$.
   (b) $f(y) - f(x) = (y - x)(y + x)$.
   (c) $f(x + h) - f(x) = 2xh + h^2$.
   (d) $f(2y) = 4f(y)$.
   (e) $f(t^2) = f(t)^2$.
   (f) $\sqrt{f(a)} = |a|$.

5. Sea $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de x, y, s, y t son válidas

   (a) $g(-x) = g(x)$.
   (b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$.
   (c) $g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$.
   (d) $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$.
   (e) $g\left(\dfrac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$.
   (f) $\dfrac{1}{2 + g(x)} = \dfrac{2 - g(x)}{x^2}$.

6. Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ para $1 < x \leq 2$. La función no está definida si $x < 0$ o si $x > 2$.
   (a) Trazar la gráfica de f.
   (b) Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.
   (c) Poner $h(x) = f(x - 2)$. Describir el dominio de h y dibujar su gráfica.
   (d) Poner $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.
7. Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x$ y $f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.
8. Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.
9. Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n. Demostrar cada uno de los siguientes apartados:
   (a) Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, $f(x) = xg(x)$, siendo g un polinomio de grado $n - 1$.
   (b) Para cada real a, la función p dada por $p(x) = f(x + a)$ es un polinomio de grado n.
   (c) Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para un cierto valor real a, entonces $f(x) = (x - a)h(x)$, siendo h un polinomio de grado $n - 1$. [*Indicación:* Considérese $p(x) = f(x + a)$.]
   (d) Si $f(x) = 0$ para $n + 1$ valores reales de x distintos, todos los coeficientes c_k son cero y $f(x) = 0$ para todo real x.
   (e) Sea $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ un polinomio de grado m, siendo $m \geq n$. Si $g(x) = f(x)$ para $m + 1$ valores reales de x distintos, entonces $m = n$, $b_k = c_k$ para cada valor de k, y $g(x) = f(x)$ para todo real x.
10. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que satisfacen las condiciones dadas.
   (a) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$. (c) $p(0) = p(1) = 1$.
   (b) $p(0) = p(1) = 1, p(2) = 2$. (d) $p(0) = p(1)$.
11. En cada caso, hallar todos los polinomios p de grado ≤ 2 que para todo real x satisfacen las condiciones que se dan.
   (a) $p(x) = p(1 - x)$. (c) $p(2x) = 2p(x)$.
   (b) $p(x) = p(1 + x)$. (d) $p(3x) = p(x + 3)$.
12. Demostrar que las expresiones siguientes son polinomios poniéndolas en la forma $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ para un valor de m conveniente. En cada caso n es entero positivo.
   (a) $(1 + x)^{2n}$. (b) $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$. (c) $\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k})$.

1.6 El concepto de área como función de conjunto

Cuando un matemático intenta desarrollar una teoría general que abarque muchos conceptos distintos, procura aislar propiedades comunes que parecen ser fundamentales para cada una de las aplicaciones particulares que considera. Utiliza entonces esas propiedades como piedras fundamentales de su teoría. Euclides siguió este método al desarrollar la Geometría elemental como un sistema deductivo basado en un conjunto de axiomas. Nosotros hemos utilizado el mismo proceso en la introducción axiomática del sistema de números reales, y lo usaremos una vez más en nuestra discusión del concepto de área.

Cuando asignamos un área a una región plana, asociamos un número a un conjunto S del plano. Desde el punto de vista puramente matemático, esto significa que se tiene una función a (función área) que asigna un número real $a(S)$ (el área de S) a cada conjunto S de una cierta colección de conjuntos dada. Una función de esta naturaleza, cuyo dominio es una colección de conjuntos y cuyos valores son números reales, se llama *función de conjunto.* El problema básico es este: Dado un conjunto plano S, ¿qué área $a(S)$ asignaremos a S?

Nuestro método para abordar este problema consiste en partir de ciertas propiedades que el área debiera tener y tomarlas como *axiomas* para el área. Cualquier función de conjunto que satisfaga esos axiomas se llamará función área. Es necesario demostrar que existe realmente una función área. Aquí no intentaremos hacerlo. En cambio, suponemos la existencia de dicha función área y deducimos nuevas propiedades a partir de los axiomas*.

Antes de establecer los axiomas para el área, haremos algunas observaciones acerca de los conjuntos del plano a los que se puede asignar área. Éstos se llamarán conjuntos *medibles;* la colección de todos los conjuntos medibles se designará por $\mathscr{M}$. Los axiomas contienen la suficiente información acerca de los conjuntos de $\mathscr{M}$ para permitirnos demostrar que todas las figuras geométricas que aparecen en las aplicaciones usuales del cálculo están en $\mathscr{M}$ y que sus áreas pueden calcularse por integración.

Uno de los axiomas (axioma 5) establece que todo rectángulo es medible y que su área es el producto de las longitudes de sus lados. La palabra «rectángulo» se usa aquí para referirse a cualquier conjunto congruente ** a un conjunto de la forma

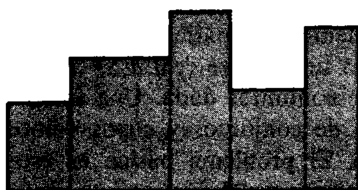
$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq k\},$$

siendo $h \geq 0$ y $k \geq 0$. Los números h y k son las longitudes de los lados del rectángulo. Consideramos un segmento o un punto como un caso particular de un rectángulo suponiendo que h o k (o ambos) sean cero.

A partir de rectángulos podemos construir conjuntos más complicados. El conjunto dibujado en la figura 1.14 es la reunión de una colección finita de rectángulos con sus bases en el eje x, y se llama *región escalonada.* Los axiomas implican que cada región escalonada es medible y que su área es la suma de las áreas de los rectángulos componentes.

* Una construcción elemental de una función área se encuentra en los capítulos 14 y 22 de Edwin E. Moise, *Elementary Geometry From An Advanced Standpoint,* Addison-Wesley Publishing Co., 1963.

** La congruencia se usa aquí en el mismo sentido que en la Geometría euclidiana elemental. Dos conjuntos son congruentes si sus puntos pueden ponerse en correspondencia uno a uno de modo que las distancias se conserven. Esto es, si a dos puntos p y q en un conjunto corresponden p' y q' en el otro, la distancia de p a q debe ser igual a la de p' a q'; siendo esto cierto para un par p, q cualquiera.

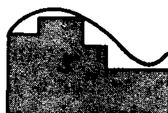


Región escalonada

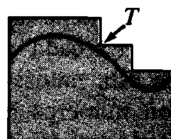
FIGURA 1.14



(a) Conjunto de ordenadas



(b) Región escalonada interior



(c) Región escalonada exterior

FIGURA 1.15 *Conjunto de ordenadas encerrado por dos regiones escalonadas.*

La región Q dibujada en la figura 1.15(a) es un ejemplo de *conjunto de ordenadas*. Su contorno superior es la gráfica de una función no negativa. El axioma 6 nos permitirá demostrar, que muchos conjuntos de ordenadas son medibles y que sus áreas pueden calcularse aproximando tales conjuntos por regiones escalonadas interiores y exteriores, como se indica en las figuras 1.15(b) y (c).

Expongamos ahora los mencionados axiomas.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE ÁREA. *Supongamos que existe una clase $\mathscr{M}$ de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es $\mathscr{M}$, con las propiedades siguientes:*

1. *Propiedad de no negatividad. Para cada conjunto S de $\mathscr{M}$, se tiene* $a(S) \geq 0$.

2. *Propiedad aditiva. Si S y T pertenecen a $\mathscr{M}$, también pertenecen a $\mathscr{M}$, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene*

$$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T).$$

3. *Propiedad de la diferencia. Si S y T pertenecen a $\mathscr{M}$ siendo $S \subseteq T$, entonces $T - S$ está en $\mathscr{M}$, y se tiene $a(T - S) = a(T) - a(S)$.*

4. *Invariancia por congruencia. Si un conjunto S pertenece a $\mathscr{M}$ y T es congruente a S, también T pertenece a $\mathscr{M}$ y tenemos $a(S) = a(T)$.*

5. *Elección de escala. Todo rectángulo R pertenece a $\mathscr{M}$. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces $a(R) = hk$.*

6. *Propiedad de exhaución. Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T, de modo que*

(1.1) $$S \subseteq Q \subseteq T.$$

Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

para todas las regiones escalonadas S y T que satisfagan (1.1), *entonces Q es medible y* $a(Q) = c$.

El axioma 1 establece simplemente que el área de un conjunto plano medible es un número positivo o nulo. El axioma 2 nos dice que cuando un conjunto está formado por dos regiones (que pueden ser sin parte común), el área de la reunión es la suma de las áreas de las dos partes menos el área de su intersección. En particular, si la intersección tiene área nula, el área del conjunto es la suma de las áreas de las dos partes.

Si restamos un conjunto medible S de un conjunto medible T mayor, el axioma 3 establece que la parte restante, $T - S$, es medible y su área se obtiene por sustracción, $a(T - S) = a(T) - a(S)$. En particular, este axioma implica que el conjunto vacío $\varnothing$ es medible y tiene área nula. Puesto que $a(T - S) \geq 0$, el axioma 3 también implica la *propiedad de monotonía*:

$$a(S) \leq a(T), \qquad \text{para conjuntos } S \text{ y } T \text{ de } \mathscr{M} \text{ tales que } S \subseteq T.$$

Dicho de otro modo, un conjunto que es parte de otro no puede tener área mayor.

El axioma 4 asigna áreas iguales a los conjuntos que tienen el mismo tamaño y la misma forma. Los cuatro primeros axiomas se satisfarían trivialmente si se asignara el número cero como área de todo conjunto de $\mathscr{M}$. El axioma 5 asigna área no nula a ciertos rectángulos y por eso excluye aquel caso trivial. Finalmente, el axioma 6 incorpora el método griego de exhaución; y nos permite extender la clase de conjuntos medibles de las regiones escalonadas a regiones más generales.

El axioma 5 asigna área cero a todo segmento de recta. El uso repetido de la propiedad aditiva demuestra que toda región escalonada es medible y que su área es la suma de las áreas de los rectángulos componentes. Otras consecuencias de los axiomas se comentan en el siguiente conjunto de Ejercicios.

1.7 Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios se deducen las propiedades del área a partir de los axiomas establecidos en la Sección anterior.

1. Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es medible y tiene área nula: (a) Un conjunto que consta de un solo punto. (b) El conjunto de un número finito de puntos. (c) La reunión de una colección finita de segmentos de recta en un plano.
2. Toda región en forma de triángulo rectángulo es medible pues puede obtenerse como intersección de dos rectángulos. Demostrar que toda región triangular es medible y que su área es la mitad del producto de su base por su altura.

3. Demostrar que todo trapezoide y todo paralelogramo es medible y deducir las fórmulas usuales para calcular su área.
4. Un punto (x, y) en el plano se dice que es un *punto* de una *red*, si ambas coordenadas x e y son enteras. Sea P un polígono cuyos vértices son puntos de una red. El área de P es $I + \frac{1}{2}B - 1$ donde I es el número de puntos de la red interiores a P, y B el de los de la frontera.
   (a) Probar que esta fórmula es correcta para rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados.
   (b) Probar que la fórmula es correcta para triángulos rectángulos y paralelogramos.
   (c) Emplear la inducción sobre el número de lados para construir una demostración para polígonos en general.
5. Demostrar que un triángulo cuyos vértices son puntos de una red no puede ser equilátero.

   [*Indicación:* Supóngase que existe un tal triángulo y calcular su área de dos maneras, empleando los Ejercicios 2 y 4.]

6. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathscr{M}$ la clase de todos los subconjuntos de A. (Son en número de 32 contando el mismo A y el conjunto vacío $\varnothing$.) Para cada conjunto S de $\mathscr{M}$, representemos con $n(S)$ el número de elementos distintos de S. Si $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{3, 4, 5\}$, calcular $n(S \cup T)$, $n(S \cap T)$, $n(S - T)$ y $n(T - S)$. Demostrar que la función de conjunto n satisface los tres primeros axiomas del área.

1.8 Intervalos y conjuntos de ordenadas

En la teoría de la integración se trabaja principalmente con funciones reales cuyos dominios son intervalos en el eje x. Algunas veces es importante distinguir entre intervalos que incluyen sus extremos y aquellos que no los incluyen. Esta distinción se hace introduciendo las siguientes definiciones:

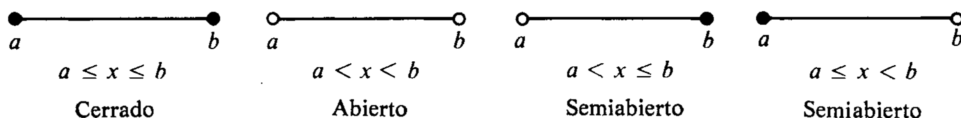


FIGURA 1.16 *Ejemplos de intervalos.*

Si $a < b$, se indica por $[a, b]$ el conjunto de todos los x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$ y se denomina *intervalo cerrado* de a a b. El *intervalo abierto* correspondiente, indicado por (a, b) es el conjunto de todos los x que satisfacen $a < x < b$. El intervalo cerrado $[a, b]$ incluye los extremos a, b, mientras que el abierto no los incluye (véase fig. 1.16). El intervalo abierto (a, b) se denomina también el *interior* de $[a, b]$. Los intervalos semiabiertos

$(a, b]$ y $[a, b)$ que incluyen sólo un extremo están definidos por las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$, respectivamente.

Sea f una función no negativa cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$. La parte de plano comprendida entre la gráfica de f y el eje de las x se denomina el *conjunto de ordenadas* de f. Precisando más, el conjunto de ordenadas de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades:

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq f(x).$$

En cada uno de los ejemplos dados en la figura 1.17 la parte rayada representa el conjunto de ordenadas de la función correspondiente.

Los conjuntos de ordenadas son entes geométricos cuyas áreas se desea definir y calcular por medio del Cálculo integral. El concepto de integral se definirá primero para funciones escalonadas y luego se utilizará la integral de funciones

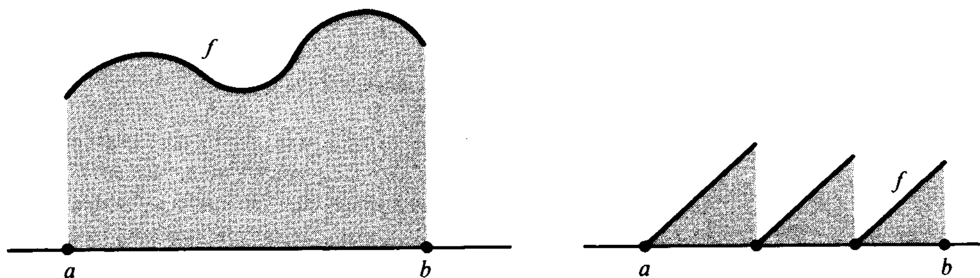


FIGURA 1.17. *Ejemplos de conjuntos de ordenadas.*

escalonadas para formular la definición de integral para funciones más generales. Para realizar este programa, es necesario dar una definición analítica de lo que se entiende por una función escalonada, lo que se consigue fácilmente refiriéndola al concepto de *partición,* del que se trata a continuación.

1.9 Particiones y funciones escalonadas

Un intervalo $[a, b]$ cerrado, se supone descompuesto en n subintervalos fijando $n - 1$ puntos de subdivisión, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sujetos únicamente a la restricción:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b. \tag{1.2}$$

Es conveniente designar el punto a por x_0 y el b por x_n. Un conjunto de puntos que satisfacen (1.2) se denomina una *partición* P de $[a, b]$, y se utiliza el símbolo:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

para designar tal partición. La partición P determina n subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

$[x_{k-1}, x_k]$ indica uno de estos subintervalos cerrados y se dice que es precisamente el subintervalo cerrado k-ésimo de P; un ejemplo se tiene en la figura 1.18. El subintervalo abierto correspondiente (x_{k-1}, x_k) se denomina el subintervalo abierto k-ésimo de P.

Con auxilio de estos conceptos se puede dar ya una definición analítica de función escalonada.

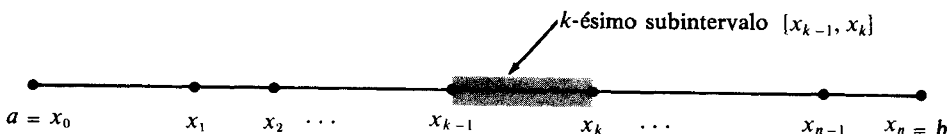


FIGURA 1.18 *Ejemplo de una partición de* $[a, b]$.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN ESCALONADA. *Una función s cuyo dominio es el intervalo cerrado* $[a, b]$ *se dice que es una función escalonada, si existe una partición* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *de* $[a, b]$ *tal que s es constante en cada subintervalo abierto de P. Es decir, para cada* $k = 1, 2, \ldots, n$ *existe un número real* s_k *tal que*:

$$s(x) = s_k \qquad si \quad x_{k-1} < x < x_k .$$

A veces las funciones escalonadas se llaman funciones constantes a trozos.

Nota: En cada uno de los extremos x_{k-1} y x_k la función ha de estar definida, pero el valor que tome no ha de ser necesariamente el mismo s_k.

EJEMPLO. Un ejemplo conocido de función escalonada es la «función de franqueo postal» cuya gráfica está representada en la figura 1.19. Teniendo en cuenta que el franqueo de una carta es de una peseta por cada 20 g o fracción hasta 100 g, la gráfica de esta función escalonada está formada por intervalos semiabiertos que contienen su extremo de la derecha. El dominio de esta función es el intervalo $[0,100]$.

A partir de una partición P de $[a, b]$ se puede formar otra partición P' añadiendo a los puntos que ya estaban en P, otros nuevos. Una tal partición P' se denomina un *afinamiento* de P y se dice que es *más fina* que P. Por ejemplo, el conjunto $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ es una partición del intervalo $[0, 4]$. Adjuntando

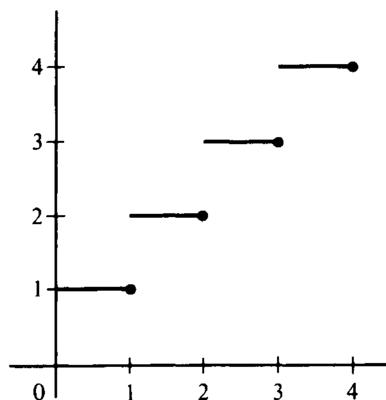
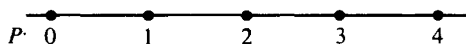


FIGURA 1.19 *La función de franqueo postal.*



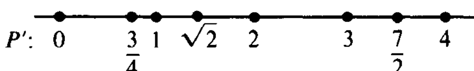


FIGURA 1.20 *Partición P de [0, 4] y un afinamiento P'*

los puntos $3/4$, $\sqrt{2}$, y $7/2$ se obtiene una nueva partición P' de $[0, 4]$ que es $P' = \{0, 3/4, 1, \sqrt{2}, 2, 3, 7/2, 4\}$ y es un afinamiento de P (véase fig. 1.20). Si una función escalonada es constante en los subintervalos abiertos de P, es también constante en los subintervalos abiertos de cada afinamiento P'.

1.10 Suma y producto de funciones escalonadas

Sumando los valores correspondientes de funciones escalonadas dadas, se pueden formar otras nuevas funciones escalonadas. Por ejemplo, supóngase que s y t son funciones escalonadas definidas ambas en el mismo intervalo $[a, b]$. Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$ tales que s es constante en los subintervalos abiertos de P_1 y t es constante en los subintervalos abiertos de P_2. A partir de s y t se puede definir una nueva función escalonada u por medio de la suma:

$$u(x) = s(x) + t(x) \qquad \text{si} \qquad a \leq x \leq b\,.$$

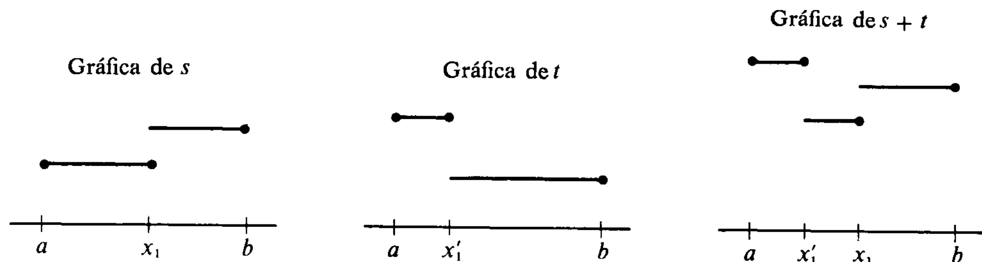


FIGURA 1.21 *Suma de dos funciones escalonadas.*

Para ver que u es ahora una función escalonada se ha de encontrar una partición P tal que u sea constante en los subintervalos abiertos de P. Para formar esta nueva partición P se toman todos los puntos de P_1 junto con todos los puntos de P_2. Esta partición, reunión de P_1 y P_2, se llama *afinamiento común* de P_1 y P_2. Puesto que tanto s como t son constantes en los subintervalos abiertos del afinamiento común, también lo es u. En la figura 1.21 se ofrece un ejemplo. La partición P_1 es $\{a, x_1, b\}$, la partición P_2 es $\{a, x_1' b\}$, y el afinamiento común es $\{a, x_1', x_1, b\}$.

Análogamente, se puede formar a partir de s y t una nueva función escalonada v, multiplicando los valores correspondientes:

Esta nueva función escalonada v se denomina *producto* de s y t y se designa por $s \cdot t$. Un caso particular importante es aquel en que uno de los factores, por ejemplo t, es constante en todo el intervalo $[a, b]$. Si $t(x) = c$ para cada x en $[a, b]$, entonces cada valor de la función $v(x)$ se obtiene multiplicando por la constante c, el valor de la función escalonada $s(x)$.

1.11 Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios, $[x]$ representa el mayor entero $\leq x$; es decir, la parte entera de x.

1. Sean $f(x) = [x]$ y $g(x) = [2x]$ para todo real x. En cada caso, dibujar la gráfica de la función h definida en el intervalo $[-1, 2]$ por la fórmula que se da
   (a) $h(x) = f(x) + g(x)$. (c) $h(x) = f(x)g(x)$.
   (b) $h(x) = f(x) + g(x/2)$. (d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$.
2. En cada uno de los casos, f representa una función definida en el intervalo $[-2, 2]$ por la fórmula que se indica. Dibújense las gráficas correspondientes a cada una de las funciones f. Si f es una función escalonada, encontrar la partición P de $[-2, 2]$ tal que f es constante en los subintervalos abiertos de P.
   (a) $f(x) = x + [x]$. (d) $f(x) = 2[x]$.
   (b) $f(x) = x - [x]$. (e) $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$.
   (c) $f(x) = [-x]$. (f) $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$.
3. En cada caso, dibujar la gráfica de la función definida por la fórmula que se da.
   (a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ para $0 \leq x \leq 10$. (c) $f(x) = \sqrt{[x]}$ para $0 \leq x \leq 10$.
   (b) $f(x) = [x^2]$ para $0 \leq x \leq 3$. (d) $f(x) = [x]^2$ para $0 \leq x \leq 3$.
4. Demostrar que la función parte entera tiene las propiedades que se indican.
   (a) $[x + n] = [x] + n$ para cada entero n.
   (b) $[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{si } x \text{ entero,} \\ -[x] - 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
   (c) $[x + y] = [x] + [y]$ o $[x] + [y] + 1$.
   (d) $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$.
   (e) $[3x] = [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$.

Ejercicios optativos.

5. Las fórmulas de los Ejercicios 4(d) y 4(e) sugieren una generalización para $[nx]$. Establecer y demostrar una tal generalización.
6. Recuérdese que un *punto de red* (x, y) en el plano es aquel cuyas coordenadas son enteras. Sea f una función no negativa cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, donde a y b son enteros, $a < b$. Sea S el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$. Demostrar que el número de puntos de la red pertenecientes a S es igual a la suma

$$\sum_{n=a}^{b} [f(n)].$$

7. Si a y b son enteros positivos primos entre sí, se tiene la fórmula

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{na}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Se supone que para $b = 1$ la suma del primer miembro es 0.
(a) Dedúzcase este resultado geométricamente contando los puntos de la red en un triángulo rectángulo.
(b) Dedúzcase este resultado analíticamente de la manera siguiente. Cambiando el índice de sumación, obsérvese que $\sum_{n=1}^{b-1} [na/b] = \sum_{n=1}^{b-1} [a(b-n)/b]$. Aplíquense luego los Ejercicios 4(a) y (b) al corchete de la derecha.

8. Sea S un conjunto de puntos en la recta real. La *función característica* de S es, por definición, la función $\chi_S(x) = 1$ para todo x de S, y $\chi_S(x) = 0$ para aquellos puntos que no pertenecen a S. Sea f una función escalonada que toma el valor constante c_k en el k-simo subintervalo I_k de una cierta partición de un intervalo $[a, b]$. Demostrar que para cada x de la reunión $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ se tiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}(x).$$

Esta propiedad se expresa diciendo que toda función escalonada es una combinación lineal de funciones características de intervalos.

1.12 Definición de integral para funciones escalonadas

En esta Sección se introduce la definición de integral para funciones escalonadas. Esta definición se ha de construir de manera que si una función es no negativa, su integral sea un número que se adapte a la idea intuitiva de lo que «sería» el área del recinto de ordenadas correspondiente.

Sea s una función escalonada definida en $[a, b]$, y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la partición de $[a, b]$ tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P.

Se designa por s_k el valor constante que toma s en el subintervalo abierto k-ésimo, de manera que:

$$s(x) = s_k \quad \text{si} \quad x_{k-1} < x < x_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FUNCIONES ESCALONADAS. *La integral de s de a a b, que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)\,dx$, se define mediante la siguiente fórmula:*

(1.3)
$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})\,.$$

Es decir, para obtener el valor de la integral, se multiplica cada valor s_k constante, por la longitud de intervalo k-simo correspondiente, formando el producto $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos.

Obsérvese que los valores de la función en los extremos de los intervalos no se toman en cuenta ya que no aparecen en el segundo miembro de (1.3). En particular, si s es constante en el intervalo abierto (a, b), es decir, $s(x) = c$ si $a < x < b$, se tiene entonces:

$$\int_a^b s(x)\,dx = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b - a)\,,$$

independiente de cuales sean los valores $s(a)$ y $s(b)$. Si $c > 0$ y $s(x) = c$ para todo x del intervalo cerrado $[a, b]$, el conjunto de ordenadas de s es un rectángulo de base $b - a$ y altura c; la integral de s es $c(b - a)$, el área de este rectángulo. Cambiando el valor de s en uno de los puntos a o b o en ambos, cambia el conjunto de ordenadas pero no se altera la integral de s o el área de su conjunto de ordenadas. Por ejemplo, los dos conjuntos de ordenadas de la figura 1.22 tienen áreas iguales.

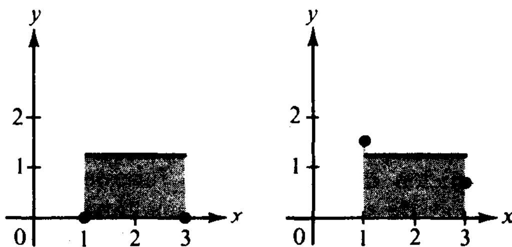


FIGURA 1.22 *Cambiando el valor de la función en dos puntos no varía el área del conjunto de ordenadas.*

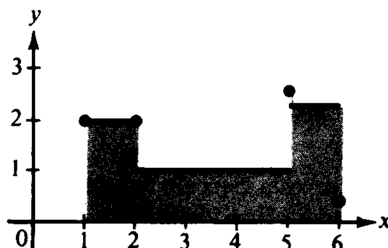


FIGURA 1.23 *Conjunto de ordenadas de una función escalonada.*

El conjunto de ordenadas de cualquier función escalonada s consta de un número finito de rectángulos, uno por cada intervalo en que la función es constante; el conjunto de ordenadas puede también poseer o carecer de ciertos segmentos verticales, dependiendo de la manera cómo la función está definida en los puntos de subdivisión. La integral de s es igual a la suma de las áreas de cada uno de los rectángulos, prescindiendo de los valores que toma s en los puntos de división. Esto está de acuerdo con el hecho de que los segmentos verticales tienen área cero y no contribuyen en nada al área del conjunto de ordenadas. En la figura 1.23, la función escalonada s toma los valores constantes 2, 1, y $\frac{9}{4}$ en los intervalos abiertos (1, 2), (2, 5), y (5, 6) respectivamente. Su integral es igual a

$$\int_1^6 s(x)\,dx = 2\cdot(2-1) + 1\cdot(5-2) + \tfrac{9}{4}\cdot(6-5) = \tfrac{29}{4}.$$

Debe observarse que la fórmula para la integral en (1.3) no depende de la elección de la partición P mientras s sea constante en los subintervalos abiertos de P. Por ejemplo, si se sustituye P por una partición más fina P' añadiendo un nuevo punto de división t, siendo $x_0 < t < x_1$. Entonces el primer término del segundo miembro de (1.3) se reemplaza por los dos términos $s_1\cdot(t-x_0)$ y $s_1\cdot(x_1-t)$, y los restantes términos no cambian. Puesto que

$$s_1\cdot(t-x_0) + s_1\cdot(x_1-t) = s_1\cdot(x_1-x_0),$$

el valor de toda la suma no cambia. Podemos pasar de P a cualquier partición más fina P' añadiendo los nuevos puntos de subdivisión uno tras otro. En cada paso, la suma de (1.3) no cambia, de modo que la integral es la misma para todos los afinamientos de P.

1.13 Propiedades de la integral de una función escalonada

En esta Sección se dan unas propiedades fundamentales a las que satisface la integral de una función escalonada. La mayor parte de estas propiedades parecen obvias cuando se interpretan geométricamente y algunas de ellas incluso triviales. Todas estas propiedades son válidas para integrales de funciones más generales, y establecidas para el caso de funciones escalonadas, las demostraciones para el caso general serán simples consecuencias. Las propiedades se dan como teoremas y en cada caso se da una interpretación geométrica por medio de las áreas. Las demostraciones analíticas de los mismos se dan en la Sección 1.15.

La primera propiedad establece que la integral de una suma de dos funciones escalonadas es igual a la suma de las integrales. Ésta se conoce como la propiedad *aditiva* y se representa en la figura 1.24.

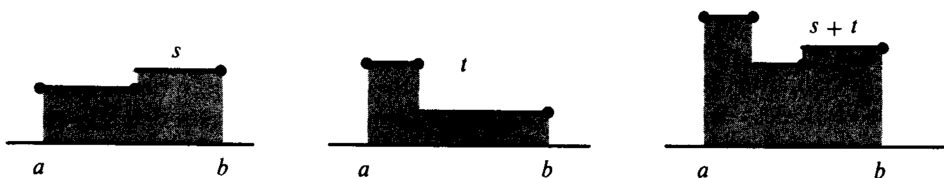


FIGURA 1.24. *La propiedad aditiva de la integral.*

TEOREMA 1.2. PROPIEDAD ADITIVA.

$$\int_a^b [s(x) + t(x)]\, dx = \int_a^b s(x)\, dx + \int_a^b t(x)\, dx .$$

La propiedad siguiente se pone de manifiesto en la figura 1.25 y se denomina propiedad *homogénea,* y expresa que si cada valor de la función se multiplica por una constante c, la integral queda también multiplicada por c.

TEOREMA 1.3. PROPIEDAD HOMOGÉNEA. *Para todo número real c, se tiene*

$$\int_a^b c \cdot s(x)\, dx = c \int_a^b s(x)\, dx .$$

Estos dos teoremas pueden combinarse en una fórmula conocida como propiedad de linealidad.

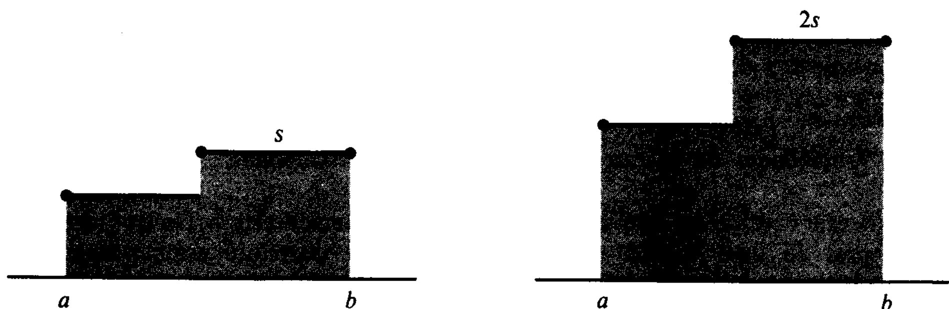


FIGURA 1.25 *La propiedad homogénea de la integral (con $c = 2$).*

TEOREMA 1.4. PROPIEDAD DE LINEALIDAD. *Para todo par de números reales c_1 y c_2 se tiene*

$$\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]\, dx = c_1 \int_a^b s(x)\, dx + c_2 \int_a^b t(x)\, dx .$$

El teorema que sigue es un teorema de *comparación* y expresa que si una función escalonada tiene en todo el intervalo $[a, b]$ valores mayores que otra, su integral en este intervalo también es mayor.

TEOREMA 1.5. TEOREMA DE COMPARACIÓN. *Si $s(x) < t(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b s(x)\,dx < \int_a^b t(x)\,dx\,.$$

La interpretación geométrica de este teorema indica, que si un conjunto de ordenadas está contenido en otro, el área de la región menor no puede exceder a la de la mayor.

Las propiedades que se han dado hasta ahora se refieren todas ellas a funciones escalonadas definidas en un intervalo común. La integral tiene otras propiedades importantes que relacionan integrales definidas en intervalos distintos. Entre ellas se tiene el siguiente

TEOREMA 1.6. ADITIVIDAD RESPECTO AL INTERVALO DE INTEGRACIÓN.

$$\int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx \qquad si \qquad a < c < b\,.$$

Este teorema refleja una propiedad del área que está ilustrada en la figura 1.26. Si un conjunto de ordenadas se descompone en dos, la suma de las áreas de las dos partes es igual al área del total.

El teorema que sigue expresa la *invariancia frente a una traslación.* Si el conjunto de ordenadas se «traslada» una cantidad c, el conjunto de ordenadas resultante es el de otra función escalonada t que se deduce de la s por medio de la ecuación: $t(x) = s(x - c)$. Si s está definida en $[a, b]$, t estará definida en

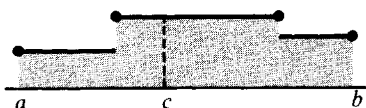


FIGURA 1.26 *Aditividad con respecto al intervalo de integración.*

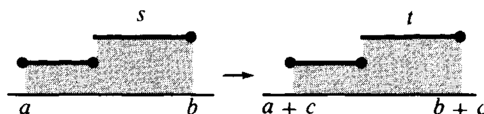


FIGURA 1.27 *Invariancia de la integral respecto a una traslación:* $t(x) = s(x - c)$.

$[a + c, b + c]$, y sus conjuntos de ordenadas tienen la misma área. Esta propiedad se expresa analíticamente como sigue:

TEOREMA 1.7. INVARIANCIA FRENTE A UNA TRASLACIÓN.

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\,dx \quad \textit{para todo real } c\,.$$

Su significado geométrico se ve en la figura 1.27 para $c > 0$. Si $c < 0$, el conjunto de ordenadas se traslada hacia la izquierda.

La propiedad homogénea indica cuál es la variación que experimenta una integral cuando se efectúa un cambio de escala en el eje y. El teorema que se da a continuación se refiere a un cambio de escala en el eje x. Si s es una función escalonada definida en el intervalo $[a, b]$ y se altera la escala en la dirección horizontal, multiplicando cada coordenada x por un factor $k > 0$, la nueva gráfica es la de otra función escalonada t definida en el intervalo $[ka, k^h]$ y relacionada con s por medio de la ecuación:

$$t(x) = s\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{si} \quad ka \leq x \leq kb\,.$$

La figura 1.28 presenta un ejemplo con $k = 2$, y se ve que la figura alterada tiene área doble que la de la figura original. En general, si se considera un factor

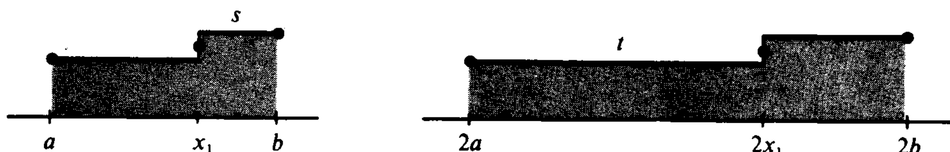


FIGURA 1.28 *Cambio de escala en el eje de las x:* $t(x) = s(x/2)$.

positivo k, la integral queda multiplicada por k. Expresada analíticamente, esta propiedad tiene la forma siguiente:

TEOREMA 1.8. DILATACIÓN O CONTRACCIÓN DEL INTERVALO DE INTEGRACIÓN.

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k\int_a^b s(x)\,dx \quad \textit{para todo } k > 0\,.$$

Hasta ahora, al utilizar el símbolo $\int_a^b$ se ha entendido que el límite inferior a era menor que el límite superior b. Es conveniente extender un poco los conceptos y considerar integrales con el límite inferior mayor que el superior. Esto se logra definiendo:

$$\int_b^a s(x)\,dx = -\int_a^b s(x)\,dx \quad \text{si} \quad a < b\,. \tag{1.4}$$

Se define también:

$$\int_a^a s(x)\,dx = 0\,,$$

definición sugerida al hacer $a = b$ en (1.4). Estos convenios permiten afirmar que el teorema 1.6 es válido no sólo si c está entre a y b, sino para cualquier ordenación de a, b, c. El teorema 1.6 se escribe muchas veces en la forma

$$\int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx + \int_b^a s(x)\,dx = 0\,.$$

Análogamente se puede extender el campo de validez del teorema 1.8, al caso en que k sea negativo. En particular, cuando $k = -1$, el teorema 1.8 y la igualdad (1.4) nos dan

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} s(-x)\,dx\,.$$

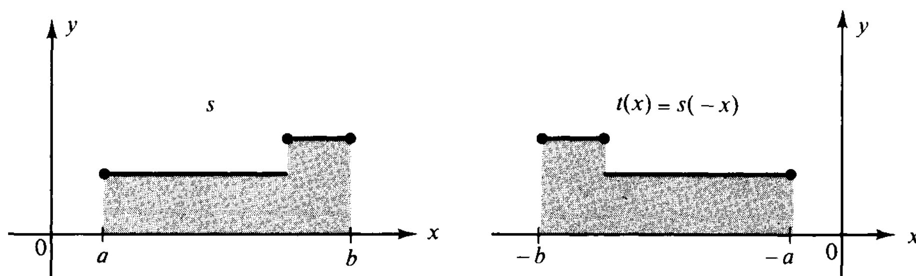


FIGURA 1.29 *Representación de la propiedad de reflexión de la integral.*

Llamaremos a ésta, *propiedad de reflexión* de la integral, ya que la gráfica de la función t dada por $t(x) = s(-x)$ se obtiene de la función s por reflexión respecto al eje y. En la figura 1.29 se representa un ejemplo.

1.14 Otras notaciones para las integrales

La letra x *que aparece en el símbolo* $\int_a^b s(x)\,dx$ no juega ningún papel esencial en la definición de área. Cualquier otro símbolo adecuado servirá exactamente igual. Se usan frecuentemente para ello las letras t, u, v, z, y en vez de $\int_a^b s(x)\,dx$ se puede escribir $\int_a^b s(t)\,dt$, $\int_a^b s(u)\,du$, etc., siendo consideradas todas como notaciones diversas para una misma cosa. Los símbolos x, t, u, etc., que se utilizan

en este sentido, se denominan «variables aparentes». Son análogas a los índices aparentes usados en los sumatorios.

Algunos autores de libros de Cálculo tienen tendencia a suprimir simultáneamente la variable aparente y el símbolo d y escribir para la integral simplemente $\int_a^b s$. Una razón para utilizar este símbolo abreviado, es que expresa con más fuerza que la integral depende solamente de la *función* s y del *intervalo* $[a, b]$. Así, algunas fórmulas toman una forma más simple con esta notación. Por ejemplo, la propiedad aditiva se expresa: $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$. Sin embargo, resulta más complicado escribir algunas fórmulas, como por ejemplo, las de los teoremas 1.7 y 1.8 con la notación abreviada. Más importantes son, sin embargo, las ventajas prácticas que presenta la notación original de Leibniz como se verá más adelante. El símbolo dx, que en este momento casi parece superfluo, resulta ser un instrumento muy útil en la práctica de cálculos con integrales.

1.15 Ejercicios

1. Calcular el valor de cada una de las integrales siguientes. Se pueden aplicar los teoremas dados en la Sección 1.13 siempre que convenga hacerlo. La notación $[x]$ indica la parte entera de x.

   (a) $\int_{-1}^{3} [x]\, dx.$ (d) $\int_{-1}^{3} 2[x]\, dx.$

   (b) $\int_{-1}^{3} [x + \frac{1}{2}]\, dx.$ (e) $\int_{-1}^{3} [2x]\, dx.$

   (c) $\int_{-1}^{3} ([x] + [x + \frac{1}{2}])\, dx.$ (f) $\int_{-1}^{3} [-x]\, dx.$

2. Dar un ejemplo de función escalonada s definida en el intervalo cerrado $[0, 5]$, que tenga las siguientes propiedades: $\int_0^2 s(x)\, dx = 5$, $\int_0^5 s(x)\, dx = 2$.

3. Probar que $\int_a^b [x]\, dx + \int_a^b [-x]\, dx = a - b$.

4. (a) Si n es un entero positivo, demostrar que $\int_0^n [t]\, dt = n(n-1)/2$.

   (b) Si $f(x) = \int_0^x [t]\, dt$ para $x \geq 0$, dibujar la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$.

5. (a) Demostrar que $\int_0^2 [t^2]\, dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

   (b) Calcular $\int_{-3}^{3} [t^2]\, dt$.

6. (a) Si n es un entero positivo demostrar que $\int_0^n [t]^2\, dt = n(n-1)(2n-1)/6$.

   (b) Si $f(x) = \int_0^x [t]^2\, dt$ para $x \geq 0$, dibujar la gráfica de f en el intervalo $[0, 3]$.

   (c) Hallar todos los valores de $x > 0$ para los que $\int_0^x [t]^2\, dt = 2(x-1)$.

7. (a) Calcular $\int_0^9 [\sqrt{t}]\, dt$.

   (b) Si n es un entero positivo, demostrar que $\int_0^{n^2} [\sqrt{t}]\, dt = n(n-1)(4n+1)/6$.

8. Pruébese que la propiedad de traslación (teorema 1.7) se puede expresar en la forma siguiente:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(x+c)\,dx\,.$$

9. Probar que la propiedad siguiente es equivalente al teorema 1.8.

$$\int_{ka}^{kb} f(x)\,dx = k\int_a^b f(kx)\,dx\,.$$

10. Dado un entero positivo p. Una función escalonada s está definida en el intervalo $[0, p]$ como sigue: $s(x) = (-1)^n n$ si x está en el intervalo $n \leq x < n+1$, siendo $n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$; $s(p) = 0$. Póngase $f(p) = \int_0^p s(x)\,dx$.

    (a) Calcular $f(3)$, $f(4)$ y $f(f(3))$.

    (b) ¿Para qué valor (o valores) de p es $|f(p)| = 7$?

11. Si en lugar de definir la integral de una función escalonada utilizando la fórmula (1.3) se tomara como definición:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k^3 \cdot (x_k - x_{k-1})\,,$$

se tendría una nueva teoría de la integración distinta de la dada. ¿Cuáles de las siguientes propiedades seguirían siendo válidas en la nueva teoría?

(a) $\int_a^b s + \int_b^c s = \int_a^c s.$

(b) $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t.$

(c) $\int_a^b c \cdot s = c\int_a^b s.$

(d) $\int_{a+c}^{b+c} s(x)\,dx = \int_a^b s(x+c)\,dx.$

(e) Si $s(x) < t(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces $\int_a^b s < \int_a^b t.$

12. Resolver el Ejercicio 11 utilizando la definición

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k^2 - x_{k-1}^2)\,.$$

En los Ejercicios que siguen se piden las demostraciones analíticas de las propiedades de la integral dadas en la Sección 1.13. Las demostraciones de los teoremas 1.3 y 1.8 se presentan como ejemplo. Para las otras se darán indicaciones.

Demostración del teorema 1.3: $\int_a^b c \cdot s(x)\,dx = c\int_a^b s(x)\,dx$ para cada número real c.

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que s es constante en los subin-

tervalos abiertos de P. Sea $s(x) = s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Entonces, $c \cdot s(x) = c \cdot s_k$ si $x_{k-1} < x < x_k$, y, por tanto, en virtud de la definición de integral se tiene:

$$\int_a^b c \cdot s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c \cdot s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \int_a^b s(x)\,dx\,.$$

Demostración del teorema 1.8:

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x)\,dx \qquad \text{si } k > 0\,.$$

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ tal que s es constante en los subintervalos abiertos de P. Supóngase que $s(x) = s_i$ si $x_{i-1} < x < x_i$. Sea $t(x) = s(x/k)$ si $ka < x < kb$. Entonces $t(x) = s_i$ si x pertenece al intervalo abierto (kx_{i-1}, kx_i); por tanto, $P' = \{kx_0, kx_1, \ldots, kx_n\}$ es una partición de $[ka, kb]$ y t es constante en los subintervalos abiertos de P'. Por tanto, t es una función escalonada cuya integral es:

$$\int_{ka}^{kb} t(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot (kx_i - kx_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = k \int_a^b s(x)\,dx\,.$$

13. Demostrar el teorema 1.2 (propiedad aditiva). [*Indicación:* Aplíquese la propiedad aditiva para sumas: $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$.]
14. Demostrar el teorema 1.4 (propiedad lineal). [*Indicación:* Aplíquese la propiedad aditiva y la propiedad homogénea.]
15. Demostrar el teorema 1.5 (teorema de comparación). [*Indicación:* Aplíquese la propiedad correspondiente para sumas: $\sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k$ si $a_k < b_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.]
16. Demostrar el teorema 1.16 (aditividad con respecto al intervalo). [*Indicación:* Si P_1 es una partición de $[a, c]$ y P_2 una partición de $[c, b]$, los puntos de P_1, junto con los de P_2 forman una partición de $[a, b]$.]
17. Demostrar el teorema 1.7 (invariancia frente a una traslación). [*Indicación:* Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces $P' = \{x_0 + c, x_1 + c, \ldots, x_n + c\}$ es una partición de $[a + c, b + c]$.]

1.16 La integral de funciones más generales

La integral $\int_a^b s(x)\,dx$ se ha definido para una función escalonada. En este apartado se dará una definición aplicable a funciones más generales f. La definición se construirá de tal manera que la integral resultante goce de todas las propiedades dadas en el apartado 1.13.

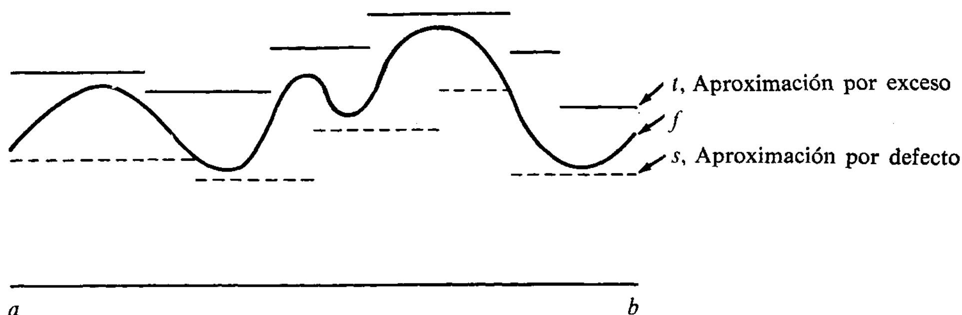


FIGURA 1.30 *Aproximación por exceso y por defecto de una función f por medio de funciones escalonadas.*

El métdo está inspirado en el de Arquímedes que se expuso en la Sección I 1.3. La idea es simplemente ésta: se empieza por aproximar por defecto y por exceso la función f mediante funciones escalonadas, como se sugiere en la figura 1.30. Para ello se supone que se elige una función escalonada arbitraria, designada por s, cuya gráfica está por debajo de la de f, y una función escalonada arbitraria, designada por t, cuya gráfica está por encima de la de f. Si ahora se considera el conjunto de todos los números $\int_a^b s(x)\,dx$, y $\int_a^b t(x)\,dx$ obtenidos eligiendo s y t de todas las maneras posibles, se tiene en virtud del teorema de la comparación:

$$\int_a^b s(x)\,dx < \int_a^b t(x)\,dx$$

Si la integral de f, ha de cumplir también el teorema de la comparación, ha de ser un número comprendido entre $\int_a^b s(x)\,dx$ y $\int_a^b t(x)\,dx$ para cada par s y t de funciones de aproximación. Si existe un *número único* con esta propiedad, parece lógico tomar este número como definición de integral de f.

Una sola cosa puede dificultar este proceso, y esta dificultad se presenta muy al principio. Desgraciadamente no es posible aproximar toda función superiormente e inferiormente por medio de funciones escalonadas. Por ejemplo, la función f dada por las ecuaciones:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0\,, \qquad f(0) = 0\,,$$

está definida para todo número real x, pero en ningún intervalo $[a, b]$ que contenga el origen se puede contornear f mediante funciones escalonadas. Esto es debido a que en la proximidad del origen, f tiene valores arbitrariamente grandes, o dicho de otro modo, f no está acotada en el entorno del origen (véase

figura 1.31). Por ello, al tratar de definir la integral, es preciso restringirse a las funciones que son *acotadas* en $[a, b]$ es decir, a aquellas funciones f para las cuales existe un número $M > 0$ tal que:

(1.5) $$-M \leq f(x) \leq M$$

para cada x en $[a, b]$. Geométricamente, la gráfica de tales funciones está situada entre las gráficas de dos funciones escalonadas s y t que toman los valo-

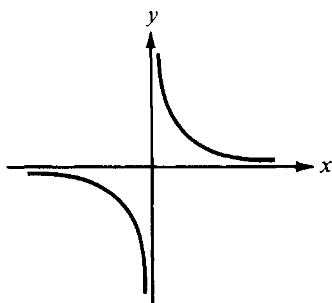


FIGURA 1.31 *Función no acotada*

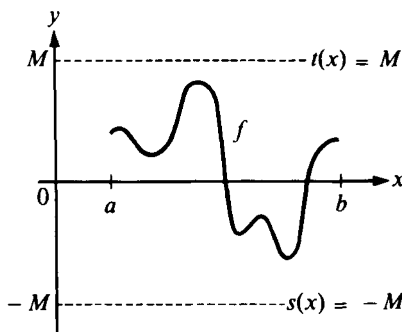


FIGURA 1.32 *Función acotada.*

res $-M$ y M respectivamente (véase figura 1.32). En este caso se dice que f está acotada por M. Las dos desigualdades en (1.5) se pueden escribir en la forma:

$$|f(x)| \leq M .$$

Resuelto este punto, se puede realizar el plan descrito antes y formular la definición de integral.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN ACOTADA. *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Sean s y t funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a, b]$ tales que*

(1.6) $$s(x) \leq f(x) \leq t(x)$$

para cada x en $[a, b.]$ Si existe un número I, y sólo uno, tal que

(1.7) $$\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx$$

para cada par de funciones escalonadas s y t que verifiquen las (1.6), *entonces este número I se denomina la integral de f desde a a b y se indica por el símbolo* $\int_a^b f(x)\,dx$ o $\int_a^b f$. *Cuando I existe se dice que f es integrable en* $[a, b]$.

Si $a < b$ se define $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ supuesta f integrable en $[a, b]$. También se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Si f es integrable en $[a, b]$, se dice que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. La función f se denomina *integrando,* los números a y b los *límites de integración,* y el intervalo $[a, b]$ el *intervalo de integración.*

1.17 Integrales superior e inferior

Supongamos la función f acotada en $[a, b]$. Si s y t son funciones escalonadas que satisfacen (1.6), se dice que s es inferior a f, y que t es superior a f, y escribimos $s \leq f \leq t$.

Sea S el conjunto de todos los números $\int_a^b s(x)\,dx$ obtenidos al tomar como s todas las funciones escalonadas inferiores a f, y sea T el conjunto de todos los números $\int_a^b t(x)\,dx$ al tomar como t todas las funciones escalonadas superiores a f. Esto es,

$$S = \left\{\int_a^b s(x)\,dx \mid s \leq f\right\}, \qquad T = \left\{\int_a^b t(x)\,dx \mid f \leq t\right\}.$$

Los dos conjuntos S y T son no vacíos puesto que f es acotada. Asimismo, $\int_a^b s(x)\,dx \leq \int_a^b t(x)\,dx$ si $s \leq f \leq t$, de modo que todo número de S es menor que cualquiera de T. Por consiguiente, según el teorema I.34, S tiene extremo superior, y T extremo inferior, que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \sup S \leq \inf T \leq \int_a^b t(x)\,dx$$

para todas las s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$. Esto demuestra que tanto $\sup S$ como $\inf T$ satisfacen (1.7). Por lo tanto, f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si $\sup S = \inf T$, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup S = \inf T.$$

El número $\sup S$ se llama *integral inferior* de f y se representa por $\underline{I}(f)$. El número T se llama *integral superior* de f y se representa por $\bar{I}(f)$. Así que tenemos

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^b s(x)\,dx \mid s \leq f\right\}, \qquad \bar{I}(f) = \inf\left\{\int_a^b t(x)\,dx \mid f \leq t\right\}.$$

El razonamiento precedente demuestra el teorema siguiente.

TEOREMA 1.9. *Toda función f acotada en $[a, b]$ tiene una integral inferior $\underline{I}(f)$ y una integral superior $\bar{I}(f)$ que satisfacen las desigualdades*

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t(x)\,dx$$

para todas las funciones s y t tales que $s \leq f \leq t$. La función f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si sus integrales superior e inferior son iguales, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)\,.$$

1.18 El área de un conjunto de ordenadas expresada como una integral

El concepto de área se introdujo axiomáticamente en la Sección 1.6 como una función de conjunto que tiene ciertas propiedades. A partir de esas propiedades se demostró que el área de un conjunto de ordenadas de una función escalonada no negativa es igual a la integral de la función. Ahora demostramos que eso también es cierto para cualquier función integrable no negativa. Recuérdese que el conjunto de ordenadas de una función no negativa f sobre un intervalo $[a, b]$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$.

TEOREMA 1.10. *Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo $[a, b]$, y sea Q el conjunto de ordenadas de f sobre $[a, b]$. Entonces Q es medible y su área es igual a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Demostración. Sean S y T dos regiones escalonadas que satisfacen $S \subseteq Q \subseteq T$. Existen dos funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[a, b]$, tales que

$$a(S) = \int_a^b s(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad a(T) = \int_a^b t(x)\,dx\,.$$

Puesto que f es integrable en $[a, b]$, el número $I = \int_a^b f(x)\,dx$ es el único que satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx$$

para todas las funciones escalonadas s y t que cumplen $s \leq f \leq t$. Por consiguiente ése es también el único número que satisface $a(S) \leq I \leq a(T)$ para todas las regiones escalonadas S y T tales que $S \subseteq Q \subseteq T$. Según la propiedad de exhaución, esto demuestra que Q es medible y que $a(Q) = I$.

Sean Q el conjunto de ordenadas del teorema 1.10, y Q' el conjunto que queda si se quitan de Q los puntos de la gráfica de f. Esto es,

$$Q' = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y < f(x)\}.$$

El razonamiento utilizado para demostrar el teorema 1.10 también demuestra que Q' es medible y que $a(Q') = a(Q)$. Por consiguiente, según la propiedad de la diferencia relativa al área, el conjunto $Q - Q'$ es medible y

$$a(Q - Q') = a(Q) - a(Q') = 0.$$

O sea, hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 1.11. *Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo* $[a, b]$. *La gráfica de f, esto es, el conjunto*

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y = f(x)\},$$

es medible y tiene área igual a 0.

1.19 Observaciones relativas a la teoría y técnica de la integración

Una vez se ha llegado aquí se presentan dos cuestiones fundamentales: (1) *¿Qué funciones acotadas son integrables?* (2) *Supuesto que una función f es integrable, ¿cómo se calcula la integral de f?*

La primera cuestión se estudia en la «Teoría de la integración» y la segunda bajo el título de «Técnica de la integración». Una respuesta completa a la cuestión (1) corresponde a un nivel superior a la de un curso preliminar y no se estudiará en este libro. En cambio, daremos respuestas parciales que tan sólo requieren ideas elementales.

Primero introducimos una clase importante de funciones llamadas *funciones monótonas*. En la Sección siguiente definimos tales funciones y damos algunos ejemplos. Demostramos luego que todas las funciones monótonas acotadas son integrables. Por fortuna, la mayoría de las funciones que se presentan en la práctica son monótonas o sumas de funciones monótonas, de modo que los resultados de esta teoría reducida de la integración tienen una amplitud suficiente.

La discusión de la «Técnica de la integración» comienza en la Sección 1.23, donde se calcula la integral $\int_0^b x^p\, dx$, cuando p es entero positivo. Luego se desarrollan las propiedades generales de la integral, tales como la linealidad y la aditividad, y hacemos ver en qué forma esas propiedades nos ayudan a ampliar nuestros conocimientos en integrales de funciones específicas.

1.20 Funciones monótonas y monótonas a trozos. Definiciones y ejemplos

Una función f se dice que es *creciente en un conjunto S* si $f(x) \leq f(y)$ para cada par de puntos x e y de S con $x < y$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(x) < f(y)$ para todo $x < y$ en S se dice que la función es *creciente en sentido estricto en S*. Análogamente, una función se dice *decreciente en S* si $f(x) \geq f(y)$ para todo $x < y$ en S. Si $f(x) > f(y)$ para todo $x < y$ en S la función se denomina *decreciente en sentido estricto en S*. Una función se denomina *monótona en S* si es creciente en S o decreciente en S. *Monótona en sentido estricto* significa que f, o es estrictamente creciente en S o es estrictamente decreciente en S. En general, el conjunto S que se considera, o es un intervalo abierto o un intervalo cerrado. En la figura 1.33 se dan ejemplos.

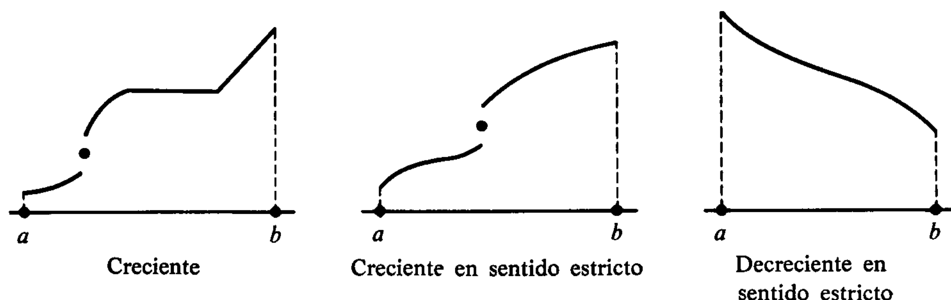


FIGURA 1.33 *Funciones monótonas.*

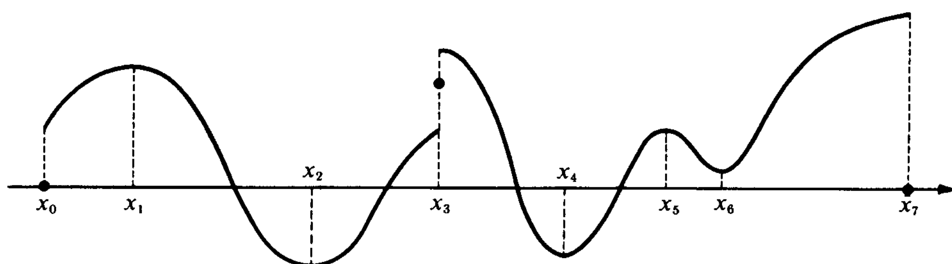


FIGURA 1.34 *Funciones monótonas a trozos.*

Una función f se dice que es *monótona a trozos* en un intervalo si su gráfica está formada por un número finito de trozos monótonos. Es decir, f es monótona a trozos en $[a, b]$ si existe una partición P de $[a, b]$ tal que f es monótona en cada uno de los subintervalos abiertos de P. En particular, las funciones escalonadas son monótonas a trozos y también lo son todos los ejemplos de las figuras 1.33 y 1.34.

EJEMPLO 1. *Las funciones potenciales.* Si p es un entero positivo, se tiene la desigualdad:

$$x^p < y^p \quad \text{si} \quad 0 \leq x < y,$$

que se puede demostrar fácilmente por inducción. Esto implica que la función f definida para todo número real x por la ecuación $f(x) = x^p$ es creciente en sentido estricto en el eje real no negativo. La misma función es monótona en sentido estricto en el eje real negativo (es decreciente si p es par y creciente si p es impar). Por tanto, f es monótona a trozos en cada intervalo finito.

EJEMPLO 2. *La función raíz cuadrada.* Sea $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. Esta función es estrictamente creciente en el eje real no negativo. En efecto, si $0 \leq x < y$, tenemos

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}};$$

luego, $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$.

EJEMPLO 3. La gráfica de la función g definida por la ecuación

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{si} \quad -r \leq x \leq r$$

es una semicircunferencia de radio r. Esta función es estrictamente creciente en el intervalo $-r \leq x \leq 0$ y estrictamente decreciente en el intervalo $0 \leq x \leq r$. Por tanto, g es una función monótona a trozos en $[-r, r]$.

1.21 Integrabilidad de funciones monótonas acotadas

La importancia de las funciones monótonas en la teoría de la integración se debe al siguiente teorema.

TEOREMA 1.12. *Si f es monótona en un intervalo cerrado $[a, b]$, f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Demostraremos el teorema para funciones crecientes. El razonamiento es análogo para funciones decrecientes. Supongamos pues f creciente y sean $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$ sus integrales inferior y superior. Demostraremos que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

Sea n un entero positivo y construyamos dos funciones escalonadas de aproximación s_n y t_n del modo siguiente: Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos iguales, esto es, subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ tales que

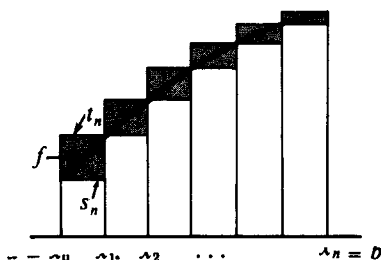
$x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$ para cada valor de k. Definamos ahora s_n y t_n por las fórmulas

$$s_n(x) = f(x_{k-1}), \qquad t_n(x) = f(x_k) \qquad \text{si} \quad x_{k-1} < x < x_k .$$

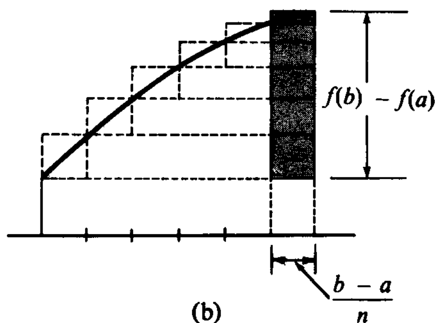
En los puntos de división, se definen s_n y t_n de modo que se mantengan las relaciones $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$ en todo $[a, b]$. En la figura 1.35(a) se muestra un ejemplo. Con esta elección de funciones escalonadas, tenemos

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{n},$$

siendo la última igualdad una consecuencia de la propiedad telescópica de las sumas finitas. Esta última relación tiene una interpretación geométrica muy sencilla. La diferencia $\int_a^b t_n - \int_a^b s_n$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos sombreados de la figura 1.35(a). Deslizando esos rectángulos hacia la derecha como se indica en la figura 1.35(b), vemos que completan un rectángulo de base



(a)



(b)

FIGURA 1.35 *Demostración de la integrabilidad de una función creciente.*

$(b - a)/n$ y altura $f(b) - f(a)$; la suma de las áreas es por tanto, C/n, siendo $C = (b - a)[f(b) - f(a)]$.

Volvamos a escribir la relación anterior en la forma

(1.8) $$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \frac{C}{n}.$$

Las integrales superior e inferior de f satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n \quad \text{y} \quad \int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n .$$

Multiplicando las primeras desigualdades por (-1) y sumando el resultado a las segundas, obtenemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n .$$

Utilizando (1.8) y la relación $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$, obtenemos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \frac{C}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I. 31, debe ser $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. Esto demuestra que f es integrable en $[a, b]$.

1.22 Cálculo de la integral de una función monótona acotada

La demostración del teorema 1.12 no solamente prueba que la integral de una función creciente acotada *existe,* sino que también sugiere un método para calcular el valor de la integral. Éste se expone en el teorema siguiente.

TEOREMA 1.13. *Supongamos f creciente en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea $x_k = a + k(b - a)/n$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Si I es un número cualquiera que satisface las desigualdades*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{1.9}$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $I = \int_a^b f(x)dx$.

Demostración. Sean s_n y t_n las funciones escalonadas de aproximación especial obtenidas por subdivisión del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, como se hizo en la demostración del teorema 1.12. Entonces, las igualdades (1.9) establecen que

$$\int_a^b s_n \leq I \leq \int_a^b t_n$$

para $n \geq 1$. Pero la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ satisface las mismas desigualdades que I. Utilizando la igualdad (1.8) vemos que

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{C}{n}$$

para todo $n \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31, tenemos $I = \int_a^b f(x)\,dx$, como se afirmó.

Con análogo razonamiento se consigue demostrar el correspondiente teorema para funciones decrecientes.

TEOREMA 1.14. *Supongamos f decreciente en $[a, b]$. Sea $x_k = c + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Si I es un número cualquiera que satisface las desigualdades*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

1.23 Cálculo de la integral $\int_0^b x^p\,dx$ siendo p entero positivo

Para mostrar como se utiliza el teorema 1.13 calcularemos la integral $\int_0^b x^p\,dx$ siendo b > 0 y p un entero positivo cualquiera. La integral existe porque el integrando es creciente y acotado en $[0, b]$.

TEOREMA 1.15. *Si p es un entero positivo y $b > 0$, tenemos*

$$\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

Demostración. Comencemos con las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

válidas para todo entero $n \geq 1$ y todo entero $p \geq 1$. Estas desigualdades pueden

demostrarse por inducción. (En el Ejercicio 13 de la Sección I 4.10 se indica una demostración.) La multiplicación de esas desigualdades por b^{p+1}/n^{p+1} nos da

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^p .$$

Si ponemos $f(x) = x^p$ y $x_k = kb/n$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, esas desigualdades se transforman en las siguientes

$$\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) .$$

Por consiguiente, las desigualdades (1.9) del teorema 1.13 se satisfacen poniendo $f(x) = x^p$, $a = 0$, y entonces $I = b^{p+1}/(p+1)$. Resulta pues que $\int_0^b x^p\, dx = b^{p+1}/(p+1)$.

1.24 Propiedades fundamentales de la integral

A partir de la definición de integral, es posible deducir las propiedades siguientes, que se demuestran en la Sección 1.27.

TEOREMA 1.16. LINEALIDAD RESPECTO AL INTEGRANDO. *Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ también lo es $c_1f + c_2g$ para cada par de constantes c_1 y c_2. Además, se tiene:*

$$\int_a^b [c_1f(x) + c_2g(x)]\, dx = c_1\int_a^b f(x)\, dx + c_2\int_a^b g(x)\, dx .$$

Nota. Aplicando el método de inducción, la propiedad de linealidad se puede generalizar como sigue: Si $f_1, \ldots f_n$ son integrables en $[a, b]$, también lo es $c_1f_1 + \cdots + c_nf_n$ para $c_1, \ldots, c_n$ reales cualesquiera y se tiene:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} c_kf_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f_k(x)\, dx .$$

TEOREMA 1.17. ADITIVIDAD RESPECTO AL INTERVALO DE INTEGRACIÓN. *Si existen dos de las tres integrales siguientes, también existe la tercera y se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx .$$

Nota: En particular, si f es monótona en $[a, b]$ y también en $[b, c]$, existen las dos integrales $\int_a^b f$ e $\int_b^c f$, con lo que también existe $\int_a^c f$ y es igual a la suma de aquéllas.

TEOREMA 1.18. INVARIANCIA FRENTE A UNA TRASLACIÓN. *Si f es integrable en $[a, b]$, para cada número real c se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\, dx\,.$$

TEOREMA 1.19. DILATACIÓN O CONTRACCIÓN DEL INTERVALO DE INTEGRACIÓN. *Si f es integrable en $[a, b]$ para cada número real $k \neq 0$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx\,.$$

Nota: En los dos teoremas 1.18 y 1.19 la existencia de una de las integrales implica la existencia de la otra. Cuando $k = -1$, el teorema 1.19 se llama *propiedad de reflexión.*

TEOREMA 1.20. TEOREMA DE COMPARACIÓN. *Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ y si $g(x) \leq f(x)$ para cada x en $[a, b]$ se tiene:*

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Un caso particular importante del teorema 1.20 se tiene cuando $g(x) = 0$ para cada x. En este caso el teorema dice que si $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. Dicho de otra manera, una función no negativa tiene integral no negativa. También se puede demostrar que si se tiene la desigualdad en *sentido estricto* $g(x) < f(x)$, para todo x en $[a, b]$, también se verifica la misma desigualdad en sentido estricto para las integrales, pero la demostración no es fácil.

En el capítulo 5 se darán varios métodos para calcular el valor de una integral sin necesidad de aplicar en cada caso la definición. Sin embargo, estos métodos sólo son aplicables a un número reducido de funciones y para la mayor parte de funciones integrables, el valor numérico de su integral sólo puede ser obtenido aproximadamente; lo que se consigue aproximando el integrando superior e inferiormente mediante funciones escalonadas, o por medio de otras funciones simples cuya integral se puede calcular exactamente. El teorema de comparación se utiliza para obtener aproximaciones de la integral de la función en cuestión. Esta idea se analizará con más cuidado en el capítulo 7.

1.25 Integración de polinomios

En la Sección 1.25 se estableció la fórmula de integración

$$\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} \tag{1.10}$$

para $b > 0$ y p entero positivo cualquiera. La fórmula es también válida si $b = 0$, ya que ambos miembros son cero. Podemos usar el teorema 1.19 para demostrar que (1.10) también es válida para b negativo. Tomemos $k = -1$ en el teorema 1.19 y se obtiene

$$\int_0^{-b} x^p\,dx = -\int_0^b (-x)^p\,dx = (-1)^{p+1}\int_0^b x^p\,dx = \frac{(-b)^{p+1}}{p+1},$$

lo cual prueba la validez de (1.10) para b negativo. La propiedad aditiva $\int_a^b x^p\,dx = \int_0^b x^p\,dx - \int_0^a x^p\,dx$ nos conduce a la fórmula más general

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1},$$

válida para todos los valores reales de a y b, y todo entero $p \geq 0$.

Algunas veces el símbolo

$$P(x)\Big|_a^b$$

se emplea para designar la diferencia $P(b) - P(a)$. De este modo la fórmula anterior puede escribirse así:

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Esta fórmula y la propiedad de linealidad, nos permiten integrar cualquier polinomio. Por ejemplo, para calcular la integral $\int_1^3 (x^2 - 3x + 5)\,dx$, hallamos la integral de cada término y sumamos luego los resultados. Así pues, tenemos

$$\int_1^3 (x^2 - 3x + 5)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx - 3\int_1^3 x\,dx + 5\int_1^3 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - 3\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 5x\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{3^3 - 1^3}{3} - 3\,\frac{3^2 - 1^2}{2} + 5\,\frac{3^1 - 1^1}{1} = \frac{26}{3} - 12 + 10 = \frac{20}{3}.$$

Con mayor generalidad, para calcular la integral de cualquier polinomio integramos término a término:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

También podemos integrar funciones más complicadas, desdoblándolas en varios polinomios. Por ejemplo, consideremos la integral $\int_0^1 |x(2x - 1)| \, dx$. Debido al signo de valor absoluto, el integrando no es un polinomio. No obstante, considerando el signo de $x(2x - 1)$, podemos descomponer el intervalo $[0, 1]$ en dos subintervalos, en cada uno de los cuales el integrando es un polinomio. Cuando x varía de 0 a 1, el producto $x(2x - 1)$ cambia de signo en el punto $x = \frac{1}{2}$; es negativo si $0 < x < \frac{1}{2}$ y positivo si $\frac{1}{2} < x < 1$. Por lo tanto, en virtud de la propiedad aditiva escribimos

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x(2x - 1)| \, dx &= -\int_0^{1/2} x(2x - 1) \, dx + \int_{1/2}^1 x(2x - 1) \, dx \\ &= \int_0^{1/2} (x - 2x^2) \, dx + \int_{1/2}^1 (2x^2 - x) \, dx \\ &= (\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{12}) + (\tfrac{7}{12} - \tfrac{3}{8}) = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

1.26 Ejercicios

Calcular cada una de las integrales siguientes.

1. $\int_0^3 x^2 \, dx.$
2. $\int_{-3}^3 x^2 \, dx.$
3. $\int_0^2 4x^3 \, dx.$
4. $\int_{-2}^2 4x^3 \, dx.$
5. $\int_0^1 5t^4 \, dt.$
6. $\int_{-1}^1 5t^4 \, dt.$
7. $\int_0^1 (5x^4 - 4x^3) \, dx.$
8. $\int_{-1}^1 (5x^4 - 4x^3) \, dx.$
9. $\int_{-1}^2 (t^2 + 1) \, dt.$
10. $\int_2^3 (3x^2 - 4x + 2) \, dx.$
11. $\int_0^{1/2} (8t^3 + 6t^2 - 2t + 5) \, dt.$
12. $\int_{-2}^4 (u - 1)(u - 2) \, du.$
13. $\int_{-1}^0 (x + 1)^2 \, dx.$
14. $\int_0^{-1} (x + 1)^2 \, dx.$
15. $\int_0^2 (x - 1)(3x - 1) \, dx.$
16. $\int_0^2 |(x - 1)(3x - 1)| \, dx.$

17. $\int_0^3 (2x - 5)^3\, dx.$

18. $\int_{-3}^3 (x^2 - 3)^3\, dx.$

19. $\int_0^5 x^2(x - 5)^4\, dx.$

20. $\int_{-2}^{-4} (x + 4)^{10}\, dx.$ [*Indicación:* Teorema 1.18.]

21. Hallar todos los valores de c para los que

(a) $\int_0^c x(1 - x)\, dx = 0,$ (b) $\int_0^c |x(1 - x)|\, dx = 0.$

22. Calcular cada una de las integrales siguientes. Dibújese la gráfica f en cada caso.

(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

(b) $\int_0^1 f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le c, \\ c\dfrac{1 - x}{1 - c} & \text{si } c \le x \le 1; \end{cases}$

c es un número real fijado, $0 < c < 1$.

23. Hallar un polinomio cuadrático P para el cual $P(0) = P(1) = 0$ y $\int_0^1 P(x)\, dx = 1.$

24. Hallar un polinomio cúbico P para el cual $P(0) = P(-2) = 0, P(1) = 15,$ y $3 \int_{-2}^0 P(x)\, dx = 4.$

Ejercicios optativos.

25. Sea f una función cuyo dominio contiene $-x$ siempre que contiene x. Se dice que f es una función *par* si $f(-x) = f(x)$ y una función *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f. Si f es integrable en $[0, b]$ demostrar que:

(a) $\int_{-b}^b f(x)\, dx = 2\int_0^b f(x)\, dx$ si f es par;

(b) $\int_{-b}^b f(x)\, dx = 0$ si f es impar.

26. Por medio de los teoremas 1.18 y 1.19 deducir la fórmula

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\int_0^1 f[a + (b - a)x]\, dx\,.$$

27. Los teoremas 1.18 y 1.19 sugieren una generalización de la integral $\int_a^b f(Ax + B)\, dx$. Obtener esa fórmula y demostrarla con el auxilio de los citados teoremas. Discutir también el caso $A = 0$.

28. Mediante los teoremas 1.18 y 1.19 demostrar la fórmula

$$\int_a^b f(c - x)\, dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x)\, dx\,.$$

1.27 Demostraciones de las propiedades fundamentales de la integral

Esta Sección contiene las demostraciones de las propiedades básicas de la integral que se citaron en los teoremas del 1.16 al 1.20 de la Sección 1.24. Usamos repetidamente el hecho de que toda función f acotada en un intervalo $[a, b]$ tiene integral inferior $\underline{I}(f)$ e integral superior $\bar{I}(f)$ dadas por

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^b s \mid s \le f\right\}, \qquad \bar{I}(g) = \inf\left\{\int_a^b t \mid f \le t\right\},$$

en donde s y t son funciones escalonadas arbitrarias inferiores y superiores a f, respectivamente. Sabemos, por el teorema 1.9, que f es integrable si y sólo si $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ en cuyo caso el valor de la integral de f es el valor común de las integrales superior e inferior.

Demostración de la propiedad de linealidad (*Teorema* 1.16). Descompongamos esa propiedad en dos partes:

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,,$$

$$\text{(B)} \qquad \int_a^b cf = c\int_a^b f\,.$$

Para demostrar (A), pongamos $I(f) = \int_a^b f$ e $I(g) = \int_a^b g$. Demostraremos que $\underline{I}(f + g) = \bar{I}(f + g) = I(f) + I(g)$.

Sean s_1 y s_2 funciones escalonadas cualesquiera inferiores a f y g, respectivamente. Puesto que f y g son integrables, se tiene

$$I(f) = \sup\left\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \le f\right\}, \qquad I(g) = \sup\left\{\int_a^b s_2 \mid s_2 \le g\right\}.$$

Por la propiedad aditiva del extremo superior (teorema I.33), también se tiene

$$\text{(1.11)} \qquad I(f) + I(g) = \sup\left\{\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 \mid s_1 \le f,\, s_2 \le g\right\}.$$

Pero si $s_1 \leq f$ y $s_2 \leq g$, entonces la suma $s = s_1 + s_2$ es una función escalonada inferior a $f + g$, y tenemos

$$\int_a^b s_1 + \int_a^b s_2 = \int_a^b s \leq \underline{I}(f+g)\,.$$

Por lo tanto, el número $\underline{I}(f + g)$ es una cota superior para el conjunto que aparece en el segundo miembro de (1.11). Esta cota superior no puede ser menor que el extremo superior del conjunto, de manera que

$$\underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leq \underline{I}(f+g)\,. \tag{1.12}$$

Del mismo modo, si hacemos uso de las relaciones

$$\overline{I}(f) = \inf\left\{\int_a^b t_1 \,\middle|\, f \leq t_1\right\}, \qquad \overline{I}(g) = \inf\left\{\int_a^b t_2 \,\middle|\, g \leq t_2\right\},$$

donde t_1 y t_2 representan funciones escalonadas arbitrarias superiores a f y g, respectivamente, obtenemos la desigualdad

$$\overline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)\,. \tag{1.13}$$

Las desigualdades (1.12) y (1.13) juntas demuestran que $\underline{I}(f + g) = \overline{I}(f + g) = I(f) + I(g)$. Por consiguiente $f + g$ es integrable y la relación (A) es cierta.

La relación (B) es trivial si $c = 0$. Si $c > 0$, observemos que toda función escalonada $s_1 = cf$ es de la forma $s_1 = cs$, siendo s una función escalonada inferior a f. Análogamente, cualquier función escalonada t_1 superior a cf es de la forma $t_1 = ct$, siendo t una función escalonada superior a f. Tenemos por lo tanto

$$\underline{I}(cf) = \sup\left\{\int_a^b s_1 \,\middle|\, s_1 \leq cf\right\} = \sup\left\{c\int_a^b s \,\middle|\, s \leq f\right\} = c\underline{I}(f)$$

y

$$\overline{I}(cf) = \inf\left\{\int_a^b t_1 \,\middle|\, cf \leq t_1\right\} = \inf\left\{c\int_a^b t \,\middle|\, f \leq t\right\} = c\overline{I}(f)\,.$$

Luego $\underline{I}(cf) = \overline{I}(cf) = cI(f)$. Aquí hemos utilizado las propiedades siguientes del extremo superior y del extremo inferior:

$$\sup\{cx \mid x \in A\} = c\sup\{x \mid x \in A\}, \qquad \inf\{cx \mid x \in A\} = c\inf\{x \mid x \in A\}, \tag{1.14}$$

que son válidas si $c > 0$. Esto demuestra (B) si $c > 0$.

Si $c < 0$, la demostración de (B) es básicamente la misma, excepto que toda función escalonada s_1 inferior a cf es de la forma $s_1 = ct$, siendo t una función escalonada *superior* a f y toda función escalonada t_1 superior a cf es de la forma $t_1 = cs$, siendo s una función escalonada *inferior* a f. Asimismo, en lugar de (1.14) utilizamos las relaciones

$$\sup\{cx \mid x \in A\} = c \inf\{x \mid x \in A\}, \qquad \inf\{cx \mid x \in A\} = c \sup\{x \mid x \in A\},$$

que son ciertas si $c < 0$. Tenemos pues

$$\underline{I}(cf) = \sup\left\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \leq cf\right\} = \sup\left\{c\int_a^b t \mid f \leq t\right\} = c \inf\left\{\int_a^b t \mid f \leq t\right\} = c\bar{I}(f).$$

Análogamente, encontramos $\bar{I}(cf) = c\underline{I}(f)$. Por consiguiente (B) es cierta para cualquier valor real de c.

Demostración de la aditividad respecto al intervalo de integración (*Teorema* 1.17). Supongamos que $a < b < c$, y que las dos integrales $\int_a^b f$ e $\int_b^c f$ existen. Designemos con $\underline{I}(f)$ e $\bar{I}(f)$ las integrales superior e inferior de f en el intervalo $[a, c]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{1.15}$$

Si s es una función escalonada cualquiera inferior a f en $[a, c]$, se tiene

$$\int_a^c s = \int_a^b s + \int_b^c s.$$

Recíprocamente, si s_1 y s_2 son funciones escalonadas inferiores a f en $[a, b]$ y $[b, c]$ respectivamente, la función s que coincide con s_1 en $[a, b]$ y con s_2 en $[b, c]$ es una función escalonada inferior a f en $[a, c]$ para la que

$$\int_a^c s = \int_a^b s_1 + \int_b^c s_2.$$

Por consiguiente, en virtud de la propiedad aditiva del extremo superior (teorema 1.33), tenemos

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\int_a^c s \mid s \leq f\right\} = \sup\left\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \leq f\right\} + \sup\left\{\int_b^c s_2 \mid s_2 \leq f\right\} = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Análogamente, encontramos

$$\bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f ,$$

lo que demuestra (1.15) cuando $a < b < c$. La demostración es parecida para cualquier otra disposición de los puntos a, b, c.

Demostración de la propiedad de traslación (*Teorema* 1.18). Sea g la función definida en el intervalo $[a + c, b + c]$ por la ecuación $g(x) = f(x - c)$. Designemos por $\underline{I}(g)$ e $\bar{I}(g)$ las integrales superior e inferior de g en el intervalo $[a + c, b + c]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = \int_a^b f(x)\,dx . \tag{1.16}$$

Sea s cualquier función escalonada inferior a g en el intervalo $[a + c, b + c]$. Entonces la función s_1 definida en $[a, b]$ por la ecuación $s_1(x) = s(x + c)$ es una función escalonada inferior a f en $[a, b]$. Además, toda función escalonada s_1 inferior a f en $[a, b]$ tiene esta forma para un cierta s inferior a g. También, por la propiedad de traslación para las integrales de las funciones escalonadas, tenemos

$$\int_{a+c}^{b+c} s(x)\,dx = \int_a^b s(x + c)\,dx = \int_a^b s_1(x)\,dx .$$

Por consiguiente se tiene

$$\underline{I}(g) = \sup \left\{ \int_{a+c}^{b+c} s \mid s \le g \right\} = \sup \left\{ \int_a^b s_1 \mid s_1 \le f \right\} = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Análogamente, encontramos $\bar{I}(g) = \int_a^b f(x)\,dx$, que prueba (1.16).

Demostración de la propiedad de dilatación y contracción (*Teorema* 1.19). Supongamos $k > 0$ y definamos g en el intervalo $[ka, kb]$ para la igualdad $g(x) = f(x/k)$. Designemos por $\underline{I}(g)$ e $\bar{I}(g)$ las integrales inferior y superior de g en $[ka, kb]$. Demostraremos que

$$\underline{I}(g) = \bar{I}(g) = k \int_a^b f(x)\,dx . \tag{1.17}$$

Sea s cualquier función escalonada inferior a g en $[ka, kb]$. Entonces la función definida en $[a, b]$ por la igualdad $s_1(x) = s(kx)$ es una función escalonada

inferior a f en $[a, b]$. Además, toda función escalonada s_1 inferior a f en $[a, b]$ tiene esta forma. También, en virtud de la propiedad de dilatación para las integrales de funciones escalonadas, tenemos

$$\int_{ka}^{kb} s(x)\,dx = k \int_a^b s(kx)\,dx = k \int_a^b s_1(x)\,dx\,.$$

Por consiguiente

$$\underline{I}(g) = \sup \left\{\int_{ka}^{kb} s \mid s \le g\right\} = \sup \left\{k \int_a^b s_1 \mid s_1 \le f\right\} = k \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Análogamente, encontramos $\bar{I}(g) = k\int_a^b f(x)\,dx$, que demuestra (1.17) si $k > 0$. El mismo tipo de demostración puede utilizarse si $k < 0$.

Demostración del teorema de comparación (*Teorema* 1.20). Supongamos $g \le f$ en el intervalo $[a, b]$. Sea s cualquier función escalonada inferior a g, y sea t cualquier función escalonada superior a f. Se tiene entonces $\int_a^b s \le \int_a^b t$, y por tanto el teorema I.34 nos da

$$\int_a^b g = \sup \left\{\int_a^b s \mid s \le g\right\} \le \inf \left\{\int_a^b t \mid f \le t\right\} = \int_a^b f\,.$$

Esto demuestra que $\int_a^b g \le \int_a^b f$, como deseábamos.

2

ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

2.1 Introducción

En la Sección 1.18 se expresó el área de un conjunto de ordenadas de una función no negativa como una integral. En este capítulo demostraremos que también se pueden expresar mediante integrales las áreas de regiones más generales. Asimismo discutiremos otras aplicaciones de la integral a conceptos tales como volumen, trabajo, y promedios. Luego, al final del capítulo, estudiaremos las propiedades de las funciones definidas mediante integrales.

2.2 El área de una región comprendida entre dos gráficas expresada como una integral

Si dos funciones f y g están relacionadas por la desigualdad $f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo $[a, b]$, ponemos $f \leq g$ en $[a, b]$. En la figura 2.1 se ven dos ejemplos. Si $f \leq g$ en $[a, b]$, el conjunto S consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades

$$f(x) \leq y \leq g(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

se denomina región entre las gráficas de f y g. El siguiente teorema nos dice cómo se expresa el área de S como una integral.

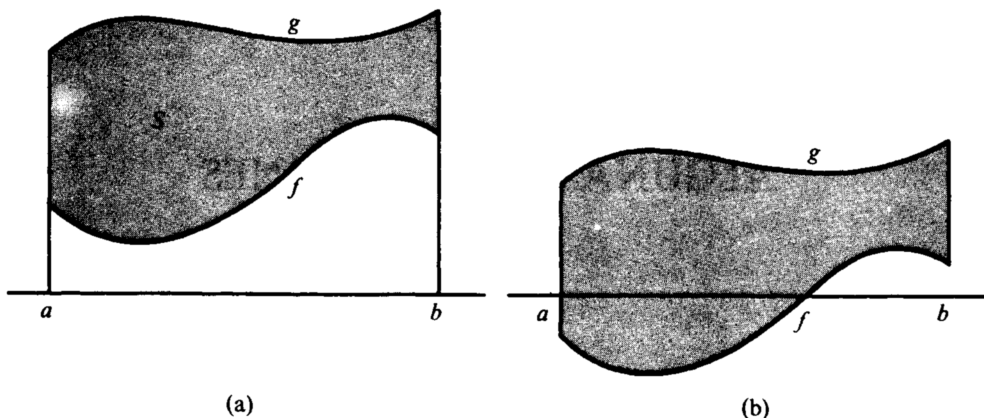


FIGURA 2.1 *El área entre dos gráficas expresada como una integral:*
$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

TEOREMA 2.1. *Supongamos que f y g son integrables y que satisfacen $f \leq g$ en $[a, b]$. La región S entre sus gráficas es medible y su área $a(S)$ viene dada por la integral*

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx\,. \tag{2.1}$$

Demostración. Supongamos primero que f y g son no negativas, como se muestra en la figura 2.1(a). Sean F y G los siguientes conjuntos:

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y < f(x)\}\,, \quad G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq g(x)\}\,.$$

Esto es, G es el conjunto de ordenadas de g, y F el de f, menos la gráfica de f. La región S es la diferencia $G - F$. Según los teoremas 1.10 y 1.11, F y G son ambos medibles. Puesto que $F \subseteq G$, la diferencia $S = G - F$ es también medible, y se tiene

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx\,.$$

Esto demuestra (2.1) cuando f y g son no negativas.

Consideremos ahora el caso general cuando $f \leq g$ en $[a, b]$, pero no son necesariamente no negativas. En la figura 2.1(b) se muestra un ejemplo. Este caso

lo podemos reducir al anterior trasladando la región hacia arriba hasta que quede situada por encima del eje x. Esto es, elegimos un número positivo c suficientemente grande que asegure que $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ para todo x en $[a, b]$. Por lo ya demostrado, la nueva región T entre las gráficas de $f + c$ y $g + c$ es medible, y su área viene dada por la integral

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)]\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx .$$

Pero siendo T congruente a S, ésta es también medible y tenemos

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx .$$

Esto completa la demostración.

2.3 Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1. Calcular el área de la región S situada entre las gráficas de f y g sobre el intervalo $[0, 2]$ siendo $f(x) = x(x - 2)$ y $g(x) = x/2$.

Solución. Las dos gráficas están dibujadas en la figura 2.2. La porción sombreada representa S. Ya que $f \leq g$ en el intervalo $[0, 2]$, hacemos uso del teorema 2.1 para escribir

$$a(S) = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - x^2\right) dx = \frac{5}{2}\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{7}{3} .$$

EJEMPLO 2. Calcular el área de la región S entre las gráficas de f y g en el intervalo $[-1, 2]$ si $f(x) = x$ y $g(x) = x^3/4$.

Solución. La región S está representada en la figura 2.3. Ahora no es $f \leq g$ en todo el intervalo $[-1, 2]$. No obstante, tenemos $f \leq g$ en el subintervalo $[-1, 0]$ y $g \leq f$ en el subintervalo $[0, 2]$. Aplicando el teorema 2.1 a cada subintervalo, tenemos

$$a(S) = \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)]\, dx + \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx =$$

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{4} - x\right) dx + \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{2^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{2^4}{4} = \frac{23}{16} .$$

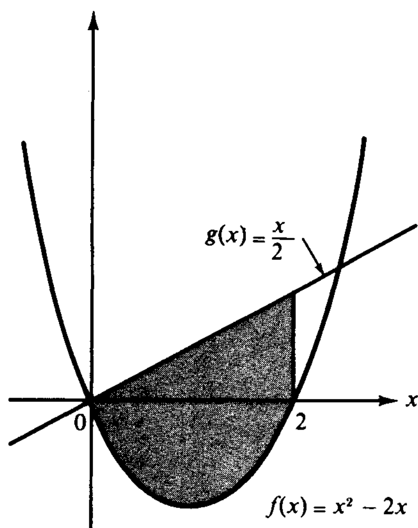


FIGURA 2.2 *Ejemplo* 1.

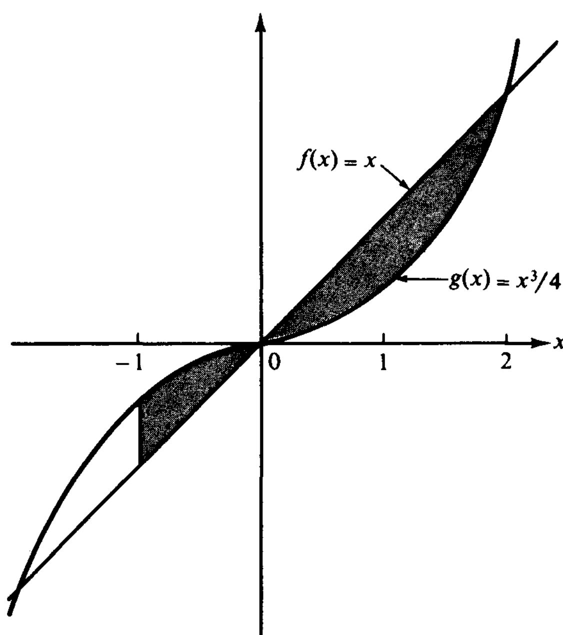


FIGURA 2.3 *Ejemplo* 2.

En ejemplos parecidos a éste, en los que el intervalo $[a, b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales $f \leq g$ o $g \leq f$, la fórmula (2.1) del teorema 2.1 adopta la forma

$$a(S) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx\,.$$

EJEMPLO 3. *Área de un disco circular.* Un disco circular de radio r es el conjunto de todos los puntos interiores a una circunferencia de radio r y de los puntos de la misma. Tal disco es congruente a la región comprendida entre las gráficas de las dos funciones f y g definidas en el intervalo $[-r, r]$ por las fórmulas

$$g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{y} \quad f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Cada función es acotada y monótona en $[-r, r]$ de modo que cada una es integrable en $[-r, r]$. El teorema 2.1 nos dice que la región en este caso es medible y

que su área es $\int_{-r}^{r} [g(x) - f(x)]\, dx$. Designemos con $A(r)$ el área del disco. Demostraremos que

$$A(r) = r^2 A(1)\,.$$

Esto es, *el área de un disco de radio r es igual al producto del área de un disco unidad* (disco de radio 1) *por* r^2.

Ya que $g(x) - f(x) = 2g(x)$, el teorema 2.1 nos da

$$A(r) = \int_{-r}^{r} 2g(x)\, dx = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,.$$

En particular, cuando $r = 1$, se tiene la fórmula

$$A(1) = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx\,.$$

Cambiando la escala en el eje x, y utilizando el teorema 1.19 con $k = 1/r$, se obtiene

$$A(r) = 2 \int_{-r}^{r} g(x)\, dx = 2r \int_{-1}^{1} g(rx)\, dx = 2r \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\, dx =$$

$$= 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = r^2 A(1)\,.$$

Esto demuestra que $A(r) = r^2 A(1)$, como se afirmó.

DEFINICIÓN. *Se define el número* π *como el área de un disco unidad.*

La fórmula que se acaba de demostrar establece que $A(r) = \pi r^2$.

El ejemplo anterior ilustra el comportamiento del área frente a la dilatación o contracción de las regiones planas. Supongamos que S es un conjunto dado de puntos del plano y consideremos un nuevo conjunto de puntos obtenido multiplicando las coordenadas de cada punto de S por un factor constante $k > 0$. Designemos este conjunto por kS y digamos que es semejante a S. El proceso que produce kS a partir de S tiene el nombre genérico de *transformación por semejanza*. Cada punto se desplaza a lo largo de una recta que pasa por el origen hasta una distancia de éste igual al producto de la distancia original por k. Si $k > 1$, la transformación es una *expansión* a partir del origen, u *homotecia* de centro el origen y razón mayor que la unidad, y, si $0 < k < 1$, se tiene una *contracción* hacia el origen, u *homotecia* de centro el origen y razón menor que la unidad.

Por ejemplo, si S es la región limitada por una circunferencia unidad con centro en el origen, kS es una región circular concéntrica de radio k. En el ejemplo 3 se demostró que para regiones circulares, el área de kS es igual al producto del área de S por k^2. Vamos ahora a demostrar que esta propiedad del área es válida para cualquier conjunto de ordenadas.

EJEMPLO 4. *Comportamiento del área de un conjunto de ordenadas frente a una transformación por semejanza.* Sea f no negativa e integrable en $[a, b]$ y S su conjunto de ordenadas. En la figura 2.4(a) se representa un ejemplo. Si aplicamos una transformación por semejanza con un factor positivo k, kS es el conjunto de ordenadas de una nueva función g sobre el intervalo $[ka, kb]$ [Véase la figura 2.4(b).] Un punto (x, y) está situado en la gráfica de g si y sólo si el punto $(x/k, y/k)$ está en la gráfica de f. Luego $y/k = f(x/k)$, de modo que $y = kf(x/k)$. Dicho de otro modo, la nueva función g está ligada a f por la fórmula

$$g(x) = kf(x/k)$$

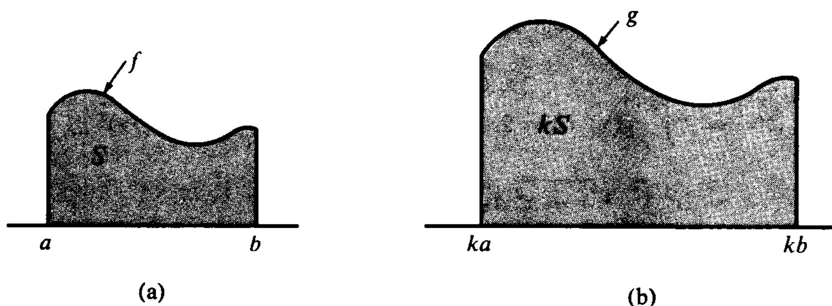


FIGURA 2.4 *El área de kS es el producto de la de S por k^2.*

para cada x de $[ka, kb]$. Por consiguiente, el área de kS viene dada por

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\, dx = k \int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = k^2 \int_a^b f(x)\, dx\,,$$

donde en el último paso se ha usado la propiedad de dilatación para las integrales (teorema 1.9). Puesto que $\int_a^b f(x)\, dx = a(S)$, esto demuestra que $a(kS) = k^2 a(S)$. En otras palabras, el área de kS es el producto de la de S por k^2.

EJEMPLO 5. *Cálculo de la integral $\int_0^a x^{1/2}\, dx$.* La integral respecto del área es como una espada de dos filos. Si bien de ordinario se usa la integral para calcular áreas, algunas veces podemos utilizar nuestro conocimiento del área para

calcular integrales. Como ejemplo calculamos el valor de la integral $\int_0^a x^{1/2}\,dx$, siendo $a > 0$. (La integral existe ya que el integrando es creciente y acotado en $[0, a]$.)

La figura 2.5 representa la gráfica de la función f dada por $f(x) = x^{1/2}$ en el intervalo $[0, a]$. Su conjunto de ordenadas S tiene un área dada por

$$a(S) = \int_0^a x^{1/2}\,dx\,.$$

Calculemos ahora el área por otro procedimiento. Observamos simplemente en la figura 2.5 la región S y la región sombreada T, que juntas completan el rectángulo de base a y altura $a^{1/2}$. Por tanto, $a(S) + a(T) = a^{3/2}$, de modo que

$$a(S) = a^{3/2} - a(T)\,.$$

Pero T es el conjunto de ordenadas de una función g definida sobre el intervalo $[0, a^{1/2}]$ del eje y mediante la ecuación $g(y) = y^2$. Así pues, tenemos

$$a(T) = \int_0^{a^{1/2}} g(y)\,dy = \int_0^{a^{1/2}} y^2\,dy = \tfrac{1}{3}a^{3/2}\,,$$

de modo que $a(S) = a^{3/2} - \frac{1}{3}a^{3/2} = \frac{2}{3}a^{3/2}$. Esto demuestra que

$$\int_0^a x^{1/2}\,dx = \tfrac{2}{3}\,a^{3/2}\,.$$

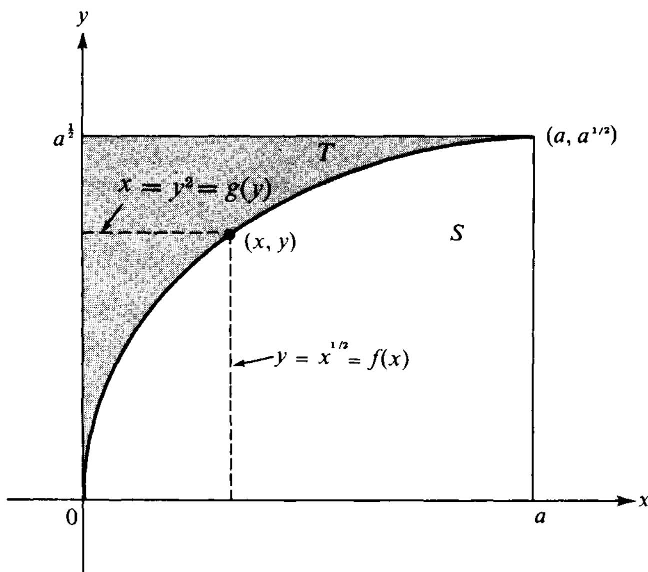


FIGURA 2.5 *Cálculo de la integral* $\int_0^a x^{1/2}\,dx$.

Más general, si $a > 0$ y $b > 0$, podemos usar la propiedad aditiva de la integral para obtener la fórmula

$$\int_a^b x^{1/2}\,dx = \tfrac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})\,.$$

El razonamiento anterior puede también usarse para calcular la integral $\int_a^b x^{1/n}\,dx$, si n es un entero positivo. Establecemos el resultado en forma de teorema.

TEOREMA 2.2. *Para $a > 0$, $b > 0$ y n entero positivo, se tiene*

$$\int_a^b x^{1/n}\,dx = \frac{b^{1+1/n} - a^{1+1/n}}{1 + 1/n}\,. \tag{2.2}$$

La demostración es tan parecida a la del ejemplo 5 que dejamos los detalles al lector.

2.4 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 14, calcular el área de la región S entre las gráficas de f y g para el intervalo $[a, b]$ que en cada caso se especifica. Hacer un dibujo de las dos gráficas y sombrear S.

1. $f(x) = 4 - x^2$,	$g(x) = 0$,	$a = -2$,	$b = 2$.
2. $f(x) = 4 - x^2$,	$g(x) = 8 - 2x^2$,	$a = -2$,	$b = 2$.
3. $f(x) = x^3 + x^2$,	$g(x) = x^3 + 1$,	$a = -1$,	$b = 1$.
4. $f(x) = x - x^2$,	$g(x) = -x$,	$a = 0$,	$b = 2$.
5. $f(x) = x^{1/3}$,	$g(x) = x^{1/2}$,	$a = 0$,	$b = 1$.
6. $f(x) = x^{1/3}$,	$g(x) = x^{1/2}$,	$a = 1$,	$b = 2$.
7. $f(x) = x^{1/3}$,	$g(x) = x^{1/2}$,	$a = 0$,	$b = 2$.
8. $f(x) = x^{1/2}$,	$g(x) = x^2$,	$a = 0$,	$b = 2$.
9. $f(x) = x^2$,	$g(x) = x + 1$,	$a = -1$,	$b = (1 + \sqrt{5})/2$.
10. $f(x) = x(x^2 - 1)$,	$g(x) = x$,	$a = -1$,	$b = \sqrt{2}$.
11. $f(x) = \|x\|$,	$g(x) = x^2 - 1$,	$a = -1$,	$b = 1$.
12. $f(x) = \|x - 1\|$,	$g(x) = x^2 - 2x$,	$a = 0$,	$b = 2$.
13. $f(x) = 2\,\|x\|$,	$g(x) = 1 - 3x^3$,	$a = -\sqrt{3}/3$,	$b = \frac{1}{3}$.
14. $f(x) = \|x\| + \|x - 1\|$,	$g(x) = 0$,	$a = -1$,	$b = 2$.

15. Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = cx^3$, siendo $c > 0$, se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/c, 1/c^2)$. Determinar c de modo que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $[0,1/c]$ tenga área $\frac{2}{3}$.
16. Sean $f(x) = x - x^2$, $g(x) = ax$. Determinar a para que la región situada por encima de la gráfica de g y por debajo de f tenga área $\frac{9}{2}$.

17. Hemos definido π como el área de un disco circular unidad. En el ejemplo 3 de la Sección 2.3, se ha demostrado que $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Hacer uso de las propiedades de la integral para calcular la siguiente en función de π:

(a) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$; (b) $\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx$; (c) $\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

18. Calcular las áreas de los dodecágonos regulares inscrito y circunscrito en un disco circular unidad y deducir del resultado las desigualdades $3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$.
19. Sea C la circunferencia unidad, cuya ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 = 1$. Sea E el conjunto de puntos obtenido multiplicando la coordenada x de cada punto (x, y) de C por un factor constante $a > 0$ y la coordenada y por un factor constante $b > 0$. El conjunto E se denomina elipse. (Cuando $a = b$, la elipse es otra circunferencia.)
 a) Demostrar que cada punto (x, y) de E satisface la ecuación cartesiana $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.
 b) Utilizar las propiedades de la integral para demostrar que la región limitada por esa elipse es medible y que su área es πab.
20. El Ejercicio 19 es una generalización del ejemplo 3 de la Sección 2.3. Establecer y demostrar una generalización correspondiente al ejemplo 4 de la Sección 2.3.
21. Con un razonamiento parecido al del ejemplo 5 de la Sección 2.3 demostrar el teorema 2.2.

2.5 Las funciones trigonométricas

Antes de introducir más aplicaciones de la integración, haremos una breve digresión para comentar las funciones trigonométricas. Suponemos que el lector tiene algún conocimiento de las propiedades de las seis funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante; y sus inversas arco seno, arco coseno, arco tangente, etc. Estas funciones se discuten en los cursos de Trigonometría en relación con problemas diversos que relacionan los lados y los ángulos de los triángulos.

Las funciones trigonométricas son importantes en Cálculo, no sólo por su relación con los lados y los ángulos de un triángulo, sino más bien por las propiedades que poseen como *funciones*. Las seis funciones trigonométricas tienen en común una propiedad importante llamada periodicidad.

Una función f es *periódica* con período $p \neq 0$ si su dominio contiene $x + p$ siempre que contenga x y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x del dominio de f. Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π, siendo π el área de un disco circular unidad. Muchos problemas en Física e Ingeniería tratan fenómenos periódicos (tales como vibraciones, movimiento planetario y de ondas) y las funciones seno y coseno constituyen la base para el análisis matemático de tales problemas.

Las funciones seno y coseno pueden introducirse de varias maneras. Por ejemplo, hay definiciones geométricas que relacionan las funciones seno y coseno

a los ángulos, y hay otras de carácter analítico que introducen esas funciones sin referencia alguna a la Geometría. Unas y otras son equivalentes, en el sentido de que todas ellas conducen a las mismas funciones.

De ordinario, cuando trabajamos con senos y cosenos no nos importan tanto sus definiciones como las propiedades que pueden deducirse a partir de sus definiciones. Algunas de esas propiedades, importantes en Cálculo, se citan seguidamente. Corrientemente, designamos los valores de las funciones seno y coseno de x poniendo $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, respectivamente.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL SENO Y DEL COSENO.

1. *Dominio de definición. Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.*

2. *Valores especiales. Tenemos* $\cos 0 = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos \pi = -1$.

3. *Coseno de una diferencia. Para x e y cualesquiera, tenemos*

$$\cos (y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x . \tag{2.3}$$

4. *Desigualdades fundamentales. Para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, tenemos*

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x} . \tag{2.4}$$

A partir de esas cuatro propiedades podemos deducir todas las propiedades del seno y del coseno que tienen importancia en Cálculo. Esto sugiere que podemos introducir las funciones trigonométricas axiomáticamente. Esto es, podríamos tomar las propiedades 1 a 4 como axiomas del seno y del coseno y deducir todas las demás propiedades como teoremas. Para trabajar correctamente no debe discutirse sobre una teoría vacía, es necesario probar que existen funciones que satisfacen las propiedades anteriores. Por el momento pasaremos de largo este problema. Primero suponemos que existen funciones que satisfacen estas propiedades fundamentales y mostraremos cómo pueden deducirse las demás propiedades. Luego, en la Sección 2.7, indicamos un método geométrico para definir el seno y el coseno como funciones con las propiedades deseadas. En el capítulo 11 también esbozamos un método para definir el seno y el coseno.

TEOREMA 2.3. *Si dos funciones* sen *y* cos *satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:*

(a) *La identidad pitagórica,* $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, *para todo* x.

(b) *Valores especiales,* $\operatorname{sen} 0 = \cos \frac{1}{2}\pi = \operatorname{sen} \pi = 0$.

(c) *El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo x tenemos*

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x.$$

(d) *Co-relaciones. Para todo x, se tiene*

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x, \qquad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x.$$

(e) *Periodicidad. Para todo x, se tiene* $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

(f) *Fórmulas de adición. Para x e y cualesquiera, se tiene*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

(g) *Fórmulas de diferencias. Para todos los valores a y b, se tiene*

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a - b}{2} \cos \frac{a + b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a - b}{2} \operatorname{sen} \frac{a + b}{2}.$$

(h) *Monotonía. En el intervalo* $[0, \frac{1}{2}\pi]$, *el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente.*

Demostración. La parte (a) se deduce inmediatamente si tomamos $x = y$ en (2.3) y usamos la relación $\cos 0 = 1$. La propiedad (b) resulta de la (a) tomando $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$ y utilizando la relación $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$. Que el coseno es par resulta también de (2.3) haciendo $y = 0$. A continuación deducimos la fórmula

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x, \tag{2.5}$$

haciendo $y = \frac{1}{2}\pi$ en (2.3). Partiendo de esto y de (2.3), encontramos que el seno es impar, puesto que

$$\operatorname{sen}(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] =$$

$$= \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x.$$

Esto demuestra (c). Para probar (d), utilizamos otra vez (2.5), reemplazando primero x por $\frac{1}{2}\pi + x$ y luego x por $-x$. El uso reiterado de (d) nos da entonces las relaciones de periodicidad (e).

Para demostrar las fórmulas de adición para el coseno, basta reemplazar x por $-x$ en (2.3) y tener en cuenta la paridad o imparidad. Utilizando la parte (d) y la fórmula de adición para el coseno se obtiene

$$\operatorname{sen}(x + y) = -\cos\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y .$$

Esto demuestra (f). Para deducir las fórmulas de diferencias (g), reemplazamos primero y por $-y$ en la fórmula de adición para $\operatorname{sen}(x + y)$ obteniendo

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y .$$

Restando ésta de la fórmula para $\operatorname{sen}(x + y)$ y haciendo lo mismo para la función coseno, llegamos a

$$\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2 \operatorname{sen} y \cos x ,$$
$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x .$$

Haciendo $x = (a + b)/2$, $y = (a - b)/2$, encontramos que esas se convierten en las fórmulas de diferencias (g).

Las propiedades de la (a) a la (g) se han deducido sólo con las 1, 2 y 3. La propiedad 4 se usa para demostrar (h). Las desigualdades (2.4) prueban que $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ son positivas si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Después de esto, si $0 < b < a < \frac{1}{2}\pi$, los números $(a + b)/2$ y $(a - b)/2$ están en el intervalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$, y las fórmulas de diferencias (g) prueban que $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$ y $\cos a < \cos b$. Esto completa la demostración del teorema 2.3.

En el próximo conjunto de Ejercicios (página 129) se consideran más propiedades de las funciones seno y coseno. Mencionamos, en particular, dos fórmulas que con frecuencia se usan en Cálculo. Son las llamadas del *ángulo doble* o *fórmulas de duplicación*. Tenemos

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x , \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x .$$

Estos son, naturalmente, simples casos particulares de las fórmulas de adición obtenidos haciendo $y = x$. La segunda fórmula para $\cos 2\pi$ resulta de la primera con la identidad pitagórica. Ésta también demuestra que $|\cos x| \leq 1$ y $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para todo x.

2.6 Fórmulas de integración para el seno y el coseno

Las propiedades de monotonía de la parte (h) del teorema 2.3, junto con las correlaciones y la periodicidad, demuestran que las funciones seno y coseno son monótonas a trozos en cualquier intervalo. Por consiguiente, mediante el uso repetido del teorema 1.12, vemos que el seno y el coseno son integrables en cualquier intervalo finito. Calcularemos sus integrales aplicando el teorema 1.14. Este cálculo utiliza dos desigualdades que nosotros enunciamos como un teorema:

TEOREMA 2.4. *Si* $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$, *y* $n \geq 1$, *tenemos*

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ka}{n}. \tag{2.6}$$

Demostración. Las desigualdades (2.6) serán deducidas de la identidad

$$2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x, \tag{2.7}$$

válida para $n \geq 1$ y todo real x. Para demostrar (2.7), utilizamos las fórmulas de diferencias (g) del teorema 2.3 para poner

$$2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\cos kx = \operatorname{sen}(k+\tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}(k-\tfrac{1}{2})x.$$

Haciendo $k = 1, 2, \ldots, n$ y sumando esas igualdades, encontramos que en la suma del segundo miembro se reducen unos términos con otros obteniéndose (2.7).

Si $\frac{1}{2}x$ no es un múltiplo entero de π podemos dividir ambos miembros de (2.7) por $2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ resultando

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}.$$

Reemplazando n por $n - 1$ y sumando 1 a ambos miembros también obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}.$$

Esas dos fórmulas son válidas si $x \neq 2m\pi$, siendo m entero. Tomando $x = a/n$, donde $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$ encontramos que el par de desigualdades (2.6) es equivalente al siguiente

$$\frac{a}{n}\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)} < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\,\frac{\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}$$

Este par, a su vez, es equivalente al par

$$\text{(2.8)} \qquad \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)}\operatorname{sen} a < \operatorname{sen}(n-\tfrac{1}{2})\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right).$$

Por consiguiente, demostrar (2.6) equivale a demostrar (2.8). Demostraremos que se tiene

$$\text{(2.9)} \qquad \operatorname{sen}(2n+1)\theta - \operatorname{sen}\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen} 2n\theta < \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta$$

para $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Cuando $\theta = a/(2n)$ (2.9) se reduce a (2.8).

Para demostrar la desigualdad de la parte izquierda de (2.9), usamos la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\text{(2.10)} \qquad \operatorname{sen}(2n+1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta < \operatorname{sen} 2n\theta\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} + \operatorname{sen}\theta,$$

habiendo usado también las desigualdades

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}, \qquad 0 < \cos 2n\theta \leq 1, \qquad \operatorname{sen}\theta > 0,$$

siendo todas válidas ya que $0 < 2n\theta \leq \frac{1}{2}\pi$. La desigualdad (2.10) equivale a la parte izquierda de (2.9).

Para demostrar la desigualdad de la parte derecha de (2.9), utilizamos nuevamente la fórmula de adición para el seno poniendo

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\cos\theta - \cos 2n\theta\operatorname{sen}\theta.$$

Sumando sen θ a ambos miembros, obtenemos

$$\text{(2.11)} \qquad \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta}\right).$$

Pero ya que tenemos

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2 n\theta}{2\operatorname{sen} n\theta\cos n\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta},$$

el segundo miembro de (2.11) es igual a

$$\operatorname{sen} 2n\theta\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}\right) = \operatorname{sen} 2n\theta\,\frac{\cos\theta\cos n\theta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} =$$

$$= \operatorname{sen} 2n\theta\,\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}.$$

Por consiguiente, para completar la demostración de (2.9), necesitamos tan sólo demostrar que

$$\text{(2.12)} \qquad \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$$

Pero tenemos

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\theta\cos\theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta\operatorname{sen}\theta <$$

$$< \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta\,\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

en donde otra vez hemos utilizado la desigualdad fundamental $\cos\theta < \theta/(\operatorname{sen}\theta)$. Esta última relación implica (2.12), con lo que se completa la demostración del teorema 2.4.

TEOREMA 2.5. *Si dos funciones* sen *y* cos *satisfacen las propiedades fundamentales de la 1 a la 4, para todo a real se tiene*

$$\text{(2.13)} \qquad \int_0^a \cos x\, dx = \operatorname{sen} a,$$

$$\text{(2.14)} \qquad \int_0^a \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos a.$$

Demostración. Primero se demuestra (2.13), y luego usamos (2.13) para deducir (2.14). Supongamos que $0 < a \leq \frac{1}{2}\pi$. Ya que el coseno es decreciente en $[0, a]$, podemos aplicar el teorema 1.14 y las desigualdades del teorema 2.4 obteniendo (2.13). La fórmula es válida también para $a = 0$, ya que ambos miembros son cero. Pueden ahora utilizarse las propiedades de la integral para ampliar su validez a todos los valores reales a.

Por ejemplo, si $-\frac{1}{2}\pi \leq a \leq 0$, entonces $0 \leq -a \leq \frac{1}{2}\pi$, y la propiedad de reflexión nos da

$$\int_0^a \cos x\, dx = -\int_0^{-a} \cos(-x)\, dx = -\int_0^{-a} \cos x\, dx = -\operatorname{sen}(-a) = \operatorname{sen} a\,.$$

Así, pues, (2.13) es válida en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Supongamos ahora que $\frac{1}{2}\pi \leq a \leq \frac{3}{2}\pi$. Entonces $-\frac{1}{2}\pi \leq a - \pi \leq \frac{1}{2}\pi$, de modo que

$$\int_0^a \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^a \cos x\, dx = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos(x + \pi)\, dx =$$
$$= 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x\, dx = 1 - \operatorname{sen}(a - \pi) + \operatorname{sen}(-\tfrac{1}{2}\pi) = \operatorname{sen} a\,.$$

Con ello resulta que (2.13) es válida para todo a en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$. Pero este intervalo tiene longitud 2π, con lo que la fórmula (2.13) es válida para todo a puesto que ambos miembros son periódicos respecto a con período 2π.

Seguidamente usamos (2.13) para deducir (2.14). Ante todo demostramos que (2.14) es válida cuando $a = \pi/2$. Aplicando sucesivamente, la propiedad de traslación, la co-relación $\operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$, y la propiedad de reflexión, encontramos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \int_{-\pi/2}^0 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \int_{-\pi/2}^0 \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(-x)\, dx\,.$$

Haciendo uso de la relación $\cos(-x) = \cos x$ y la igualdad (2.13), se obtiene

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1\,.$$

Por consiguiente, para cualquier a real, podemos escribir

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi/2}^a \operatorname{sen} x\, dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx =$$
$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x\, dx = 1 + \operatorname{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos a\,.$$

Esto demuestra que la igualdad (2.13) implica (2.14).

EJEMPLO 1. Usando (2.13) y (2.14) junto con la propiedad aditiva

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx,$$

llegamos a las fórmulas de integración más generales

$$\int_a^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx = (1 - \cos b) - (1 - \cos a) = -(\cos b - \cos a)\,.$$

Si nuevamente utilizamos el símbolo especial $f(x)\,\big|_a^b$ para indicar la diferencia $f(b) - f(a)$, podemos escribir esas fórmulas de integración en la forma

$$\int_a^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\,\Big|_a^b \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\,\Big|_a^b\,.$$

EJEMPLO 2. Con los resultados del ejemplo 1 y la propiedad de dilatación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x/c)\,dx\,,$$

obtenemos las fórmulas siguientes, válidas para $c \neq 0$:

$$\int_a^b \cos cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \cos x\,dx = \frac{1}{c}(\operatorname{sen} cb - \operatorname{sen} ca)\,,$$

y

$$\int_a^b \operatorname{sen} cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{c}(\cos cb - \cos ca)\,.$$

EJEMPLO 3. La identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ implica $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con lo que, a partir del ejemplo 2, obtenemos

$$\int_0^a \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a\,.$$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, encontramos también

$$\int_0^a \cos^2 x\, dx = \int_0^a (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = a - \int_0^a \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2a\,.$$

2.7 Descripción geométrica de las funciones seno y coseno

En esta Sección indicamos un método geométrico para definir las funciones seno y coseno, y damos una interpretación geométrica de las propiedades fundamentales citadas en la Sección 2.5.

Consideremos una circunferencia de radio r y centro en el origen. Designemos el punto $(r, 0)$ por A, y sea P cualquier otro punto de la circunferencia. Los dos segmentos rectilíneos OA y OP determinan una figura geométrica llamada ángulo que representamos con el símbolo $\angle AOP$. Un ejemplo se representa en la figura 2.6. Queremos asignar a este ángulo un número real no negativo x que puede usarse como medida de su magnitud. El método más corriente para hacerlo es tomar una circunferencia de radio 1 v llamar x a la longitud del arco AP, descrito

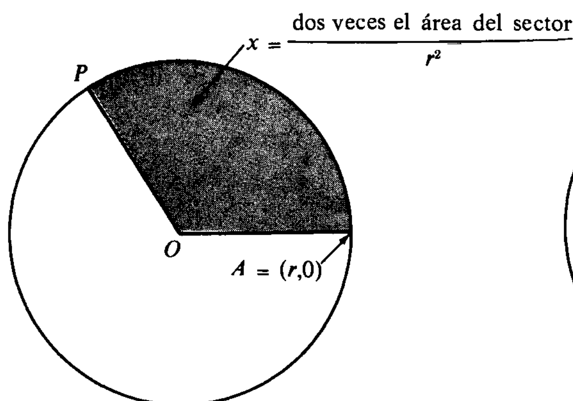


FIGURA 2.6 *Un ángulo $\angle AOP$ de x radianes.*

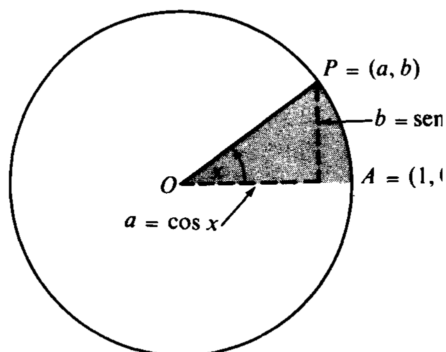


FIGURA 27. *Descripción geométrica de* $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

en el sentido contrario al de las agujas del reloj de A a P, y decir que la medida de $\angle AOP$ es x radianes. Desde un punto de vista lógico, esto no es satisfactorio por el momento pues no se ha precisado el concepto de longitud de arco. Éste será discutido en el capítulo 14. Puesto que la noción de área ha sido ya discutida, preferimos utilizar el área del sector circular AOP en lugar de la longitud del arco AP como medida de la magnitud de $\angle AOP$. Se sobrentiende que el sector

AOP es la porción más pequeña del disco circular cuando P está por encima del eje real y la mayor cuando P está por debajo del eje real.

Más adelante, cuando se haya discutido la longitud del arco, veremos que el arco AP tiene una longitud exactamente doble del área del sector AOP. Por consiguiente, para conseguir la misma escala de medida de ángulos por los dos métodos, usaremos el *doble* del área del sector AOP como medida del ángulo $\angle AOP$. No obstante, para obtener una medida independiente de la unidad de distancia en nuestro sistema coordenado, definiremos la medida de $\angle AOP$ como el *doble del área del sector AOP dividida por el cuadrado del radio.* Esta razón no varía si dilatamos o contraemos el círculo, y por tanto no se pierde generalidad al restringir nuestras consideraciones al círculo unidad. La unidad de medida así obtenida se llama *radián.* Así que, decimos que la medida de un ángulo $\angle AOP$ es x radianes si $x/2$ es el área del sector AOP determinado en el disco circular unidad.

Ya hemos introducido el símbolo π para designar el área de un disco circular unidad. Cuando $P = (-1, 0)$, el sector AOP es un semicírculo de área $\frac{1}{2}\pi$, de modo que subtiende un ángulo de π radianes. El disco completo es un sector de 2π radianes. Si inicialmente P está en $(1, 0)$ y se desplaza una vez alrededor de la circunferencia en sentido contrario al de las agujas del reloj, el área del sector AOP crece de 0 a π, tomando todos los valores del intervalo $[0, \pi]$ exactamente una vez. Esta propiedad, que geométricamente es aceptable, puede demostrarse expresando el área como una integral, pero no expondremos la demostración.

El siguiente paso es definir el seno y el coseno de un ángulo. En realidad, preferimos hablar del seno y del coseno de un *número* mejor que de un ángulo, de modo que el seno y el coseno serán *funciones* definidas sobre la recta real. Procedemos como sigue: Consideramos un número x tal que $0 < x < 2\pi$ y sea P el punto de la circunferencia unidad tal que el área del sector AOP sea igual a $x/2$. Sean (a, b) las coordenadas de P. En la figura 2.7 se representa un ejemplo. Los números a y b están completamente determinados por x. Definamos el seno y el coseno de x como sigue:

$$\cos x = a, \qquad \operatorname{sen} x = b.$$

Dicho de otro modo, $\cos x$ es la abscisa de P y $\operatorname{sen} x$ es su ordenada.

Por ejemplo, cuando $x = \pi$, tenemos $P = (-1, 0)$ de modo que $\cos \pi = -1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$. Análogamente, cuando $x = \frac{1}{2}\pi$ tenemos $P = (0, 1)$ y por tanto $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$. Este procedimiento da el seno y el coseno como funciones definidas en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$. Se extienden las definiciones a todo el eje real por medio de las igualdades siguientes:

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Las otras cuatro funciones trigonométricas se definen ahora en función del seno y del coseno mediante las conocidas fórmulas,

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Estas funciones está definidas para todo real x salvo en ciertos puntos aislados en los que los denominadores pueden ser cero. Satisfacen la propiedad de periodicidad $f(x + 2\pi) = f(x)$. La tangente y la cotangente tienen el período menor π.

A continuación damos los razonamientos trigonométricos para indicar cómo esas definiciones nos llevan a las propiedades fundamentales citadas en la Sección 2.5. Las propiedades 1 y 2 han sido ya tenidas en cuenta al definir el seno y el coseno. La identidad pitagórica resulta evidente ante la figura 2.7. El segmento rectilíneo OP es la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos tienen longitudes $|\cos x|$ y $|\operatorname{sen} x|$. Por tanto, el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos implica la identidad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

Otra vez utilizamos el teorema de Pitágoras para dar una demostración geométrica de la fórmula (2.3) para $\cos(y - x)$. Fijémonos en los triángulos rectángulos PAQ y PBQ dibujados en la figura 2.8. En el triángulo PAQ, la longitud del lado AQ es $|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x|$, el valor absoluto de la diferencia de las ordenadas de Q y P. Del mismo modo, AP tiene longitud $|\cos x - \cos y|$. Si d representa la longitud de la hipotenusa PQ, tenemos, según el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = (\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)^2 + (\cos x - \cos y)^2 .$$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo PBQ el cateto BP tiene longitud $|1 - \cos(y - x)|$ y la del cateto BQ es $|\operatorname{sen}(y - x)|$. Por consiguiente, el teorema de Pitágoras nos da

$$d^2 = [1 - \cos(y - x)]^2 + \operatorname{sen}^2(y - x) .$$

Igualando las dos expresiones de d^2 y despejando $\cos(y - x)$, se obtiene la fórmula (2.3) para $\cos(y - x)$.

Finalmente, las demostraciones geométricas de las desigualdades fundamentales de la propiedad 4 pueden darse sobre la figura 2.9. Comparamos tan sólo el área del sector OAP con la de los triángulos OQP y OAB. Según la definición dada de medida angular, el área del sector OAP es $\frac{1}{2}x$. El triángulo OAB tiene base 1 y altura h, por ejemplo. Por la semejanza de triángulos, se encuentra $h/1 = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$, con lo que el área del triángulo OAB es $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$. Por consiguiente, la comparación de las áreas nos da las desigualdades

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} .$$

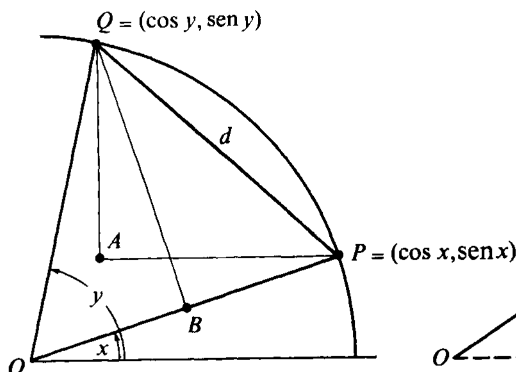


FIGURA 2.8 *Demostración geométrica de la fórmula* $\cos(y - x)$.

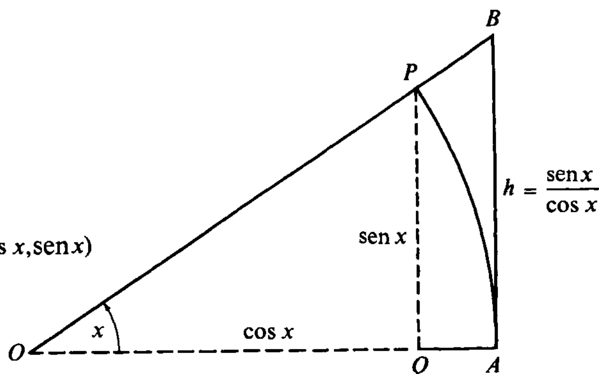


FIGURA 2.9 *Demostración geométrica de las desigualdades*

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Dividiendo por $\frac{1}{2}$ sen x y tomando los recíprocos, obtenemos las desigualdades fundamentales (2.4).

Recordamos al lector una vez más, que con lo que en esta Sección se comenta nos proponemos dar una interpretación geométrica del seno y del coseno y de sus propiedades fundamentales. En la Sección 11.11, se ofrece un estudio analítico de esas funciones en el que no se utiliza la Geometría.

En muchos manuales de Matemáticas aparecen tablas de valores de seno, coseno, tangente y cotangente. En la figura 2.10 (pág. 132) se han dibujado las gráficas de las seis razones trigonométricas como aparecen en un intervalo de un período de amplitud. Recurriendo a la periodicidad se obtiene en cada caso el resto de la gráfica.

2.8 Ejercicios

En este conjunto de Ejercicios, se pueden emplear las propiedades del seno y del coseno citadas en las Seccciones de la 2.5 a la 2.7.

1. (a) Demostrar que sen $n\pi = 0$ para todo entero n y que esos son los únicos valores de x para los que sen $x = 0$.
   (b) Hallar todos los valores reales x tales que $\cos x = 0$.
2. Hallar todos los reales x tales que (a) sen $x = 1$; (b) $\cos x = 1$; (c) sen $x = -1$; (d) $\cos x = -1$.
3. Demostrar que $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(x + \pi) = -\cos x$ para todo x.
4. Demostrar que $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$ y $\cos 3x = \cos x - 4 \operatorname{sen}^2 x \cos x$ para todo real x. Demostrar también que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3 \cos x$.
5. (a) Demostrar que $\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. [*Indicación:* Hacer uso del Ejercicio 4.]

(b) Demostrar que $\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$.

(c) Demostrar que sen $\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

6. Demostrar que $\tan(x - y) = (\tan x - \tan y)/(1 + \tan x \tan y)$ para todo par de valores x, y tales que $\tan x \tan y \neq -1$. Obtener las correspondientes fórmulas para $\tan(x + y)$ y $\cot(x + y)$.
7. Hallar dos números A y B tales que $3\,\text{sen}(x + \frac{1}{3}\pi) = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$ para todo x
8. Demostrar que si C y α son números reales dados, existen dos números reales A y B tales que $C\ \text{sen}(x + \alpha) = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$ para todo x.
9. Demostrar que si A y B son números reales dados, existen dos números C y α, siendo $C \geq 0$, tales que la fórmula del Ejercicio 8 es válida.
10. Determinar C y α, siendo $C > 0$, tales que $C\,\text{sen}(x + \alpha) = -2\,\text{sen}\,x - 2\cos x$ para todo x.
11. Demostrar que si A y B son números reales dados, existen dos números C y α, siendo $C \geq 0$, tales que $C\cos(x + \alpha) = A\,\text{sen}\,x + B\cos x$. Determinar C y α si $A = B = 1$.
12. Hallar todos los números reales x tales que $\text{sen}\,x = \cos x$.
13. Hallar todos los números reales tales que $\text{sen}\,x - \cos x = 1$.
14. Demostrar que las identidades siguientes son válidas para todos los pares x e y:

(a) $2\cos x\cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$.
(b) $2\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.
(c) $2\,\text{sen}\,x\cos y = \text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y)$.

15. Si $h \neq 0$, demostrar que las identidades siguientes son válidas para todo x:

$$\frac{\text{sen}(x + h) - \text{sen}\,x}{h} = \frac{\text{sen}(h/2)}{h/2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = -\frac{\text{sen}(h/2)}{h/2}\,\text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Estas fórmulas se utilizan en Cálculo diferencial.

16. Demostrar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones.

(a) Para todo $x \neq 0$, se tiene $\text{sen}\,2x \neq 2\,\text{sen}\,x$.
(b) Para cualquier x, existe un y tal que $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$.
(c) Existe un x tal que $\text{sen}(x + y) = \text{sen}\,x + \text{sen}\,y$ para todo y.
(d) Existe un $y \neq 0$ tal que $\int_0^y \text{sen}\,x\,dx = \text{sen}\,y$.

17. Calcular la integral $\int_a^b \text{sen}\,x\,dx$ para cada uno de los siguientes valores de a y b. En cada caso interpretar el resultado geométricamente en función del área.

(a) $a = 0, b = \pi/6$.
(b) $a = 0, b = \pi/4$.
(c) $a = 0, b = \pi/3$.
(d) $a = 0, b = \pi/2$.
(e) $a = 0, b = \pi$.
(f) $a = 0, b = 2\pi$.
(g) $a = -1, b = 1$.
(h) $a = -\pi/6, b = \pi/4$.

Calcular las integrales de los Ejercicios del 18 al 27.

18. $\int_0^\pi (x + \text{sen}\,x)\,dx$.
19. $\int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos x)\,dx$.
20. $\int_0^{\pi/2} (\text{sen}\,x - \cos x)\,dx$.
21. $\int_0^{\pi/2} |\text{sen}\,x - \cos x|\,dx$.

22. $\int_0^{\pi} (\frac{1}{2} + \cos t)\, dt.$

23. $\int_0^{\pi} |\frac{1}{2} + \cos t|\, dt.$

24. $\int_{-\pi}^{x} |\frac{1}{2} + \cos t|\, dt,$ si $0 \le x \le \pi.$

25. $\int_x^{x^2} (t^2 + \operatorname{sen} t)\, dt.$

26. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\, dx.$

27. $\int_0^{\pi/3} \cos \frac{x}{2}\, dx.$

28. Demostrar las siguientes fórmulas de integración, válidas para $b \neq 0$:

$$\int_0^x \cos (a + bt)\, dt = \frac{1}{b} [\operatorname{sen}(a + bx) - \operatorname{sen} a],$$

$$\int_0^x \operatorname{sen} (a + bt)\, dt = -\frac{1}{b} [\cos (a + bx) - \cos a].$$

29. (a) Hacer uso de la identidad $\operatorname{sen} 3t = 3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t$ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\, dt = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x) \cos x.$$

(b) Deducir la identidad $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$ y utilizándola para demostrar que

$$\int_0^x \cos^3 t\, dt = \tfrac{1}{3}(2 + \cos^2 x) \operatorname{sen} x.$$

30. Si una función f es periódica de período $p > 0$ e integrable en $[0, p]$, demostrar que $\int_0^p f(x)\, dx = \int_a^{a+p} f(x)\, dx$ para todo a.

31. (a) Demostrar que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = 0$ para todos los enteros $n \neq 0$.
(b) Usando la parte (a) y las fórmulas de adición para seno y coseno, establecer las siguientes fórmulas, válidas para los enteros m y n, tales que $m^2 \neq n^2$;

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi, \qquad \text{si} \quad n \neq 0.$$

Estas fórmulas son las relaciones de ortogonalidad para el seno y el coseno.

32. A partir de la identidad

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos kx = \operatorname{sen} (2k + 1) \frac{x}{2} - \operatorname{sen} (2k - 1) \frac{x}{2}$$

y de las propiedades telescópicas de las sumas finitas demostrar que si $x \neq 2m$ (m entero), se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}(n + 1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}.$$

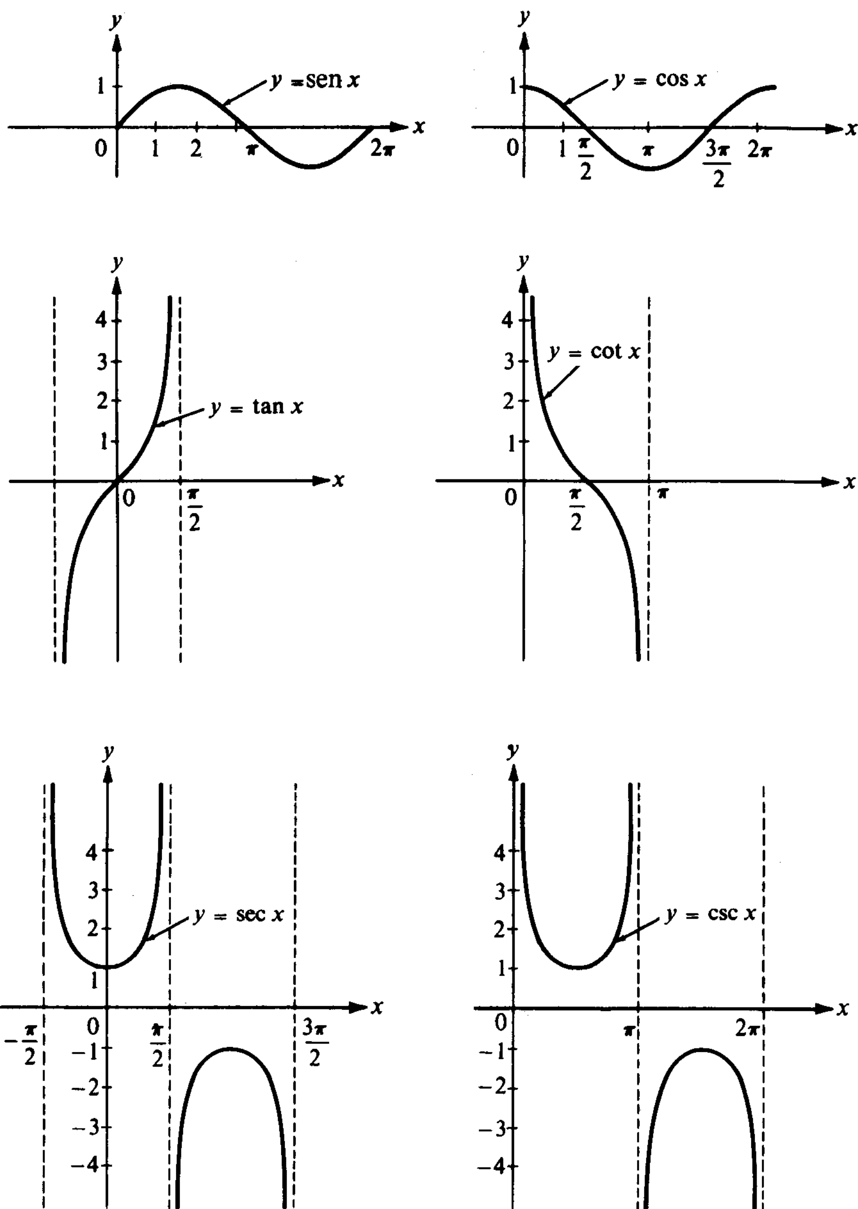


FIGURA 2.10 *Gráficas de las funciones trigonométricas correspondientes a un intervalo de un período.*

33. Si $x \neq 2m\pi$ (m entero), demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}nx \operatorname{sen} \frac{1}{2}(n+1)x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}.$$

34. Se hace referencia a la figura 2.7. Por comparación del área del triángulo OAP con la del sector circular OAP, demostrar que $\operatorname{sen} x < x$ si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Usando entonces el hecho de que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, demostrar que $|\operatorname{sen}|x|<|x|$ si $0<|x|<\frac{1}{2}\pi$.

2.9 Coordenadas polares

Hasta ahora hemos situado puntos en el plano con coordenadas rectangulares. También podemos situarlos con coordenadas polares. Se hace del modo siguiente. Sea P un punto distinto del origen. Supongamos que el segmento de recta que une P al origen tiene longitud $r > 0$ y forma un ángulo θ con el eje x positivo. Véase la figura 2.11. Los dos números r y θ se llaman coordenadas polares de P. Están relacionadas con las rectangulares (x, y) por las igualdades

(2.15) $$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

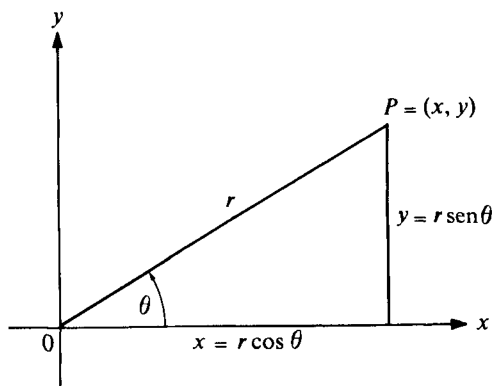


FIGURA 2.11 *Coordenadas polares.*

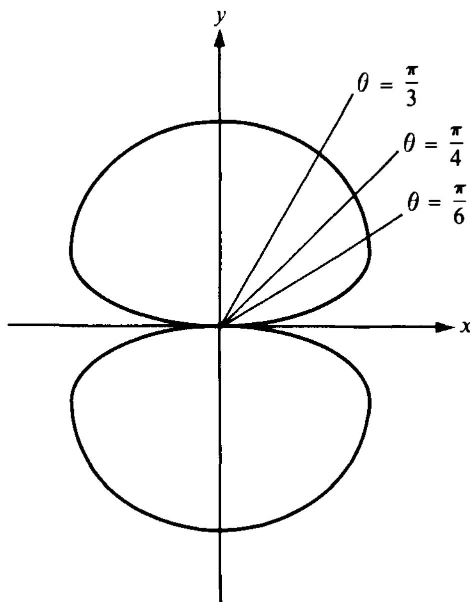


FIGURA 2.12 *Curva en forma de ocho cuya ecuación polar es* $r = \sqrt{|\operatorname{sen}\theta|}$.

El número positivo r se llama *distancia radial* o *radio vector* de P, y θ es un *ángulo polar* o *argumento*. Decimos *un* ángulo polar y no *el* ángulo polar porque si θ satisface (2.15), también lo hace $\theta + 2n\pi$ cualquiera que sea el entero n. Convenimos en llamar coordenadas polares de P a todos los pares de números reales (r, θ) si satisfacen (2.15) siendo $r > 0$. De este modo, un punto dado posee más de un par de coordenadas polares. La distancia radial r está determinada con unicidad, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, pero el ángulo polar θ queda determinado salvo múltiplos enteros de 2π.

Cuando P es el origen, las ecuaciones (2.15) se satisfacen con $r = 0$ y cualquier θ. Por esta razón asignamos al origen la distancia radial $r = 0$, y convenimos en que *cualquier* número real θ puede usarse como ángulo polar.

Sea f una función no negativa definida en un intervalo $[a, b]$. El conjunto de todos los puntos de coordenadas polares (r, θ) que satisfagan $r = f(\theta)$ es la gráfica de f en coordenadas polares. La ecuación $r = f(\theta)$ se llama ecuación polar de esa gráfica. Para ciertas curvas, las ecuaciones polares pueden ser más sencillas y de uso más favorable que las ecuaciones cartesianas. Por ejemplo, la circunferencia de ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 4$ tiene la sencilla ecuación polar $r = 2$. Las ecuaciones (2.15) indican cómo puede pasarse de coordenadas cartesianas a polares.

EJEMPLO. La figura 2.12 nos muestra una curva con el aspecto de un ocho cuya ecuación cartesiana es $(x^2 + y^2)^3 = y^2$. Utilizando (2.15), encontramos $x^2 + y^2 = r^2$, de modo que las coordenadas polares de los puntos de esa curva satisfacen la ecuación $r^6 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, o $r^2 = |\operatorname{sen} \theta|$, $r = \sqrt{|\operatorname{sen} \theta|}$. No es difícil dibujar esta curva a partir de la ecuación polar. Por ejemplo, en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$, sen θ crece de 0 a 1, con lo que r también crece de 0 a 1. Situando unos pocos puntos cuyas coordenadas sean fáciles de calcular, por ejemplo, los que corresponden a $\theta = \pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, casi dibujamos la porción de la curva situada en el primer cuadrante. El resto se la curva se obtiene teniendo en cuenta la simetría de la ecuación cartesiana, o la simetría y la periodicidad de $|\operatorname{sen} \theta|$. Sería un trabajo más difícil dibujar esta curva a partir de su ecuación cartesiana solamente.

2.10 La integral para el área en coordenadas polares

Sea f una función no negativa definida en un intervalo $[a, b]$, siendo $0 \leq b - a \leq 2\pi$. El conjunto de todos los puntos de coordenadas polares (r, θ) que satisfacen las desigualdades

$$0 \leq r \leq f(\theta), \qquad a \leq \theta \leq b,$$

se denomina *conjunto radial* de f sobre $[a, b]$. La región sombreada de la figura 2.13 es un ejemplo. Si f es constante en $[a, b]$, su conjunto radial es un sector

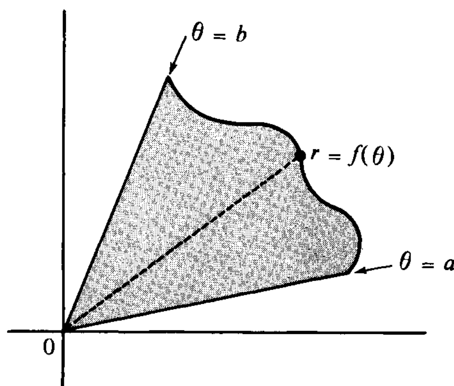


FIGURA 2.13 *El conjunto radial de f correspondiente a un intervalo [a, b].*

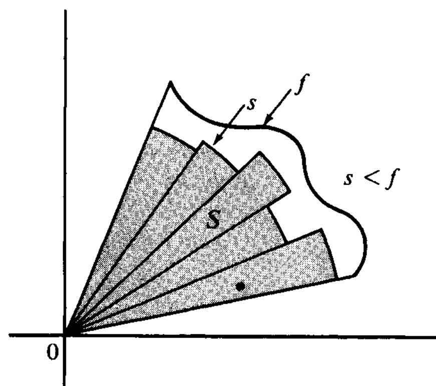


FIGURA 2.14 *El conjunto radial de una función escalonada S es una reunión de sectores circulares. Su área es* $\frac{1}{2}\int_a^b s^2(\theta)\, d\theta$.

circular que subtiende un ángulo de $b - a$ radiantes. La figura 2.14 muestra el conjunto radial S de una función escalonada s. En cada uno de los n subintervalos abiertos (θ_{k-1}, θ_k) de $[a, b]$ en el que s es constante, llamemos por ejemplo $s(\theta) = s_k$, la gráfica de s en coordenadas polares es un arco de circunferencia de radio s_k, y su conjunto radial es un sector circular que subtiende un ángulo de $\theta_k - \theta_{k-1}$ radianes. Debido a la forma como hemos definido la medida angular, el área de este sector es $\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_{k-1})s_k^2$. Puesto que $b - a \leq 2\pi$, como esos sectores no tienen parte común unos con otros, por la aditividad, el área del conjunto radial de s correspondiente al intervalo completo $[a, b]$ viene dado por

$$a(S) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} s_k^2 \cdot (\theta_k - \theta_{k-1}) = \frac{1}{2} \int_a^b s^2(\theta)\, d\theta\,,$$

donde $s^2(\theta)$ representa el cuadrado de $s(\theta)$. Así pues, para las funciones escalonadas, el área del conjunto radial ha sido expresada como una integral. Vamos ahora a demostrar que esta fórmula integral admite mayor generalidad.

TEOREMA 2.6. *Designemos por R el conjunto radial de una función no negativa f en un intervalo* $[a, b]$, *siendo* $0 \leq b - a \leq 2\pi$, *y supongamos que R es medible. Si* f^2 *es integrable en* $[a, b]$ *el área de R viene dada por la integral*

$$a(R) = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta)\, d\theta\,.$$

Demostración. Elijamos dos funciones escalonadas s y t que satisfagan

$$0 \leq s(\theta) \leq f(\theta) \leq t(\theta)$$

para todo θ en $[a, b]$, y designemos por S y T sus conjuntos radiales, respectivamente. Ya que $s \leq f \leq t$ en $[a, b]$, los conjuntos radiales satisfacen las relaciones de inclusión $S \subseteq R \subseteq T$. Luego, por la propiedad de monotonía del área, se tiene $a(S) \leq a(R) \leq a(T)$. Pero S y T son conjuntos radiales de funciones escalonadas, por lo que $a(S) = \frac{1}{2}\int_a^b s^2(\theta)\,d\theta$ y $a(T) = \frac{1}{2}\int_a^b t^2(\theta)\,d\theta$. Por consiguiente se tienen las desigualdades

$$\int_a^b s^2(\theta)\,d\theta \leq 2a(R) \leq \int_a^b t^2(\theta)\,d\theta\,,$$

para todas las funciones s y t que satisfagan $s \leq f \leq t$ en $[a, b]$. Pero s^2 y t^2 son funciones escalonadas arbitrarias que satisfacen $s^2 \leq f^2 \leq t^2$ en $[a,b]$, luego, ya que f^2 es integrable, debe ser $2a(R) = \int_a^b f^2(\theta)\,d\theta$. Esto demuestra el teorema.

Nota: Puede demostrarse que la mensurabilidad de R es una consecuencia de la hipótesis de que f^2 sea integrable, pero no desarrollaremos la demostración.

EJEMPLO. Para calcular el área del conjunto radial R interior a la curva en forma de ocho dibujada en la figura 2.12, calculamos el área de la porción situada en el primer cuadrante y multiplicamos luego por cuatro. Para esta curva, se tiene $f^2(\theta) = |\text{sen}\,\theta|$ y, ya que $\text{sen}\,\theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$, encontramos

$$a(R) = 4\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} f^2(\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\theta\,d\theta = 2\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = 2\,.$$

2.11 Ejercicios

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 4, demostrar que el conjunto de puntos cuyas coordenadas rectangulares (x, y) satisfacen la ecuación cartesiana dada, es igual al de los puntos cuyas coordenadas polares (r, θ) satisfacen la correspondiente ecuación polar.

1. $(x - 1)^2 + y^2 = 1; \quad r = 2\cos\theta, \quad \cos\theta > 0.$
2. $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r = 1 + \cos\theta.$
3. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, y^2 \leq x^2; \quad r = \sqrt{\cos 2\theta}, \quad \cos 2\theta \geq 0.$
4. $(x^2 + y^2)^2 = |x^2 - y^2|; \quad r = \sqrt{|\cos 2\theta|}.$

En cada uno de los Ejercicios del 5 al 15, trazar la gráfica de f en coordenadas polares y calcular el área del conjunto radial de f en el intervalo que se cita. Se supondrá que cada conjunto es medible.

5. *Espiral de Arquímedes:* $f(\theta) = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
6. *Circunferencia tangente al eje y:* $f(\theta) = 2\cos\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$
7. *Dos circunferencias tangentes al eje y:* $f(\theta) = 2\,|\cos\theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
8. *Circunferencia tangente al eje x:* $f(\theta) = 4\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$
9. *Dos circunferencias tangentes al eje x:* $f(\theta) = 4\,|\text{sen}\,\theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

10. *Pétalo de rosa:* $f(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
11. *Rosa de cuatro hojas:* $f(\theta) = |\operatorname{sen} 2\theta|$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
12. *Ocho aplastado:* $f(\theta) = \sqrt{|\cos \theta|}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
13. *Trébol de cuatro hojas:* $f(\theta) = \sqrt{|\cos 2\theta|}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
14. *Cardioide:* $f(\theta) = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
15. *Caracol:* $f(\theta) = 2 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2.12 Aplicación de la integración al cálculo de volúmenes

En la Sección 1.6 se introdujo el concepto de área como función de conjunto que satisface ciertas propiedades que tomamos como axiomas para el área. Luego, en las Secciones 1.18 y 2.2, demostramos que las áreas de muchas regiones podían calcularse por integración. El mismo camino puede utilizarse al tratar del concepto de volumen.

Supongamos que existen ciertos conjuntos S de puntos en el espacio de tres dimensiones, que llamamos *conjuntos medibles,* y una función de conjunto v, llamada *función volumen,* que asigna a cada conjunto medible S un número $v(S)$, llamado volumen de S. Utilizamos el símbolo $\mathscr{A}$ para designar la clase de todos los conjuntos medibles en el espacio de tres dimensiones, y a cada conjunto S de $\mathscr{A}$ lo llamamos *sólido.*

Como en el caso del área, enunciamos unas propiedades que desearíamos que tuviera el volumen y las tomamos como axiomas para el mismo. La elección de los axiomas nos permite demostrar que los volúmenes de muchos sólidos pueden calcularse por integración. Los tres primeros axiomas, parecidos a los correspondientes para el área, se refieren a las propiedades de no negatividad, aditividad, y de la diferencia. En lugar de un axioma de invariancia frente a la congruencia, utilizamos otro de tipo distinto, llamado *principio de Cavalieri.* Éste asigna volúmenes iguales a sólidos congruentes y también a ciertos sólidos que, no siendo congruentes, tienen secciones de áreas iguales al ser cortados por planos perpendiculares a una recta dada. Con mayor precisión, supongamos que S y L sean un sólido y una recta dados. Si F es una plano perpendicular a L, la intersección $F \cap S$ se llama sección perpendicular a L. Si toda sección perpendicular a L es un conjunto medible en su propio plano, S se llama un *sólido de Cavalieri.* El principio de Cavalieri asigna volúmenes iguales a dos sólidos de Cavalieri, S y T, si $a(S \cap F) = a(T \cap F)$ para todo plano F perpendicular a una recta dada L.

El principio de Cavalieri puede interpretarse intuitivamente como sigue. Imaginémonos un sólido de Cavalieri como una pila o montón de láminas materiales delgadas, por ejemplo de naipes, siendo cada lámina perpendicular a una recta dada L. Si deslizamos cada lámina en su propio plano podemos cambiar la forma del sólido pero no su volumen.

El axioma siguiente establece que el volumen de un paralelepípedo rectangular es el producto de las longitudes de sus aristas. Un paralelepípedo rectangular es cualquier conjunto congruente a un conjunto de la forma.

(2.16) $$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c\}.$$

Utilizaremos la palabra más corta «caja» en lugar de «paralelepípedo rectangular». Los números no negativos a, b, c de (2.16) son las longitudes de las aristas de la caja.

Incluimos, por último, un axioma que establece que todo conjunto convexo es medible. Un conjunto se llama *convexo* si, para todo par de puntos P y Q del conjunto, el segmento de recta que los une pertenece también al conjunto. Este axioma, junto con las propiedades de aditividad y de la diferencia, aseguran que todos los sólidos elementales que se presentan en las aplicaciones del Cálculo son medibles.

Los axiomas para el volumen pueden ahora establecerse del siguiente modo.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE VOLUMEN. *Supongamos que existe una clase $\mathscr{A}$ de sólidos y una función de conjunto v, cuyo dominio es $\mathscr{A}$, con las propiedades siguientes:*

1. *Propiedad de no negatividad. Para cada conjunto S de $\mathscr{A}$ se tiene $v(S) \geq 0$.*
2. *Aditividad. Si S y T pertenecen a $\mathscr{A}$, $S \cup T$ y $S \cap T$ también pertenecen a $\mathscr{A}$, y se tiene $v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T)$.*
3. *Propiedad de la diferencia. Si S y T pertenecen a $\mathscr{A}$ siendo $S \subseteq T$, $T - S$ pertenece a $\mathscr{A}$ y se tiene $v(T - S) = v(T) - v(S)$.*
4. *Principio de Cavalieri. Si S y T son dos sólidos de Cavalieri pertenecientes a $\mathscr{A}$ tales que $a(S \cap F) \leq a(T \cap F)$ para todo plano F perpendicular a una recta dada, entonces $v(S) \leq v(T)$.*
5. *Elección de escala. Toda caja B pertenece a $\mathscr{A}$. Si los lados o aristas de B tienen longitudes a, b y c, se tiene que $v(B) = abc$.*
6. *Todo conjunto convexo pertenece a $\mathscr{A}$.*

El axioma 3 asegura que el conjunto vacío $\varnothing$ pertenece a $\mathscr{A}$ y tiene volumen cero. Puesto que $v(T - S) \geq 0$, el axioma 3 también implica la siguiente propiedad de monotonía:

$$v(S) \leq v(T), \qquad \text{para conjuntos } S \text{ y } T \text{ de } \mathscr{A} \text{ tales que } S \subseteq T.$$

La propiedad de monotonía, a su vez, nos muestra que todo conjunto plano acotado S de $\mathscr{A}$ tiene volumen cero. Un conjunto plano se llama *acotado* si es un subconjunto de un cierto cuadrado en el plano. Si consideramos una caja B de

altura c que tenga ese cuadrado como base, entonces $S \subseteq B$ de modo que tenemos $v(S) \leq v(B) = a^2c$, siendo a la longitud de cada lado del cuadrado de la base. Si fuese $v(S) > 0$, podría tomarse c de modo que $c < v(S)/a^2$, en contradicción con la desigualdad $v(S) \leq a^2c$. Esto demuestra que $v(S)$ no puede ser positiva, con lo que $v(S) = 0$, como se afirmó.

Obsérvese que el principio de Cavalieri ha sido establecido en forma de desigualdades. Si $a(S \cap F) = a(T \cap F)$ para todo plano F perpendicular a una recta dada, podemos aplicar el axioma 4 dos veces para deducir $v(S) \leq v(T)$ y $v(T) \leq v(S)$, y se tiene por tanto $v(T) = v(S)$.

A continuación demostramos que el volumen de un sólido cilíndrico es igual al área de su base multiplicada por su altura. Por sólido cilíndrico entendemos un conjunto congruente a un conjunto S de la forma

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in B, \quad a \leq z \leq b\},$$

siendo B un conjunto medible plano y acotado Las áreas de las secciones de S perpendiculares al eje z determinan una función a_S, que es el área de la sección, y que toma el valor constante $a(B)$ en el intervalo $a \leq z \leq b$, y el valor 0 fuera de él. Se denominará función área seccional a la función a_S.

Sea ahora T una caja cuya función área seccional a_T sea igual a a_S. El axioma 5 nos dice que $v(T) = a(B)(b - a)$, siendo $a(B)$ el área de la base de T, y $b - a$ es su altura. El principio de Cavalieri establece que $v(S) = v(T)$, de modo que el volumen de S es igual al área de su base, a(B), multiplicada por su altura, $b - a$. Obsérvese que $a(B)(b - a)$ es la integral de la función a_S en el intervalo $[a, b]$. Dicho de otro modo, el volumen de un sólido cilíndrico recto es igual a la integral de su función área de la sección.

$$v(S) = \int_a^b a_S(z)\, dz .$$

Podemos extender esta fórmula a sólidos de Cavalieri más generales. Sea R un sólido de Cavalieri con secciones medibles perpendiculares a una recta dada L. Consideremos un eje de coordenadas coincidente con L (llamado eje u), y sea $a_R(u)$ el área de la sección producida por un plano perpendicular a L en el punto u. El volumen de R puede calcularse con el teorema siguiente.

TEOREMA 2.7. *Sea R un sólido de Cavalieri de $\mathscr{A}$ cuya función área seccional a_R, sea integrable en un intervalo $[a, b]$ y nula fuera del mismo. En tales condiciones el volumen de R es igual a la integral del área seccional:*

$$v(R) = \int_a^b a_R(u)\, du .$$

Demostración. Elijamos funciones escalonadas s y t tales que $s \leq a_R \leq t$ en $[a, b]$ y definamos s y t como nulas fuera de $[a, b]$. Para cada subintervalo de $[a, b]$ en el que s sea constante, podemos imaginar un sólido cilíndrico (por ejemplo, un cilindro circular recto) construido de modo que su área seccional en este subintervalo tenga el mismo valor constante que s. La reunión de esos cilindros sobre los intervalos en los que s es constante es un sólido S cuyo volumen $v(S)$ es, por la aditividad, igual a la integral $\int_a^b s(u)\,du$. Del mismo modo, existe un sólido T, una reunión de cilindros, cuyo volumen $v(T) = \int_a^b t(u)\,du$. Pero $a_S(u) = s(u) \leq a_R(u) \leq t(u) = a_T(u)$ para todo u de $[a, b]$, de modo que el principio de Cavalieri implica que $v(S) \leq v(R) \leq v(T)$. En otras palabras, $v(R)$ satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(u)\,du \leq v(R) \leq \int_a^b t(u)\,du$$

para todas las funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \leq a_S \leq t$ en $[a, b]$. Puesto que a_S es integrable en $[a, b]$, resulta que $v(R) = \int_a^b a_S(u)\,du$.

EJEMPLO. *Volumen de un sólido de revolución.* Sea f una función no negativa e integrable en un intervalo $[a, b]$. Si el conjunto de ordenadas de esa función gira alrededor del eje x, engendra un sólido de revolución. Cada sección determinada por un plano perpendicular al eje x es un disco circular. El área del disco circular correspondiente al punto x es $\pi f^2(x)$, siendo $f^2(x)$ el cuadrado de $f(x)$. Por consiguiente, según el teorema 2.7, el volumen del sólido (si el sólido pertenece a $\mathscr{A}$) es igual a la integral $\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$, si la integral existe. En particular, si $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ para $-r \leq x \leq r$, el conjunto de ordenadas de f es un disco semicircular de radio r y el sólido engendrado es una esfera de radio r. La esfera es convexa. Su volumen es igual a

$$\int_{-r}^{r} \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Con mayor generalidad, supongamos que disponemos de dos funciones no negativas f y g que son integrables en un intervalo $[a, b]$ y que satisfacen $f \leq g$ en $[a, b]$. Cuando la región entre sus gráficas gira alrededor del eje x, engendra un sólido de revolución tal que cada sección producida por un plano perpendicular al eje x en el punto x es una corona circular (una región limitada por dos circunferencias concéntricas) con área $\pi g^2(x) - \pi f^2(x)$. Por consiguiente, si $g^2 - f^2$ es integrable, el volumen de dicho sólido (si tal sólido pertenece a $\mathscr{A}$) viene dado por la integral

$$\int_a^b \pi[g^2(x) - f^2(x)]\,dx\,.$$

2.13 Ejercicios

1. Aplicar la integración para calcular el volumen de un cono circular recto engendrado haciendo girar alrededor del eje x la gráfica de la función f dada por $f(x) = xc$ en el

intervalo $0 \leq x \leq b$. Demostrar que el resultado es el producto de un tercio del área de la base por la altura del cono.

En cada uno de los Ejercicios del 2 al 7, calcular el volumen del sólido engendrado al girar el conjunto de ordenadas de la función f sobre el intervalo indicado. Dibujar cada uno de los conjuntos de ordenadas.

2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
3. $f(x) = x^{1/4}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
4. $f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
6. $f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

En cada uno de los Ejercicios 8 al 11, dibujar la región entre las gráficas de f y g y calcular el volumen del sólido obtenido al girar dicha región alrededor del eje x.

8. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$
9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$
10. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$
11. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$
12. Dibujar las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x/2$ en el intervalo $[0, 2]$. Hallar un número t, $1 < t < 2$, de modo que cuando la región entre las gráficas de f y g sobre el intervalo $[0, t]$ gira alrededor del eje x, engendra un sólido de revolución cuyo volumen es igual a $\pi t^3/3$.
13. ¿Qué volumen de material se quita de una esfera de radio $2r$ cuando se atraviesa con un taladro, formando un agujero centrado de radio r?
14. Un servilletero se obtiene practicando un agujero cilíndrico en una esfera de modo que el eje de aquél pase por el centro de ésta. Si la longitud del agujero es $2h$, demostrar que el volumen del servilletero es $\pi a h^3$, siendo a un número racional.
15. Un sólido tiene una base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.
16. Las secciones transversales de un sólido por planos perpendiculares al eje x son cuadrados con centros en dicho eje. Si al cortar por el plano perpendicular en el punto de abscisa x, se obtiene un cuadrado cuyo lado es $2x^2$, se trata de hallar el volumen del sólido entre $x = 0$ y $x = a$. Dibujar un esquema.
17. Hallar el volumen de un sólido cuya sección transversal por un plano perpendicular al eje x tiene de área $ax^2 + bx + c$ para cada x del intervalo $0 \leq x \leq h$. Expresar el volumen en función de las áreas B_1, M y B_2 de las secciones transversales correspondientes a $x = 0$, $x = h/2$ y $x = h$, respectivamente. La fórmula que resulta se conoce por *fórmula del prismatoide.*
18. Dibujar un esquema de la región del plano xy formada por todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades simultáneas $0 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{4}x^2 \leq y \leq 1$.
    Calcular el volumen del sólido obtenido haciendo girar esta región: a) alrededor del eje x; b) alrededor del eje y; c) alrededor de la vertical que pasa por $(2, 0)$; d) de la horizontal que pasa por $(0, 1)$.

2.14 Aplicación de la integración al concepto de trabajo

Hasta aquí nuestras aplicaciones de la integración han sido a los conceptos geométricos de área y volumen. Vamos ahora a comentar una aplicación al concepto físico de *trabajo.*

Trabajo es una medida de la energía consumida por una fuerza al mover una partícula de un punto a otro. En esta sección consideramos el caso más sencillo, el movimiento rectilíneo. Esto es, suponemos que el movimiento se efectúa a lo largo de una recta (que se toma como eje x) desde un punto $x = a$, hasta otro $x = b$, y también que la fuerza actúa a lo largo de esta recta. Admitimos que $a < b$ o $b < a$. Suponemos además que la fuerza que actúa sobre la partícula es una función de la posición. Si la partícula está en x, designamos por $f(x)$ la fuerza que actúa en ella, siendo $f(x) > 0$ si actúa en la dirección positiva del eje x, y $f(x) < 0$ si lo hace en sentido contrario. Cuando la fuerza es constante, por ejemplo $f(x) = c$ para todo x entre a y b, definimos el trabajo efectuado por f como el número $c \cdot (b - a)$: la fuerza multiplicada por el desplazamiento. El trabajo puede ser positivo o negativo.

Si la fuerza está medida en *dinas* y la distancia en *centímetros* (sistema *cgs*), el trabajo se mide en *dinas* por *centímetro*. Una *dina-centímetro* de trabajo se llama *erg*. Si la fuerza se mide en *newtons* y la distancia en *metros* (sistema *mks*), el trabajo se expresa en *newton por metro*. Un *newton-metro* de trabajo se llama *joule*. Un newton equivale a 10^5 dinas, y un joule a 10^7 erg. Si la fuerza se mide en libras y la distancia en pies, medimos el trabajo en *libras-pie*.

EJEMPLO. Una piedra de 3 libras de peso se lanza hacia arriba a lo largo de una recta, hasta una altura de 15 pies y vuelve al suelo. Tomamos el eje x a lo largo de la trayectoria y orientado positivamente hacia arriba. La fuerza constante de la gravedad actúa hacia abajo, de modo que $f(x) = -3$ libras para cada x, $0 \leq x \leq 15$. El trabajo efectuado por la gravedad al mover la piedra desde, por ejemplo, $x = 6$ pies hasta $x = 15$ pies es $-3 \cdot (15 - 6) = -27$ libras-pie. Cuando la misma piedra cae desde $x = 15$ pies hasta $x = 6$ pies, el trabajo efectuado por la gravedad es $-3(6 - 15) = 27$ libras-pie.

Supongamos ahora que la fuerza no sea constante sino que sea una función de la posición definida en el intervalo que une a y b. ¿Cómo definimos el trabajo realizado por f al mover una partícula desde a hasta b? Lo haremos como para el área y el volumen. Establecemos ciertas propiedades que vienen impuestas por exigencias físicas. Se demuestra luego que para cualquier definición de trabajo con esas propiedades, el trabajo realizado por una función fuerza integrable f es igual a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL TRABAJO. *Designemos con* $W_a(f)$, *el trabajo realizado por una función fuerza f al mover una partícula desde a hasta b. Tal trabajo tiene las propiedades siguientes:*

1. *Propiedad aditiva. Si* $a < c < b$, $W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f)$.
2. *Propiedad monótona. Si* $f \leq g$ *en* $[a, b]$, $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$. *Esto es, una fuerza mayor realiza un trabajo mayor.*

3. *Fórmula elemental. Si f es constante, por ejemplo $f(x) = c$ para todo x en el intervalo abierto (a, b), $W_a^b(f) = c \cdot (b - a)$.*

La propiedad aditiva puede extenderse por inducción a cualquier número finito de intervalos.

Esto es, si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, se tiene

$$W_a^b(f) = \sum_{k=1}^{n} W_k ,$$

siendo W_k el trabajo realizado por f desde x_{k-1} a x_k. En particular, si la fuerza es una función escalonada s que toma un valor constante s_k en el intervalo abierto (x_{k-1}, x_k), la propiedad 3 establece que $W_k = s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, con lo que

$$W_a^b(s) = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b s(x)\, dx .$$

Así pues, para funciones escalonadas, el trabajo se expresa como una integral. Es fácil demostrar que esto es cierto en casos más generales.

TEOREMA 2.8. *Supongamos que el trabajo se ha definido para una clase de funciones fuerza f de modo que satisfaga las propiedades 1, 2, y 3. El trabajo efectuado entonces por una función fuerza integrable f al mover una partícula desde a hasta b es igual a la integral de f,*

$$W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx .$$

Demostración. Sean s y t dos funciones escalonadas que satisfacen $s \le f \le t$ en $[a, b]$. La propiedad monótona del trabajo establece que $W_a^b(s) \le W_a^b(f) \le W_a^b(t)$. Pero $W_a^b(s) = \int_a^b s(x)$ y $W_a^b(t) = \int_a^b t(x)\, dx$, de modo que el número $W_a^b(f)$ satisface las desigualdades

$$\int_a^b s(x)\, dx \le W_a^b(f) \le \int_a^b t(x)\, dx$$

para todas las funciones escalonadas s y t que satisfacen $s \le f \le t$ en $[a, b]$. Puesto que f es integrable en $[a, b]$, resulta que $W_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Nota: Muchos autores definen simplemente el trabajo como la integral de la función fuerza. La anterior discusión puede considerarse como una justificación de tal definición.

EJEMPLO. *Trabajo necesario para estirar un muelle.* Supongamos que la fuerza $f(x)$ necesaria para estirar un muelle de acero una longitud x más allá de su longitud natural es proporcional a x (*Ley de Hooke*). Coloquemos el eje x a lo largo del eje del muelle. Si la fuerza de tracción actúa en la dirección positiva del eje, tenemos $f(x) = cx$, en donde la constante de tracción c es positiva. (El valor de c puede determinarse si conocemos la fuerza $f(x)$ para un valor particular de $x \neq 0$.) El trabajo preciso para estirar el muelle una longitud a es $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a cx\,dx = ca^2/2$, que es un número proporcional al cuadrado del desplazamiento.

En el Volumen II y mediante las integrales de línea se estudia el trabajo para movimientos a lo largo de curvas.

2.15 Ejercicios

En los Ejercicios 1 y 2 se supone que la fuerza que actúa sobre el resorte obedece la ley de Hooke.

1. Si una fuerza de 10 libras alarga un muelle elástico 1 pulgada, ¿qué trabajo se realiza al alargar el muelle 1 pie?
2. Un muelle tiene normalmente la longitud de 1 metro. Una fuerza de 100 newtons lo comprime hasta 0,9 m. ¿Cuántos joules de trabajo se precisan para comprimirlo hasta la mitad de su longitud normal? ¿Cuál es la longitud del muelle cuando ya se han realizado 20 joules de trabajo?
3. Una partícula se mueve a lo largo del eje x mediante una fuerza impulsora $f(x) = 3x^2 + 4x$ newtons. Calcular cuántos joules de trabajo se realizan con esa fuerza para trasladar la partícula a) desde $x = 0$ hasta $x = 7$ m; b) desde $x = 2$ m hasta $x = 7$ m.
4. Una partícula se mueve a lo largo del eje x mediante una fuerza impulsora dada por $f(x) = ax^2 + bx$ dinas. Calcular a y b de modo que se precisen 900 ergs de trabajo para desplazar la partícula 10 cm a partir del origen, si la fuerza es de 65 dinas cuando $x = 5$ cm.
5. Un cable de 50 pies de longitud y 4 libras de peso por pie pende de un torno. Calcular el trabajo realizado al enrollar 25 pies de cable. No considerar más fuerzas que la gravedad.
6. Resolver el Ejercicio 5 si se cuelga un peso de 50 libras en el extremo del cable.
7. Un peso de 150 libras se fija en un extremo de una cadena cuyo peso es de 2 libras por pie. Inicialmente el peso se suspende con 10 pies de cadena sobre el borde de un edificio de 100 pies de altura. Considerando sólo la fuerza de la gravedad, calcular el trabajo realizado cuando el peso se baja hasta una posición de 10 pies sobre el suelo.
8. En el ejercicio 7, suponer que la cadena sólo tiene 60 pies de longitud y que el peso y la cadena se dejan caer al suelo, partiendo de la misma posición inicial que antes. Calcular el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad cuando el peso alcanza el suelo.
9. Sea $V(q)$ el voltaje necesario para situar una carga q en las placas de un condensador. El trabajo necesario para cargar un condensador desde $q = a$ hasta $q = b$ se define mediante la integral $\int_a^b V(q)\,dq$. Si el voltaje es proporcional a la carga, demostrar que el trabajo realizado para situar una carga Q en un condensador descargado es $\frac{1}{2}QV(Q)$.

2.16 Valor medio de una función

En el trabajo científico es necesario con frecuencia realizar varias mediciones en condiciones semejantes y calcular luego el *promedio* o *media* con la idea de resumir los datos. Existen muchos tipos útiles de promedios, el más corriente es la *media aritmética*. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son n números reales, su media aritmética $\bar{a}$ está definida por la igualdad

(2.17) $$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Si los números a_k son los valores de una función f en n puntos distintos, por ejemplo $a_k = f(x_k)$, el número

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

es la media aritmética de los valores $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Podemos extender este concepto al cálculo de un valor medio no sólo para un número finito de valores de $f(x)$ sino para todos los valores de $f(x)$ al recorrer x un intervalo. La definición que sigue nos sirve para ello.

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO. *Si f es integrable en un intervalo $[a, b]$, definimos $A(f)$, valor medio de f en $[a, b]$, mediante la fórmula*

(2.18) $$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx .$$

Cuando f es no negativa, esta fórmula tiene una interpretación geométrica sencilla. Puesta en la forma $(b-a)A(f) = \int_a^b f(x)\, dx$, establece que el rectángulo de altura $A(f)$ y base $[a, b]$ tiene la misma área que el conjunto de ordenadas de f sobre $[a, b]$.

Podemos ahora demostrar que la fórmula (2.18) es en realidad una extensión del concepto de media aritmética. Sea f una función escalonada que es constante en cada uno de los subintervalos de $[a, b]$, obtenidos al dividirlo en n partes iguales. En particular, sea $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y supongamos que $f(x) = f(x_k)$, si $x_{k-1} < x < x_k$. Entonces será $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$, con lo que se tiene

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) .$$

Así pues, para funciones escalonadas, el promedio $A(f)$ coincide con la media aritmética de los valores $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ tomados en los intervalos en los que la función es constante.

Con frecuencia se utilizan medias aritméticas ponderadas en lugar de las medias aritméticas ordinarias (2.17). Si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son n números no negativos (llamados *pesos*), no todos ceros, la media aritmética ponderada $\bar{a}$ de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se define mediante la fórmula

$$\bar{a} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k}.$$

Cuando los pesos son todos iguales, este valor coincide con la media aritmética ordinaria. La extensión de este concepto a las funciones integrables viene dada por la fórmula

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x) f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx}, \tag{2.19}$$

siendo w una función peso no negativa tal que $\int_a^b w(x)\, dx \neq 0$.

Las medias ponderadas son muy utilizadas en Física e Ingeniería. Por ejemplo, consideremos una varilla recta de longitud a y hecha con un material de densidad variable. Coloquemos la varilla a lo largo del eje x positivo con un extremo en el origen 0, y designemos con $m(x)$ la masa de la porción de varilla de longitud x, medida desde 0. Si $m(x) = \int_0^x \rho(t)\, dt$ para una cierta función integrable ρ que se llama *densidad de masa* de la varilla. Una varilla *uniforme* tiene una densidad de masa constante. La integral $\int_0^a x\rho(x)\, dx$ se denomina el *primer momento* de la varilla en torno de 0, y el *centro de gravedad* es el punto cuya coordenada x es

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\rho(x)\, dx}{\int_0^a \rho(x)\, dx}.$$

Éste es un ejemplo de media ponderada. Hemos promediado la función distancia $f(x) = x$ con la densidad de masa ρ como función peso.

La integral $\int_0^a x^2\rho(x)\, dx$ se llama *segundo momento*, o *momento de inercia*, de la varilla en torno de 0, y el número positivo r dado por la fórmula

$$r^2 = \frac{\int_0^a x^2\rho(x)\, dx}{\int_0^a \rho(x)\, dx}$$

es el *radio de giro* de la varilla. En este caso, la función promediada es el cuadrado de la función distancia, $f(x) = x^2$, con la masa de densidad ρ como función peso.

Medias ponderadas parecidas a éstas también se presentan en el Cálculo de probabilidades en el cual los conceptos de *esperanza* y *varianza* juegan el mismo papel que el centro de gravedad y el momento de inercia.

2.17 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 10, calcular el promedio $A(f)$ para la función dada f en el intervalo correspondiente.

1. $f(x) = x^2, \quad a \leq x \leq b.$
2. $f(x) = x^2 + x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$
3. $f(x) = x^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$
4. $f(x) = x^{1/3}, \quad 1 \leq x \leq 8.$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
6. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$
7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
8. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$
10. $f(x) = \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

11. (a) Si $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq a$, hallar un número c que satisfaga $0 < c < a$ y tal que $f(c)$ sea igual al promedio de f en $[0, a]$.
(b) Resolver la parte (a) si $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo cualquiera.
12. Sea $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$. El valor medio de f en $[0,1]$ es $\frac{1}{3}$. Hallar una función peso no negativa w tal que la media ponderada de f en $[0, 1]$, definida por (2.19) sea (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{3}{5}$; (c) $\frac{2}{3}$.
13. Sea $A(f)$ el promedio de f en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que tiene las propiedades siguientes:
(a) *Propiedad aditiva:* $A(f + g) = A(f) + A(g)$.
(b) *Propiedad homogénea:* $A(cf) = cA(f)$ si c es un número real cualquiera.
(c) *Propiedad monótona:* $A(f) \leq A(g)$ si $f \leq g$ en $[a, b]$.
14. ¿Cuáles de las propiedades citadas en el Ejercicio 13 son válidas para las medias ponderadas definidas por (2.19)?
15. Designemos por $A_a^b(f)$ el promedio de f en el intervalo $[a, b]$.
(a) Si $a < c < b$, demostrar que existe un número t que satisface $0 < t < 1$ tal que $A_a^b(f) = tA_a^c(f) + (1 - t)A_c^b(f)$. Así pues, $A_a^b(f)$ es una media aritmética ponderada de $A_a^c(f)$ y $A_c^b(f)$.
(b) Demostrar que el resultado de la parte (a) también es válido para medias ponderadas como las definidas por (2.19).

En cada uno de los Ejercicios del 16 al 21 se hace referencia a una varilla de longitud L situada en el eje x con un extremo en el origen. Con la densidad de masa ρ que se cita en cada caso, calcular (a) el centro de gravedad de la varilla, (b) el momento de inercia en torno al origen, y (c) el radio de giro.

16. $\rho(x) = 1$ para $0 \leq x \leq L$.
17. $\rho(x) = 1$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = 2$ para $\frac{L}{2} < x \leq L$.
18. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq L$.
19. $\rho(x) = x$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = \frac{L}{2}$ para $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

20. $\rho(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq L$.

21. $\rho(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\rho(x) = \frac{L^2}{4}$ para $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

22. Determinar una densidad de masa ρ de modo que el centro de gravedad de una varilla de longitud L quede situado a una distancia $L/4$ de un extremo de la varilla.

23. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ en el tiempo t viene dado por la fórmula $e(t) = 3 \operatorname{sen} 2t$. Calcular: (a) el voltaje medio en el intervalo de tiempo $[0, \pi/2]$; (b) la media cuadrática del voltaje; esto es, la raíz cuadrada del promedio de la función e^2 en el intervalo $[0, \pi/2]$.

24. En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ y la intensidad de la corriente $i(t)$ vienen dados por las fórmulas $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$, $i(t) = 2 \operatorname{sen} (t - \pi/6)$. La potencia media se define por la fórmula

$$\frac{1}{T}\int_0^T e(t)i(t)\,dt\,,$$

siendo T el período del voltaje y de la intensidad. Determinar T y calcular la potencia media.

2.18 La integral como función del límite superior. Integrales indefinidas

Suponemos en esta sección que f es una función tal que la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ existe para cada x del intervalo $[a, b]$. Mantendremos a y f fijos y estudiaremos esta integral como una función de x. Designamos el valor de la integral con $A(x)$, con lo que

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{si} \quad a \leq x \leq b\,. \tag{2.20}$$

Una ecuación como ésta nos permite construir una nueva función A a partir de una función dada f; el valor de A en cada punto de $[a, b]$ es el determinado por (2.20). Algunas veces esta función A se dice que es una *integral indefinida* de f y se obtiene a partir de f por integración. Decimos *una* integral indefinida y no *la* integral indefinida porque A también depende del límite inferior a. Valores distintos de a nos conducirán a funciones A distintas. Si utilizamos un nuevo límite inferior, por ejemplo c, y definimos otra integral indefinida F mediante la ecuación

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,,$$

la propiedad aditiva nos dice entonces que

$$A(x) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt\,,$$

y por tanto la diferencia $A(x) - F(x)$ es *independiente* de x. Por tanto dos integrales indefinidas cualesquiera de la misma función difieren tan sólo en una constante (la constante depende de la elección de a y c).

Cuando se conoce una integral indefinida de f, el valor de una integral como $\int_a^b f(t)\,dt$ puede calcularse por simple substracción. Por ejemplo, si n es un entero no negativo, tenemos la fórmula del teorema 1.15,

$$\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

y la propiedad aditiva implica que

$$\int_a^b t^n\,dt = \int_0^b t^n\,dt - \int_0^a t^n\,dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

En general, si $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, se tiene

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{2.21}$$

Una elección distinta de c altera solamente $F(x)$ en una constante; esto no cambia la diferencia $F(b) - F(a)$, debido a que la constante desaparece en la substracción.

Si utilizamos el símbolo especial

$$F(x)\Big|_a^b$$

para designar la diferencia $F(b) - F(a)$, la igualdad (2.21) puede ponerse en la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Existe, naturalmente, una relación geométrica muy simple entre una función f y sus integrales indefinidas. En la figura 2.15(a) se representa un ejemplo en el que f es una función no negativa y el número $A(x)$ es igual al área de la región sombreada situada por debajo de la gráfica de f desde a hasta x. Si f toma valores positivos y negativos, como en la figura 2.15(b), la integral $A(x)$ da la suma de las áreas de las regiones situadas por encima del eje x disminuida en la suma de las áreas situadas por debajo del mismo eje.

Muchas de las funciones que aparecen en diversas ramas de la ciencia se presentan exactamente en esta forma, como integrales indefinidas de otras funciones. Ésta es una de las razones por las que una gran parte del Cálculo está dedicada al estudio de las integrales indefinidas.

A veces una propiedad particular de f implica una correspondiente propiedad de la integral indefinida. Por ejemplo, si f es no negativa en $[a, b]$, la integral indefinida A es creciente, puesto que se tiene

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt \geq 0\,,$$

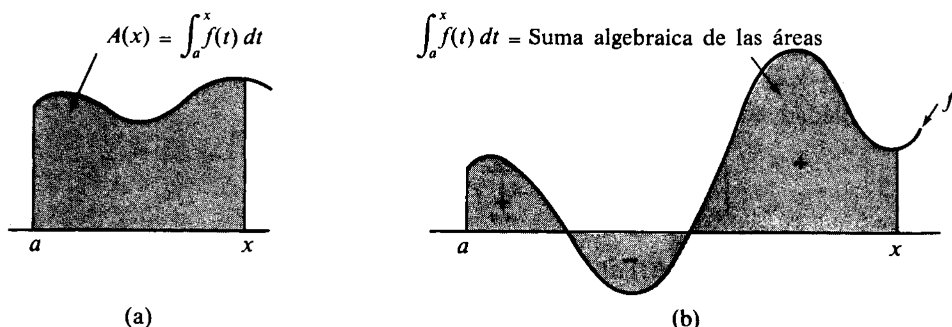


FIGURA 2.15 *Interpretación geométrica de la integral indefinida.*

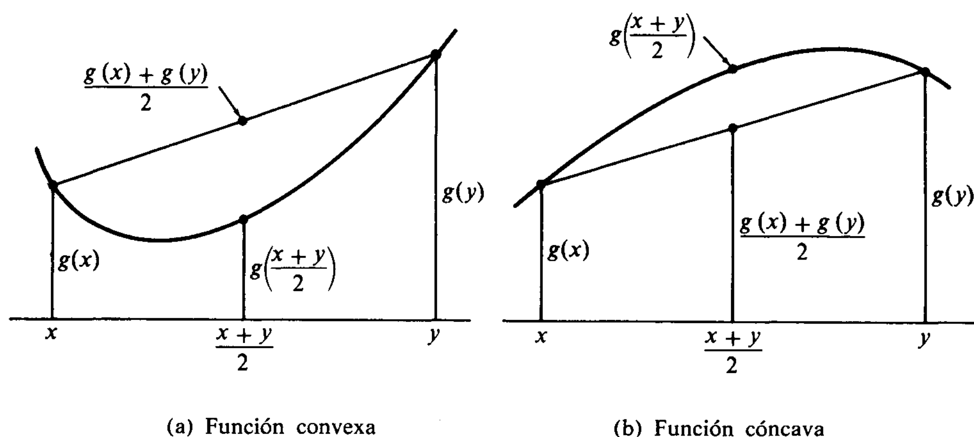


FIGURA 2.16 *Interpretación geométrica de la concavidad y convexidad.*

siempre que $a \leq x \leq b$. Interpretado geométricamente, esto significa que el área limitada por la gráfica de una función no negativa de a a x no puede ser decreciente cuando x aumenta.

Vamos ahora a considerar otra propiedad que geométricamente no es tan evidente. Supongamos f creciente en $[a, b]$. Podemos demostrar que la integral indefinida A tiene una propiedad que se llama *convexidad*. Su gráfica se curva hacia arriba, como se ve en la figura 2.16(a); esto es, la cuerda que une dos puntos cualesquiera de la curva queda siempre por encima del arco. Una definición analítica de convexidad puede darse como sigue.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONVEXA. *Una función g se llama convexa en un intervalo $[a, b]$ si, cualesquiera que sean x e y de $[a, b]$ y para todo α tal que $0 < \alpha < 1$, se tiene*

$$g(z) \leq \alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x), \quad \textit{siendo} \quad z = \alpha y + (1 - \alpha)x\,. \tag{2.22}$$

Se dice que g es cóncava en $[a, b]$ si es válida la desigualdad invertida,

$$g(z) \geq \alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x), \quad \textit{siendo} \quad z = \alpha y + (1 - \alpha)x\,.$$

Estas desigualdades tienen una interpretación geométrica sencilla. El punto $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$ satisface $z - x = \alpha(y - x)$. Si $x < y$, ese punto divide al intervalo $[x, y]$ en dos subintervalos, $[x, z]$ y $[z, y]$, siendo la longitud de $[x, z]$ el producto de la de $[x, y]$ por α. Cuando α varía de 0 a 1, el punto $\alpha g(y) + (1 - \alpha)g(x)$ describe el segmento de recta que une los puntos $(x, g(x))$ e $(y, g(x))$ de la gráfica de g. La desigualdad (2.22) establece que la gráfica de g no está nunca por encima de aquella recta. La figura 2.16(a) muestra un ejemplo con $\alpha = \frac{1}{2}$. Para una función cóncava, la gráfica nunca está por debajo del segmento de recta, como se ve en el ejemplo de la figura 2.16(b).

TEOREMA 2.9. *Sea $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Esta función A es convexa en todo intervalo en el que f es creciente, y cóncava si f es decreciente.*

Demostración. Supongamos f creciente en $[a, b]$, elijamos $x < y$, y sea $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$. Vamos a demostrar que $A(z) \leq \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$. Puesto que $A(z) = \alpha A(z) + (1 - \alpha)A(z)$, es lo mismo que demostrar que $\alpha A(z) + (1 - \alpha)A(z) \leq \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$, o que

$$(1 - \alpha)[A(z) - A(x)] \leq \alpha[A(y) - A(z)]\,.$$

Ya que $A(z) - A(x) = \int_x^z f(t)\,dt$ y $A(y) - A(z) = \int_z^y f(t)\,dt$, tenemos que demostrar que

$$(1 - \alpha)\int_x^z f(t)\,dt \leq \alpha\int_z^y f(t)\,dt\,. \tag{2.23}$$

Pero si f es creciente, se tienen las desigualdades

$$f(t) \leq f(z) \quad \text{si} \quad x \leq t \leq z, \qquad \text{y} \qquad f(z) \leq f(t) \quad \text{si} \quad z \leq t \leq y .$$

Integrando esas desigualdades encontramos

$$\int_x^z f(t)\, dt \leq f(z)(z - x), \qquad \text{y} \qquad f(z)(y - z) \leq \int_z^y f(t)\, dt .$$

Pero $(1 - \alpha)(z - x) = \alpha(y - z)$, de manera que esas desigualdades nos dan

$$(1 - \alpha)\int_x^z f(t)\, dt \leq (1 - \alpha)f(z)(z - x) = \alpha f(z)(y - z) \leq \alpha\int_z^y f(t)\, dt ,$$

lo que demuestra (2.23). Esto prueba que A es convexa cuando f es creciente. Cuando f es decreciente, podemos aplicar el resultado que se acaba de demostrar a $-f$.

EJEMPLO. La función coseno decrece en el intervalo $[0, \pi]$. Puesto que sen $x = \int_0^x \cos t\, dt$, la gráfica de la función seno es cóncava en el intervalo $[0, \pi]$. En el intervalo $[\pi, 2\pi]$, el coseno crece y la función seno es convexa.

La figura 2.17 representa otras propiedades de las integrales indefinidas. La gráfica de la izquierda es la de la función parte entera, $f(x) = [x]$; la de la derecha es la de la integral indefinida $A(x) = \int_0^x [t]\, dt$. En aquellos intervalos en los que f es constante, la función A es lineal. Esto se expresa diciendo que *la integral de una función escalonada es una función lineal a trozos.*

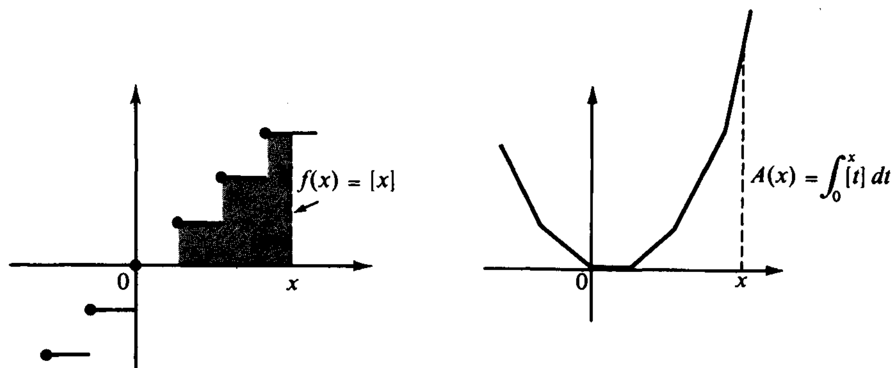


FIGURA 2.17 *La integral indefinida de una función escalonada es una función lineal a trozos.*

Obsérvese que la gráfica de f está formada por segmentos desconectados. Hay puntos en la gráfica de f en los que un pequeño cambio en la x produce un salto súbito en el valor de la función. Obsérvese, no obstante, que la correspondiente integral indefinida no presenta tal comportamiento. Un cambio pequeño en x produce sólo un cambio pequeño en $A(x)$. Por esto la gráfica de A no es discontinua. Esto expresa una propiedad general de las integrales indefinidas que es la *continuidad*. En el próximo capítulo discutiremos con detalle el concepto de continuidad y demostraremos que la integral indefinida es siempre una función continua.

2.19 Ejercicios

Calcular las integrales de los Ejercicios 1 al 16.

1. $\int_0^x (1 + t + t^2)\, dt.$
2. $\int_0^{2y} (1 + t + t^2)\, dt.$
3. $\int_{-1}^{2x} (1 + t + t^2)\, dt.$
4. $\int_1^{1-x} (1 - 2t + 3t^2)\, dt.$
5. $\int_{-2}^{x} t^2(t^2 + 1)\, dt.$
6. $\int_x^{x^2} (t^2 + 1)^2\, dt.$
7. $\int_1^x (t^{1/2} + 1)\, dt, \qquad x > 0.$
8. $\int_x^{x^2} (t^{1/2} + t^{1/4})\, dt, \qquad x > 0.$
9. $\int_{-\pi}^{x} \cos t\, dt.$
10. $\int_0^{x^2} (\frac{1}{2} + \cos t)\, dt.$
11. $\int_x^{x^2} (\frac{1}{2} - \operatorname{sen} t)\, dt.$
12. $\int_0^x (u^2 + \operatorname{sen} 3u)\, du.$
13. $\int_x^{x^2} (v^2 + \operatorname{sen} 3v)\, dv.$
14. $\int_0^y (\operatorname{sen}^2 x + x)\, dx.$
15. $\int_0^x \left(\operatorname{sen} 2w + \cos \frac{w}{2}\right) dw.$
16. $\int_{-\pi}^{x} (\frac{1}{2} + \cos t)^2\, dt.$

17. Hallar todos los valores reales de x tales que

$$\int_0^x (t^3 - t)\, dt = \tfrac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{x} (t - t^3)\, dt\, .$$

Dibujar una figura adecuada e interpretar geométricamente la igualdad.

18. Sea $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ si x no es entero, y $f(x) = 0$ si x es entero. (Como de costumbre, $[x]$ representa el mayor entero $\leq x$.) Definamos una nueva función P del modo siguiente:

$$P(x) = \int_0^x f(t)\, dt \qquad \text{para todo real } x\, .$$

(a) Trazar la gráfica de f correspondiente al intervalo $[-3, 3]$ y demostrar que f es periódica de período 1: $f(x + 1) = f(x)$ para todo x.

(b) Demostrar que $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, si $0 \le x \le 1$ y que P es periódica de período 1.
(c) Expresar $P(x)$ en función de $[x]$.
(d) Determinar una constante c tal que $\int_0^1 (P(t) + c)\,dt = 0$.
(e) Con la constante c de la parte (*d*), sea $Q(x) = \int_0^x (P(t) + c)\,dt$. Demostrar que Q es periódica con período 1 y que

$$Q(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \qquad \text{si} \quad 0 \le x \le 1\,.$$

19. Dada una función impar f, definida para todo valor de x, con período 2, e integrable en cualquier intervalo. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
(a) Demostrar que $g(2n) = 0$ para todo entero n.
(b) Demostrar que g es par y periódica con período 2.
20. Dada una función par f, definida para todo x, periódica de período 2, e integrable en todo intervalo. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, y pongamos $A = g(1)$.
(a) Demostrar que g es impar y que $g(x + 2) - g(x) = g(2)$.
(b) Calcular $g(2)$ y $g(5)$ en función de A.
(c) ¿Para qué valor de A será g periódica de período 2?
21. Dadas dos funciones f y g, integrables en cualquier intervalo y con las propiedades siguientes: f es impar, g es par, $f(5) = 7$, $f(0) = 0$, $g(x) = f(x + 5)$, $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ para todo x. Demostrar que (a) $f(x - 5) = -g(x)$ para todo x; (b) $\int_0^5 f(t)\,dt = 7$; (c) $\int_0^x f(t)\,dt = g(0) - g(x)$.

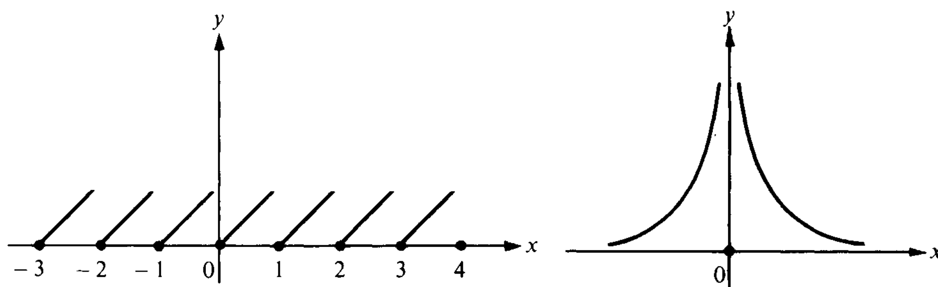
3

FUNCIONES CONTÍNUAS

3.1 Idea intuitiva de continuidad

Este capítulo trata el concepto de continuidad, una de las ideas más importantes y más fascinantes de toda la Matemática. Antes de dar una definición rigurosa de continuidad, comentaremos este concepto brevemente en forma intuitiva para orientar al lector sobre su significado.

Prescindiendo del rigor podemos presentar el asunto así: Supongamos una función f que tiene el valor $f(x)$ en un cierto punto p. Se dice que f es continua en p si en todo punto próximo x el valor de la función $f(x)$ es próximo a $f(p)$.



a) Discontinuidad de salto en cada entero

b) Discontinuidad infinita en 0.

FIGURA 3.1 *Dos tipos de discontinuidad.*

Otro modo de expresar este hecho, es el siguiente: Si x se mueve hacia p, el correspondiente valor de la función $f(x)$ debe llegar a ser tan próximo a $f(p)$ como se desee, cualquiera que sea la forma con que x tienda a p. En los valores de una función continua *no* se presentan saltos bruscos como en el ejemplo de la figura 3.1.

La figura 3.1(a) muestra la gráfica de una función f definida por la ecuación $f(x) = x - [x]$, en la que $[x]$ representa la parte entera de x. En cada entero tenemos lo que se llama una *discontinuidad de salto*. Por ejemplo, $f(2) = 0$, pero cuando x tiende a 2 por la izquierda, $f(x)$ tiende al valor 1, que no coincide con $f(2)$. Tenemos, por tanto, una discontinuidad en 2. Obsérvese que $f(x)$ tiende a $f(2)$ si x se aproxima a 2 *por la derecha*, pero esto no es suficiente para establecer la continuidad en 2. En un caso como éste, la función se llama *continua por la derecha* en 2 y *discontinua por la izquierda* en 2. La continuidad en un punto exige la continuidad por la izquierda y por la derecha.

Cuando empezó a desarrollarse el Cálculo, la mayor parte de las funciones con las que se trabajaba eran continuas, y por tanto no se sentía la necesidad de penetrar en el significado exacto de continuidad. Fue ya entrado el siglo XVIII que se presentaron algunas funciones discontinuas en conexión con distintas clases de problemas físicos. En particular, los trabajos de J. B. J. Fourier (1758-1830) sobre la Teoría del calor, obligaron a los matemáticos de principios del siglo XIX a examinar cuidadosamente el significado de los conceptos de *función* y *continuidad*. A pesar de que el significado de la palabra «continuo» parece intuitivamente clara a todo el mundo, no es fácil imaginarse cuál sería una buena definición de esta idea. Un diccionario popular da la siguiente definición de continuidad:

Continuidad: Cualidad o condición de ser continuo.

Continuo: Que tiene continuidad entre las partes.

Intentar aprender el significado de continuidad únicamente a partir de estas dos definiciones, es lo mismo que intentar aprender chino con sólo un diccionario chino. Una definición matemática satisfactoria de continuidad, expresada enteramente por medio de las propiedades del sistema de los números reales, fue formulada por primera vez en 1821 por el matemático francés Agustin-Louis Cauchy (1789-1857). Su definición, que aún se da hoy día, puede exponerse más fácilmente por medio del concepto de límite que se introducirá a continuación.

3.2 Definición de límite de una función

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga un punto p, si bien no debemos insistir en que f esté definida en p. Sea A un número real. La igualdad

$$\lim_{x \to p} f(x) = A$$

se lee: «El límite de $f(x)$, cuando x tiende a p, es igual a A», o «$f(x)$ tiende a A cuando x tiende a p». También se escribe sin el símbolo de límite, como sigue:

$$f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to p\,.$$

Este simbolismo implica la idea de que $f(x)$ puede hacerse tan próximo a A como queramos, con tal que x se elija suficientemente próximo a p.

Nuestro objetivo inmediato es desarrollar el significado de estos símbolos en función tan sólo de los números reales. Lo haremos en dos etapas. Introducimos primero el concepto de *entorno* de un punto, después definimos los límites por medio de los entornos.

DEFINICIÓN DE ENTORNO DE UN PUNTO. *Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p.*

Notación. Designemos los entornos con $N(p)$, $N_1(p)$, $N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a p, consta de todos los números reales x que satisfagan $p - r < x < p + r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama *radio* del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p; r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p - r < x < p + r$ son equivalentes a $-r < x - p < r$, y a $|x - p| < r$. Así pues, $N(p; r)$ consta de todos los puntos x, cuya distancia a p es menor que r.

En la definición que sigue, suponemos que A es un número real y que f es una función definida en un cierto entorno de un punto p (excepción hecha acaso del mismo p). La función puede estar definida en p pero esto no interviene en la definición.

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. *El simbolismo*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \qquad [o \quad f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to p]$$

significa que para todo entorno $N_1(A)$ *existe un cierto entorno* $N_2(p)$ *tal que*

(3.1) $$f(x) \in N_1(A) \quad \textit{siempre que} \quad x \in N_2(p) \qquad \textit{y} \quad x \neq p\,.$$

Lo primero que se observa en esta definición es que en ella intervienen *dos* entornos, $N_1(A)$ y $N_2(p)$. El entorno $N_1(A)$ se cita en *primer lugar,* e indica cuán próximo queremos que sea $f(x)$ a su límite A. El segundo entorno, $N_2(p)$, nos indica lo próximo que debe estar x de p para que $f(x)$ sea interior al primer entorno $N_1(A)$. Lo esencial de la definición es que, para *cada* $N_1(A)$, *por pequeño que sea,* existe un *cierto* entorno $N_2(p)$ que satisface (3.1). En general, el entorno $N_2(p)$ dependerá del $N_1(A)$ elegido. Un entorno $N_2(p)$ que sirva para un $N_1(A)$ determinado servirá también, naturalmente, para cualquier $N_1(A)$ mayor, pero puede no ser útil para todo $N_1(A)$ más pequeño.

La definición de límite puede representarse geométricamente como en la figura 3.2. En el eje y está dibujado un entorno $N_1(A)$. El entorno correspondiente

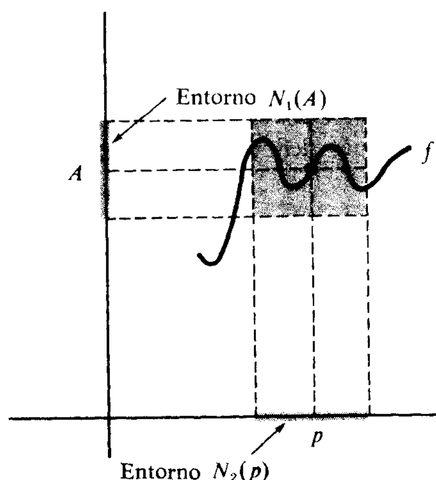


FIGURA 2.3 *Existe* $\lim_{x \to p} f(x) = A$, *pero no se dice nada de* f *en* p.

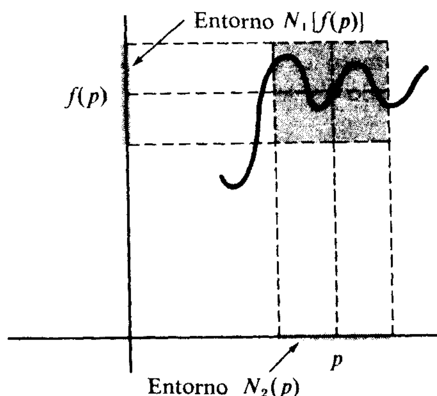


FIGURA 3.3 f *está definida en* p *y* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$, *de manera que* f *es continua en* p.

$N_2(p)$ se ha representado en el eje x. El rectángulo sombreado consta de todos los puntos (x, y) para los cuales $x \in N_2(p)$ e $y \in N_1(A)$. La definición de límite asegura que toda la gráfica de f correspondiente al intervalo $N_2(p)$ está situada en ese rectángulo, salvo para el mismo punto p.

La definición de límite también se puede formular mediante los *radios* de los entornos $N_1(A)$ y $N_2(p)$. Es costumbre designar el radio de $N_1(A)$ por ϵ (letra griega *épsilon*) y el de $N_2(p)$ por δ (letra griega *delta*). Decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x) - A| < \epsilon$, y poner que $x \in N_2(p)$, $x \neq p$, es lo mismo que escribir $0 < |x - p| < \delta$. Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

El símbolo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

(3.2) $$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{siempre que } 0 < |x - p| < \delta .$$

Observemos que las tres igualdades,

$$\lim_{x \to p} f(x) = A , \qquad \lim_{x \to p} (f(x) - A) = 0 , \qquad \lim_{x \to p} |f(x) - A| = 0 ,$$

son equivalentes. Esta equivalencia se hace manifiesta tan pronto como escribamos cada una de esas igualdades en la terminología de ϵ y δ (3.2).

Al considerar límites cuando $x \to p$, conviene a veces designar la diferencia $x - p$ con el nuevo símbolo h, y hacer luego que $h \to 0$. Esto implica tan sólo un cambio de notación, porque, como se comprueba fácilmente, las dos igualdades siguientes son equivalentes:

$$\lim_{x \to p} f(x) = A , \qquad \lim_{h \to 0} f(p + h) = A .$$

EJEMPLO 1. *Límite de una función constante.* Sea $f(x) = c$ para todo x. Es fácil demostrar que para todo p, tenemos $\lim_{x \to p} f(x) = c$. En efecto, dado un entorno $N_1(c)$, la relación (3.1) se satisface para cualquier $N_2(p)$ porque $f(x) = c$ para todo x, cualquiera que sea $N_1(c)$. Con la notación de los límites, escribimos

$$\lim_{x \to p} c = c .$$

EJEMPLO 2. *Límite de la función identidad.* Ahora es $f(x) = x$ para todo x. Podemos probar muy simplemente que $\lim_{x \to p} f(x) = p$. Para cualquier entorno $N_1(p)$ se toma $N_2(p) = N_1(p)$. Entonces la relación (3.1) se realiza trivialmente. Con la notación de límite, escribimos

$$\lim_{x \to p} x = p .$$

Los límites «laterales» pueden definirse en forma parecida. Por ejemplo, si $f(x) \to A$ cuando $x \to p$ con valores mayores que p, decimos que A es el *límite por la derecha* de f en p, e indicamos esto poniendo

$$\lim_{x \to p+} f(x) = A .$$

En la terminología de los entornos esto significa que para todo entorno $N_1(A)$, existe algún entorno $N_2(p)$ tal que

(3.3) $$f(x) \in N_1(A) \quad \text{siempre que} \quad x \in N_2(p) \qquad y \qquad x > p.$$

Los límites a la izquierda, que se indican poniendo $x \to p-$, se definen del mismo modo restringiendo x a valores menores que p.

Si f tiene límite A en p, también tiene límite a la derecha y límite a la izquierda de p, siendo ambos iguales a A. Pero una función puede tener el límite a la derecha de p distinto del límite a la izquierda, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3. Sea $f(x) = [x]$ para todo x, y sea p un entero cualquiera. Para valores de x próximos a p, $x < p$, tenemos $f(x) = p - 1$, y para valores de x próximos a p, $x > p$, es $f(x) = p$. Vemos, por consiguiente, que

$$\lim_{x \to p-} f(x) = p - 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to p+} f(x) = p\,.$$

En un ejemplo como éste, en el que los límites a la izquierda y a la derecha son distintos, el límite de f en p *no existe.*

EJEMPLO 4. Sea $f(x) = 1/x^2$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. La gráfica de f en las proximidades del origen está representada en la figura 3.1(b). En este ejemplo, f toma valores tan grandes como queramos en las proximidades de 0 de modo que no tiene límite a la izquierda ni límite a la derecha del origen. Para demostrar rigurosamente que no existe número real A tal que $\lim_{x \to 0+} f(x) = A$, podemos razonar así: Supongamos que existiera un tal A, supongámosle $A \geq 0$. Elijamos un entorno $N_1(A)$ de longitud 1. En el intervalo $0 < x < 1/(A + 2)$, tenemos $f(x) = 1/x^2 > (A + 2)^2 > A + 2$, de modo que $f(x)$ no puede estar en el entorno $N_1(A)$. Así pues, todo entorno $N(0)$ contiene puntos $x > 0$ para los que $f(x)$ es exterior a $N_1(A)$, con lo que (3.3) no se cumple para este $N_1(A)$ elegido. Luego f no tiene límite a la derecha en 0.

EJEMPLO 5. Sea $f(x) = 1$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Esta función toma el valor constante 1 para todo x salvo en 0, donde tiene el valor 0. Los límites a la derecha y a la izquierda son 1 en todo punto p, con lo que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a p, existe y es igual a 1. Obsérvese que el límite de f es 1 en el punto 0, en tanto que $f(0) = 0$.

3.3 Definición de continuidad de una función

En la definición de límite no se hace mención del comportamiento de f en el punto p. La formulación (3.1) se refiere a aquellos puntos $x \neq p$ pertenecientes al entorno $N_2(p)$, con lo que no es necesario que f esté definida en p. Además, incluso si f está definida en p, su valor allí no es necesariamente igual al límite A. No obstante, si ocurre que f está definida en p y que $f(p) = A$, se dice entonces que la función f es continua en p. Dicho de otro modo, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. *Se dice que una función f es continua en un punto p si*

a) *f está definida en p, y*
b) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Esta definición también puede formularse con entornos. Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1[f(p)]$ existe un entorno $N_2(p)$ tal que

(3.4) $$f(x) \in N_1[f(p)] \quad \text{siempre que } x \in N_2(p).$$

Puesto que $f(p)$ pertenece siempre a $N_1[f(p)]$, no se precisa la condición $x \neq p$ en (3.4). Especificando los radios de los entornos, la definición de continuidad puede darse como sigue:

Una función f es continua en p si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \quad \text{siempre que } |x - p| < \delta.$$

En la figura 3.3 se representa geométricamente la definición de continuidad. Esa figura es parecida a la 3.2 salvo que el valor límite A, es igual al valor $f(p)$ con lo que toda la gráfica de f correspondiente a $N_2(p)$ está en el rectángulo sombreado.

EJEMPLO 1. *Las funciones constantes son siempre continuas.* Si $f(x) = c$ para todo x, entonces

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} c = c = f(p)$$

para todo p, con lo cual f es continua para todo x.

EJEMPLO 2. *La función identidad es continua para todo* x. Si $f(x) = x$ para todo x, tenemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} x = p = f(p)$$

para todo p, luego es continua para todo valor de x.

EJEMPLO 3. Sea $f(x) = [x]$ para todo x. Esta función es continua en todo punto p que no sea entero. Para valores enteros de x es discontinua, ya que el límite de f no existe, ya que son distintos los límites a la derecha y a la izquierda. Una discontinuidad de este tipo, en la que existen los límites a la derecha y a la izquierda pero son distintos, se llama *discontinuidad de salto.* Sin embargo, ya que el límite a la derecha es igual a $f(p)$ en cada entero p, decimos que f es *continua por la derecha* en p.

EJEMPLO 4. La función f para la que $f(x) = 1/x^2$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$, es discontinua en 0. [Ver figura 3.1(b).] Decimos que existe una *discontinuidad infinita* en 0 porque la función toma valores tan grandes como queramos en las proximidades de 0.

EJEMPLO 5. Sea $f(x)=1$ para $x\neq 0$, $f(0)=0$. Esta función es continua en todo punto x excepto en 0. Es discontinua en 0 porque $f(0)$ no es igual al límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$. En este ejemplo la discontinuidad podría evitarse limitando la función en 0 para tener el valor 1 en vez de 0. Por esta razón, una discontinuidad de este tipo se llama *evitable.* Obsérvese que las discontinuidades de salto, no pueden evitarse cambiando tan sólo el valor de la función f en un punto.

3.4 Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas

El cálculo con límites puede simplificarse con frecuencia con el teorema siguiente que proporciona unas reglas básicas para operar con límites.

TEOREMA 3.1. *Sean f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = B.$$

Se tiene entonces

(i) $\lim_{x\to p} [f(x) + g(x)] = A + B,$

(ii) $\lim_{x\to p} [f(x) - g(x)] = A - B,$

(iii) $\lim_{x\to p} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B,$

(iv) $\lim_{x\to p} f(x)/g(x) = A/B \quad$ si $B \neq 0$.

Nota: Un caso particular importante de (iii) se presenta cuando f es constante, es decir $f(x) = A$ para todo x. En este caso, (iii) se escribe $\lim_{x\to p} A \cdot g(x) = A \cdot B$.

La demostración del teorema 3.1 no es difícil, pero es algo larga, por lo que la hemos colocado en otra sección (Sección 3.5). Aquí comentamos algunas consecuencias sencillas del teorema.

Observemos primero que las afirmaciones del teorema pueden escribirse en forma un poco distinta. Por ejemplo, (i) puede ponerse como sigue:

$$\lim_{x\to p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x).$$

Esto nos dice que el límite de una suma es la suma de los límites.

Es costumbre indicar por $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g las funciones cuyos valores para cada x son:

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \text{y} \quad f(x)/g(x),$$

respectivamente. Estas funciones se denominan *suma, diferencia, producto* y *cociente* de f y g. Se entiende que el cociente f/g sólo está definido en los puntos en los que $g(x) \neq 0$. El siguiente corolario al teorema 3.1, está formulado con esta terminología y notación y se refiere a funciones continuas.

TEOREMA 3.2. *Sean f y g dos funciones continuas en un punto p. La suma $f + g$, la diferencia $f - g$, y el producto $f \cdot g$ son también continuas en p. Si $g(p) \neq 0$, también el cociente f/g es continua.*

Demostración. Puesto que f y g son continuas en p, se tiene $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ y $\lim_{x \to p} g(x) = g(p)$. Aplicando las fórmulas para los límites, dadas en el teorema 3.1 cuando $A = f(p)$ y $B = g(p)$, se deduce el teorema 3.2.

Se ha visto que la función idéntica y la constante son continuas para cualquier valor de x. Por medio de estos ejemplos y el teorema 3.2, se pueden construir otros muchos de funciones continuas.

EJEMPLO 1. *Continuidad de polinomios.* Si se toma $f(x) = g(x) = x$, de la continuidad del producto se deduce la continuidad en cada punto de la función cuyo valor en cada x es x^2. Por inducción se prueba, que para cada número real c y cada entero n la función f para la cual $f(x) = cx^n$ es continua para todo x. Como la suma de dos funciones continuas es a su vez continua, por inducción se prueba que también es continua la suma de un número finito de funciones continuas. Por tanto, todo polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ es función continua en todos los puntos.

EJEMPLO 2. *Continuidad de funciones racionales.* El cociente de dos polinomios se llama *función racional.* Si r es una función racional, se tiene:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios. La función r está definida para todo número real x tal que $q(x) \neq 0$. Como el cociente de funciones continuas es continuo, la función racional es continua en todos los puntos en que está definida. Un ejemplo sencillo es $r(x) = 1/x$ si $x \neq 0$. Esta función es continua para todo valor de x salvo en $x = 0$ en que no está definida.

El teorema que sigue demuestra que si una función g está intercalada entre otras dos funciones que tienen el mismo límite cuando $x \to p$, g tiene también este límite cuando $x \to p$.

TEOREMA 3.3. PRINCIPIO DE INTERCALACIÓN. *Supongamos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq p$ en un cierto entorno $N(p)$. Supongamos también que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = a .$$

Se tiene entonces $\lim_{x \to p} g(x) = a$.

Demostración. Sean $G(x) = g(x) - f(x)$, y $H(x) = h(x) - f(x)$. Las desigualdades $f \leq g \leq h$ implican $0 \leq g - f \leq h - f$, o

$$0 \leq G(x) \leq H(x)$$

para todo $x \neq p$ en $N(p)$. Para demostrar el teorema, basta probar que $G(x) \to 0$ cuando $x \to p$, dado que $H(x) \to 0$ cuando $x \to p$.

Sea $N_1(0)$ un entorno cualquiera de 0. Puesto que $H(x) \to 0$ cuando $x \to p$, existe un entorno $N_2(p)$ tal que

$$H(x) \in N_1(0) \quad \text{siempre que} \quad x \in N_2(p) \qquad \text{y} \qquad x \neq p .$$

Podemos suponer que $N_2(p) \subseteq N(p)$. Entonces la desigualdad $0 \leq G \leq H$ establece que $G(x)$ no está más lejos de 0 que $H(x)$ si x está en $N_2(p)$, $x \neq p$. Por consiguiente $G(x) \in N_1(0)$ para tal valor x, y por tanto $G(x) \to 0$ cuando $x \to$ p. Esto demuestra el teorema. La misma demostración es válida si todos los límites son límites a un lado.

El principio de intercalación es útil en la práctica porque a menudo es posible encontrar funciones de intercalación f y h más manejables que g. Vamos a utilizar este principio para demostrar que toda integral indefinida es una función continua.

TEOREMA 3.4. CONTINUIDAD DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS. *Supongamos que f es integrable en $[a, x]$ para todo x en $[a, b]$, y sea*

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt .$$

Entonces la integral indefinida A es continua en cada punto de $[a, b]$. (En los extremos del intervalo tenemos continuidad a un lado.)

Demostración. Elijamos p en $[a, b]$. Hay que demostrar que $A(x) \to A(p)$ cuando $x \to p$. Tenemos

$$A(x) - A(p) = \int_p^x f(t)\, dt \,. \tag{3.5}$$

Puesto que f está acotada en $[a, b]$, existe una constante $M > 0$ tal que $-M \leq f(t) \leq M$ para todo t en $[a, b]$. Si $x > p$, integramos esas desigualdades en el intervalo $[p, x]$ obteniendo

$$-M(x - p) \leq A(x) - A(p) \leq M(x - p)\,.$$

Si $x < p$, obtenemos las mismas desigualdades con $x - p$ sustituida por $p - x$. Por consiguiente, en uno u otro caso podemos hacer que $x \to p$ y aplicar el principio de intercalación encontrando que $A(x) \to A(p)$. Esto prueba el teorema. Si p es un extremo de $[a, b]$, tenemos que hacer que $x \to p$ desde el interior del intervalo, con lo que los límites son a un lado.

EJEMPLO 3. *Continuidad del seno y del coseno.* Puesto que la función seno es una integral indefinida, $\operatorname{sen} x = \int_0^x \cos t\, dt$, el teorema anterior nos dice que la función seno es continua para todo x. Del mismo modo, el coseno es función continua para todo x ya que $\cos x = 1 - \int_0^x \operatorname{sen} t\, dt$. La continuidad de esas funciones también se puede deducir sin utilizar el hecho de que sean integrales indefinidas. En el Ejercicio 26 de la Sección 3.6 se esboza otra demostración.

EJEMPLO 4. En este ejemplo demostramos una importante fórmula sobre límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,, \tag{3.6}$$

que luego necesitaremos en Cálculo diferencial. Puesto que el denominador del cociente $(\operatorname{sen} x)/x$ tiende hacia 0 cuando $x \to 0$, no podemos emplear el teorema del cociente de límites para deducir (3.6). En cambio, podemos utilizar el principio de intercalación. En la Sección 2.5 vimos que

$$0 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}\,,$$

válida para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. También es válida para $-\frac{1}{2}\pi < x < 0$ ya que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, con lo que la anterior doble desigualdad es válida para todo $x \neq 0$ en el entorno $N(0; \frac{1}{2}\pi)$. Cuando $x \to 0$, encontramos $\cos x \to 1$ pues el coseno es continuo en 0, y por tanto $1/(\cos x) \to 1$. Por consiguiente, según el principio de intercalación, deducimos (3.6). Si definimos $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para $x \neq 0$, $f(0) = 1$, entonces f es continua para todo x. Su gráfica se representa en la figura 3.4.

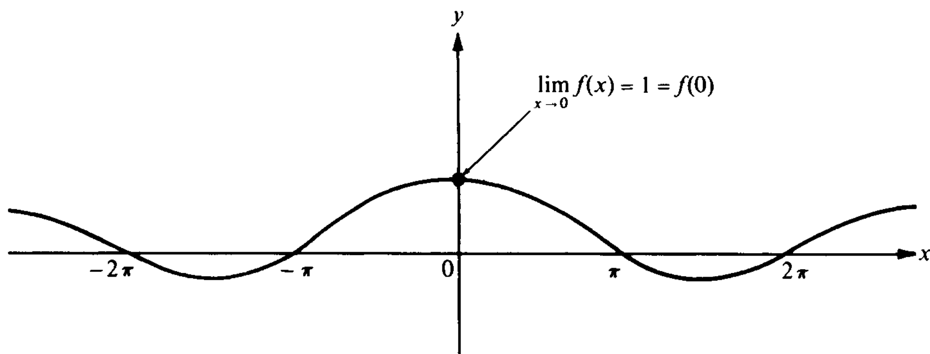


FIGURA 3.4 $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ *si* $x \neq 0$, $f(0) = 1$. *Esta función es continua para todo* x.

EJEMPLO 5. *Continuidad de* $f(x) = x^r$ *para* $x > 0$, *siendo* r *un número racional positivo.* El teorema 2.2 nos da la fórmula de integración

$$\int_0^x t^{1/n}\, dt = \frac{x^{1+1/n}}{1 + 1/n},$$

válida para todo $x > 0$ y todo entero $n \geq 1$. Con los teoremas 3.4 y 3.1, encontramos que la función A dada por $A(x) = x^{1+1/n}$ es continua en todos los puntos $p > 0$. Ahora, sea $g(x) = x^{1/n} = A(x)/x$ para $x > 0$. Como g es un cociente de dos funciones continuas, también lo será para todos los puntos $p > 0$. Más general, si $f(x) = x^{m/n}$, donde m es un entero positivo, entonces f es un producto de funciones continuas y es, por tanto, continua en todos los puntos $p > 0$. Esto establece la continuidad de la función potencia r-ésima, $f(x) = x^r$, cuando r es cualquier número racional positivo, en todos los puntos $p > 0$. En $p = 0$ tenemos continuidad a la derecha.

La continuidad de la función potencia r-ésima para r racional puede también deducirse sin utilizar integrales. En la Sección 3.13 se da otra demostración.

3.5 Demostraciones de los teoremas fundamentales sobre límites

En esta sección demostramos el teorema 3.1 que da las reglas fundamentales para calcular límites de sumas, productos, y cocientes. Los recursos algebraicos principales que se utilizan en la demostración son las dos propiedades de los valores absolutos que se mencionaron en las Secciones I 4.8 y I 4.9. (1) la desigualdad triangular, que afirma que $|a + b| \leq |a| + |b|$ para cualesquiera a y b reales, y (2) la igualdad $|a\, b| = |a|\, |b|$ que establece que el valor absoluto de un producto es el producto de valores absolutos.

Demostraciones de (i) *e* (ii). Puesto que las dos igualdades:

$$\lim_{x\to p} f(x) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to p} [f(x) - A] = 0$$

son completamente equivalentes, y como se tiene

$$f(x) + g(x) - (A + B) = [f(x) - A] + [g(x) - B],$$

basta demostrar las igualdades (i) e (ii) del teorema cuando los límites de A y B son ambos cero.

Supóngase pues, que $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Se demostrará en primer lugar que $f(x) + g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Para ello se tiene que probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

(3.7) $$|f(x) + g(x)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta .$$

Sea ϵ dado. Puesto que $f(x) \to 0$ cuando $x \to p$, exista un $\delta_1 > 0$ tal que

(3.8) $$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{siempre que} \quad < |x - p| < \delta_1 .$$

Análogamente, puesto que $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que:

(3.9) $$|g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta_2 .$$

Si se indica por δ el menor de los dos números δ_1 y δ_2, entonces, ambas igualdades (3.8) y (3.9) son válidas si $0 < |x - p| < \delta$, y por tanto, en virtud de la desigualdad triangular, se tiene:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon .$$

Esto demuestra (3.7) que, a su vez, demuestra (i). La demostración de (ii) es completamente análoga, salvo que en el último paso se emplea la desigualdad $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

Demostración de (iii). Supóngase que se ha demostrado (iii) en el caso particular en que uno de los límites es 0. Entonces el caso general resulta fácilmente de este caso particular, como se deduce de la siguiente igualdad:

$$f(x)g(x) - AB = f(x)[g(x) - B] + B[f(x) - A].$$

El caso particular implica que cada término del segundo miembro tienda a 0 cuando $x \to p$ y en virtud de la propiedad (i) la suma de los dos términos tiende también a 0. Por tanto, basta sólo probar (iii) en el caso en que uno de los límites, por ejemplo B, sea 0.

Supóngase que $f(x) \to A$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Se trata de probar que $f(x) \cdot g(x) \to 0$ cuando $x \to p$. Para ello se ha de ver que dado un número positivo ϵ, existe un $\delta > 0$ tal que

(3.10) $$|f(x)g(x)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta.$$

Puesto que $f(x) \to A$ cuando $x \to p$, existe un δ_1 tal que

(3.11) $$|f(x) - A| < 1 \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta_1.$$

Para tal x, tenemos $|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$, y por tanto

(3.12) $$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < (1 + |A|)\,|g(x)|.$$

Ya que $g(x) \to 0$ cuando $x \to p$, para todo $\epsilon > 0$ existe un δ_2 tal que

(3.13) $$|g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |A|} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta_2.$$

Por consiguiente, si llamamos δ al menor de los dos números δ_1 y δ_2 entonces las dos desigualdades (3.12) y (3.13) son válidas siempre que $0 < |x - p| < \delta$, y para tal valor de x deducimos (3.10), lo que completa la demostración de (iii).

Demostración de (iv). Puesto que el cociente $f(x)/g(x)$ es el producto de $f(x)/B$ por $B/g(x)$ basta demostrar que $B/g(x) \to 1$ cuando $x \to p$ y luego aplicar (iii). Sea $h(x) = g(x)/B$, por lo que $h(x) \to 1$ cuando $x \to p$, y se quiere demostrar que $1/h(x) \to 1$ cuando $x \to p$.

Dado $\epsilon > 0$, se trata de ver si existe un $\delta > 0$ tal que

(3.14) $$\left|\frac{1}{h(x)} - 1\right| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta .$$

La diferencia se puede escribir como sigue:

(3.15) $$\left|\frac{1}{h(x)} - 1\right| = \frac{|h(x) - 1|}{|h(x)|} .$$

Puesto que $h(x) \to 1$ cuando $x \to p$ se puede elegir un $\delta>0$ tal que ambas desigualdades:

(3.16) $$|h(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |h(x) - 1| < \frac{1}{2}$$

se satisfagan siempre que $0 < |x - p| < \delta$. La segunda de estas desigualdades implica $h(x) > \frac{1}{2}$ y por tanto $1/|h(x)| = 1/h(x) < 2$ para tales valores de x. Empleando este resultado en (3.15) junto con la primera desigualdad (3.16), obtenemos (3.14). Esto completa la demostración de (iv).

3.6 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 10, calcular los límites y explicar cuáles han sido los teoremas utilizados en cada caso.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2}$.
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.
4. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.
5. $\lim_{h\to 0} \frac{(t + h)^2 - t^2}{h}$.
6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$, $\quad a \neq 0$.
7. $\lim_{a\to 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$, $\quad x \neq 0$.
8. $\lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$, $\quad a \neq 0$.
9. $\lim_{t\to 0} \tan t$.
10. $\lim_{t\to 0} (\operatorname{sen} 2t + t^2 \cos 5t)$.
11. $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x}$.
12. $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x}$.
13. $\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.
14. $\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Utilizar la relación $\lim_{x\to 0} (\text{sen } x)/x$ para establecer las igualdades de los Ejercicios del 15 al 20.

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = 2.$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\text{sen } x} = 2.$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } x} = 5.$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x - \text{sen } 3x}{x} = 2.$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \cos a.$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

21. Demostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$ [*Indicación:* $(1 - \sqrt{u})(1 + \sqrt{u}) = 1 - u$.]

22. Una función f está definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \leq c, \\ ax + b & \text{si } x > c, \end{cases}$$

siendo a, b, c constantes. Si b y c están dados, hallar todos los valores de a (si existe alguno) para los que f es continua en el punto $x = c$.

23. Resolver el Ejercicio 22 si f se define de este modo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x & \text{si } x \leq c, \\ ax^2 + b & \text{si } x > c. \end{cases}$$

24. ¿En qué punto son funciones continuas la tangente y la cotangente?

25. Sea $f(x) = (tg\, x)/x$ si $x \neq 0$. Esbozar la gráfica de f correspondiente a los intervalos semiabiertos $[-\frac{1}{4}\pi, 0)$ y $(0, \frac{1}{4}\pi]$. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ cuando $x \to 0$? ¿Puede definirse $f(0)$ de modo que f se haga continua en 0?

26. Este Ejercicio ofrece otra demostración de la continuidad de las funciones seno y coseno.
a) La desigualdad $|\text{sen } x| < |x|$, válida para $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$, fue demostrada en el Ejercicio 34 de la Sección 2.8. Utilizarla para demostrar que la función seno es continua en 0.
b) Hacer uso de la parte a) y de la identidad $\cos 2x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x$ para demostrar la continuidad del coseno en 0.
c) Utilizar las fórmulas de adición para $\text{sen } (x + h)$ y $\cos (x + h)$ para demostrar que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier valor x real.

27. La figura 3.5 muestra una porción de la gráfica de la función f definida como sigue:

$$f(x) = \text{sen } \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Para $x = 1/(n\pi)$, siendo n entero, tenemos $\text{sen } (1/x) = \text{sen}(n\pi) = 0$. Entre dos de esos puntos, la función asciende hasta $+1$ y baja otra vez hasta 0 o bien desciende a -1 y vuelve a subir a 0. Por consiguiente, entre cualquiera de esos puntos y el origen, la curva presenta infinitas oscilaciones. Esto sugiere que los valores de la función no tienden a ningún valor fijo cuando $x \to 0$. Demostrar que no existe ningún valor real A tal

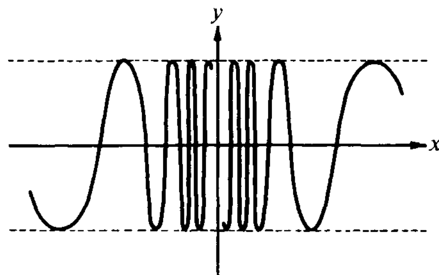


FIGURA 3.5 $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ *si* $x \neq 0$. *Esta función es discontinua en* 0 *aunque se defina* $f(0)$.

que $f(x) \to A$ cuando $x \to 0$. Esto demuestra que no es posible definir $f(0)$ de manera que f sea continua en 0.

[*Indicación:* Suponer que exista un tal A y obtener una contradicción.]

28. Para $x \neq 0$, sea $f(x) = [1/x]$, designando por $[t]$ el mayor entero $\leq t$. Trazar la gráfica de f para los intervalos $[-2, -\frac{1}{5}]$ y $[\frac{1}{5}, 2]$. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ cuando $x \to 0$ tomando valores positivos? ¿y tomando valores negativos? ¿Puede definirse $f(0)$ para que f sea continua en 0?
29. Hacer lo mismo que en el Ejercicio 28, cuando $f(x) = (-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.
30. Lo mismo que en el Ejercicio 28, cuando $f(x) = x(-1)^{[1/x]}$ para $x \neq 0$.
31. Dar un Ejemplo de una función continua en un punto de un intervalo y discontinua en los demás puntos del intervalo, o probar que no existe una tal función.
31. Dar un ejemplo de una función continua en un punto de un intervalo y discontinua en los demás puntos del intervalo, o probar que no existe una tal función.
32. Sea $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Definir $f(0)$ de manera que f sea continua en 0.
33. Sea f una función tal que $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$ para todos los valores u y v de un intervalo $[a, b]$.
    a) Probar que f es continua en cada punto de $[a, b]$.
    b) Suponiendo que f sea integrable en $[a, b]$, demostrar que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

    c) Más general. Demostrar que para cualquier c de $[a, b]$, se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(c) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

3.7 Funciones compuestas y continuidad

A partir de unas funciones dadas podemos construir nuevas funciones por adición, subtracción, multiplicación y división. En esta sección exponemos un nuevo procedimiento para construir funciones mediante una operación conocida por el nombre de composición. Vamos a verlo en un ejemplo.

Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Para calcular $f(x)$, primero elevamos x al cuadrado y luego tomamos el seno de x^2. Así pues, $f(x)$ se obtiene combinando otras dos funciones, la función elevación al cuadrado y la función seno. Si ponemos $v(x) = x^2$ y $u(x) = \operatorname{sen} x$, podemos expresar $f(x)$ en función de u y de v escribiendo

$$f(x) = u[v(x)] .$$

Decimos que f resulta de la composición de u y v (en este orden). Si componemos v y u en el orden inverso, obtenemos un resultado distinto, $v[u(x)] = (\operatorname{sen} x)^2$. Esto es, para calcular $v[u(x)]$, tomamos primero el seno de x y luego el cuadrado del $\operatorname{sen} x$.

Podemos ahora comentar este proceso con mayor generalidad. Sean u y v dos funciones dadas cualesquiera. La compuesta o la composición de u y v (en este orden) se define como la función f para la cual

$$f(x) = u[v(x)] \qquad \text{(se lee, «}u\text{ de }v\text{ de }x\text{»).}$$

Es decir, para calcular el valor de f en x primero se calcula $v(x)$ y luego se calcula u en el punto $v(x)$. Naturalmente que para que este cálculo tenga sentido, es necesario que los valores de $v(x)$ entren en el dominio de la función u, y f estará sólo definida en aquellos puntos x para los cuales $v(x)$ está en el dominio de u.

Por ejemplo, si $u(x) = \sqrt{x}$ y $v(x) = 1 - x^2$, la compuesta f está dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Obsérvese que $v(x)$ está definida para todo número real x, mientras que u está definida sólo para $x \geq 0$. Por tanto, la compuesta f está definida sólo para aquellas x tales que $1 - x^2 \geq 0$.

Formalmente, $f(x)$ se obtiene sustituyendo x por $v(x)$ en la expresión $u(x)$. Por esta razón la función f se indica algunas veces por $f = u(v)$ (que se lee «u de v»). Otra notación empleada para indicar composición es: $f = u \circ v$ (que se lee u círculo v) y que tiene una analogía con la notación de producto $u \cdot v$. En efecto, se verá a continuación que la operación de composición tiene algunas de las propiedades de la multiplicación.

La compuesta de tres o más funciones se puede hallar componiendo dos, el resultado con la tercera y así sucesivamente. Así, la función f dada por:

$$f(x) = \cos[\operatorname{sen}(x^2)]$$

es la composición $f = u \circ (v \circ w)$ donde:

$$u(x) = \cos x, \qquad v(x) = \operatorname{sen} x, \qquad \text{y} \qquad w(x) = x^2.$$

Obsérvese que la misma f se puede obtener componiendo u y v primero y la compuesta $u \circ v$ con w, es decir $f = (u \circ v) \circ w$. En este ejemplo se cumple la *ley asociativa* de la composición que en forma general es:

(3.17) $$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$$

cualesquiera que sean las funciones u, v, w siempre que tenga sentido formar las compuestas que aparecen en la igualdad. El lector verá que la demostración de (3.17) es un ejercicio inmediato.

Se observará que la *ley conmutativa* $u \circ v = v \circ u$, no es siempre válida en la composición. Por ejemplo, si $u(x) = \operatorname{sen} x$ y $v(x) = x^2$, la compuesta $f = u \circ v$ está dada por $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ [que significa $\operatorname{sen}(x^2)$] mientras que la composición $g = v \circ u$ está dada por $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$ [que significa $(\operatorname{sen} x)^2$].

Demostraremos ahora un teorema que nos dice que la propiedad de la continuidad se conserva en la operación de composición. Con mayor precisión, tenemos el siguiente

TEOREMA 3.5. *Suponiendo que v es continua en p y que u es continua en q, siendo $q = v(p)$, la función compuesta $f = u \circ v$ es continua en p.*

Demostración. Puesto que u es continua en q, para todo entorno $N_1[u(q)]$ existe un entorno $N_2(q)$ tal que

(3.18) $$u(y) \in N_1[u(q)] \quad \text{siempre que} \quad y \in N_2(q).$$

Pero $q = v(p)$ y v es continua en p, de modo que para el entorno $N_2(q)$ existe otro entorno $N_3(p)$ tal que

(3.19) $$v(x) \in N_2(q) \quad \text{siempre que} \quad x \in N_3(p).$$

Si ponemos $y = v(x)$ y combinamos (3.18) con (3.19), encontramos que para todo entorno $N_1(u[v(p)])$ existe un entorno $N_3(p)$ tal que

$$u[v(x)] \in N_1(u[v(p)]) \quad \text{siempre que } x \in N_3(p),$$

o, dicho de otro modo, puesto que $f(x) = u[v(x)]$,

$$f(x) \in N_1[f(p)] \quad \text{siempre que} \quad x \in N_3(p).$$

Esto significa que f es continua en p, como se afirmó.

EJEMPLO 1. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Es la composición de dos funciones continuas para todo valor de la variable por lo que f es continua para todo x.

EJEMPLO 2. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2} = u[v(x)]$, siendo $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = 1 - x^2$. La función v es continua siempre, pero u sólo lo es para puntos $x \geq 0$. Luego f es continua en aquellos valores x para los cuales $v(x) \geq 0$, esto es, en todos los puntos que satisfacen $x^2 \leq 1$.

3.8 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 10, las funciones f y g están definidas por las fórmulas dadas. Si no se dice lo contrario, los dominios de f y g consisten en todos los números reales. Pongamos $h(x) = f[g(x)]$ siempre que $g(x)$ esté en el dominio de f. En cada caso, precisar el dominio de h y dar una o más fórmulas para la determinación de $h(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 2x$, $\quad g(x) = x + 1$.
2. $f(x) = x + 1$, $\quad g(x) = x^2 - 2x$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$, $\quad g(x) = x^2$.
4. $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$, $\quad g(x) = -x^2$.
5. $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$.
6. $f(x) = -x^2$, $\quad g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$.
7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\quad g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$.
8. $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$, $\quad g(x) = \operatorname{sen} x$.
9. $f(x) = \sqrt{x}$ si $x > 0$, $\quad g(x) = x + \sqrt{x}$ si $x > 0$.
10. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ si $x > 0$, $\quad g(x) = x + \sqrt{x}$ si $x > 0$.

Calcular los límites en los Ejercicios del 11 al 20 y explicar qué teoremas se aplican en cada caso.

11. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$.
12. $\lim_{x \to 4} \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.
13. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\operatorname{sen} t}$.
14. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$.
15. $\lim_{t \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(t - \pi)}{t - \pi}$.
16. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$.
17. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.
18. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$.
19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$.
20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$.

21. Sean f y g dos funciones definidas como sigue:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{para todo } x\,, \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{para } x < 0\,, \\ x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula (o fórmulas) para el cálculo de la función compuesta $h(x) = f[g(x)]$. ¿Para qué valores de x es continua h?

22. Resolver el Ejercicio 21 cuando f y g se definen del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1\,, \\ 0 & \text{si } |x| > 1\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } |x| \leq 2\,, \\ 2 & \text{si } |x| > 2\,. \end{cases}$$

23. Resolver el Ejercicio 21 cuando $h(x) = g[f(x)]$.

3.9 Teorema de Bolzano para las funciones continuas

En el resto de este capítulo se discutirán algunas propiedades de las funciones continuas que se usan con frecuencia. Muchas de ellas aparecen como triviales cuando se interpretan geométricamente, por lo que algunos se inclinan a aceptarlas como evidentes. Sin embargo, es importante poner de manifiesto que estas propiedades no tienen en sí una evidencia superior a la misma definición de continuidad y que por tanto han de ser demostradas si se quiere aplicarlas con cierta generalidad. Las demostraciones de estas propiedades suelen hacer uso del axioma del extremo superior del sistema de los números reales.

Bernardo Bolzano (1781-1848), sacerdote católico que hizo aportaciones importantes a las Matemáticas en la primera mitad del siglo XIX, fue uno de los primeros en reconocer que muchas de las propiedades sobre funciones continuas que parecían obvias requerían una demostración. Sus demostraciones referentes a continuidad fueron publicadas en 1850 en su importante obra póstuma *Paradojas del infinito.* Uno de sus resultados conocido por el *teorema de Bolzano* se pone de manifiesto en la figura 3.6 donde se muestra la gráfica de una función continua f. La gráfica está por debajo del eje x en el punto a y por encima del eje x en el punto b. El teorema de Bolzano afirma que la curva ha de cortar al eje alguna vez entre a y b. Esta propiedad se puede enunciar rigurosamente como sigue:

TEOREMA 3.6. TEOREMA DE BOLZANO. *Sea f continua en cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.*

Basaremos nuestra demostración del teorema de Bolzano en la siguiente propiedad de las funciones continuas que establecemos aquí como un teorema.

TEOREMA 3.7. CONSERVACIÓN DEL SIGNO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS. *Sea f continua en c y supongamos que $f(c) \neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.*

Demostración del teorema 3.7. Supóngase $f(c) > 0$. En virtud de la continuidad, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$(3.20) \qquad f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon \quad \text{siempre que } c - \delta < x < c + \delta .$$

Tomando el δ correspondiente a $\epsilon = f(c)/2$ (esta ϵ es *positiva*) entonces (3.20) se transforma en

$$\tfrac{1}{2}f(c) < f(x) < \tfrac{3}{2}f(c) \quad \text{siempre que } c - \delta < x < c + \delta .$$

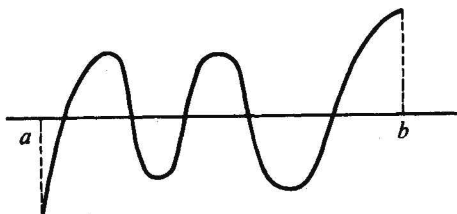


FIGURA 3.6 *Teorema de Bolzano.*

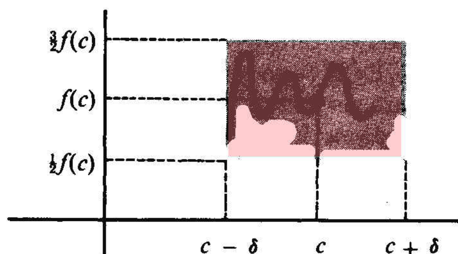


FIGURA 3.7 *Aquí $f(x) > 0$ para x próximo a c pues $f(c) > 0$.*

(Véase fig. 3.7). De aquí se deduce que $f(x) > 0$ en este intervalo y por tanto $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo. Si $f(c) < 0$ se toma δ correspondiente a $\epsilon = -\frac{1}{2} f(c)$ y se llega a la misma conclusión.

Nota: Si existe continuidad a un lado de c, entonces existe el correspondiente intervalo unilateral $[c, c + \delta)$ o $(c - \delta, c]$ en el cual f tiene el mismo signo que $f(c)$.

Demostración del teorema de Bolzano. Para fijar ideas, supóngase $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ tal como se ha hecho en la figura 3.6. Puede haber muchos valores de x entre a y b para los cuales $f(x) = 0$. Se trata aquí de encontrar *uno* y esto se hará determinando el mayor x para el cual $f(x) = 0$. Para ello, sea S el conjunto de todos los puntos del intervalo $[a, b]$ para los cuales $f(x) \leq 0$. Hay por lo menos un punto en S puesto que $f(a) < 0$. Por tanto, S es un conjunto no vacío. S está acotado superiormente puesto que todos los puntos de S están en $[a, b]$, y puesto que todo conjunto no vacío de números reales que está aco-

tado superiormente tiene un *extremo superior,* a éste se le llama c. Se trata de demostrar que $f(c) = 0$.

Hay sólo tres posibilidades: $f(c) > 0$, $f(c) < 0$, y $f(c) = 0$. Si $f(c) > 0$ hay un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ o $(c - \delta, c]$ si $c = b$, tal que $f(x)$ es positivo si x está en este intervalo. Por tanto, ningún punto de S puede estar a la derecha de $c - \delta$, y por tanto $c - \delta$ es una cota superior del conjunto S. Pero $c - \delta < c$ y c es el *extremo* superior de S. Por tanto la desigualdad $f(c) > 0$ es imposible. Si $f(c) < 0$ hay un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ o $[c, c + \delta)$ si $c = a$, en el cual f es negativa y por tanto $f(x) < 0$ para algún $x > c$, contra el hecho de que c es una cota superior de S. Por tanto $f(c) < 0$ también es imposible y queda sólo la posibilidad $f(c) = 0$. Además $a < c < b$ puesto que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Con lo cual queda demostrado el teorema de Bolzano.

3.10 Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Consecuencia inmediata del teorema de Bolzano es el *teorema del valor intermedio* para funciones continuas (véase figura 3.8).

TEOREMA 3.8. *Sea f continua en cada punto de un intervalo $[a, b]$. Si $x_1 < x_2$ son dos puntos cualesquiera de $[a, b]$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$,* la función f *toma todos los valores comprendidos entre $f(x)_1$ y $f(x_2)$ por lo menos una vez en el intervalo (x_1, x_2).*

Demostración. Supóngase $f(x_1) < f(x_2)$ y sea k un valor cualquiera comprendido entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Sea g una función definida en $[x_1, x_2]$ como sigue:

$$g(x) = f(x) - k,$$

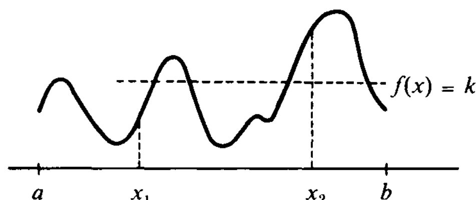


FIGURA 3.8 *Teorema del valor intermedio.*

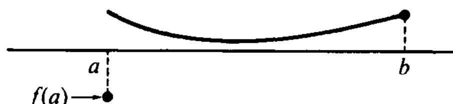


FIGURA 3.9 *Ejemplo en el que no es aplicable el teorema de Bolzano.*

g es continua en cada punto de $[x_1, x_2]$ y se tiene:

$$g(x_1) = f(x_1) - k < 0, \qquad g(x_2) = f(x_2) - k > 0.$$

Aplicando el teorema de Bolzano a g se tiene $g(c) = 0$ para algún c entre x_1 y x_2, lo cual significa $f(c) = k$, quedando así demostrado el teorema.

Nota: Tanto en el teorema de Bolzano como en el teorema del valor intermedio se supone que f es continua en todos los puntos del intervalo $[a, b]$ incluidos los extremos a y b. Para entender por qué es necesaria la continuidad en los extremos a y b se considera la curva de la figura 3.9. Ésta es continua en todos los puntos de $[a, b]$ excepto en a. A pesar de ser $f(a)$ negativa y $f(b)$ positiva no existe ningún x en $[a, b]$ para el cual $f(x) = 0$.

Finalmente se da en esta Sección una aplicación del teorema del valor intermedio en la cual se demuestra que cada número real positivo tiene una raíz n-sima, lo cual ya se había indicado en la Sección I 3.14. El enunciado preciso de esta propiedad es el siguiente:

TEOREMA 3.9. *Si n es un entero positivo y si $a > 0$, existe un entero positivo y sólo uno b tal que $b^n = a$.*

Demostración. Sea un número $c > 1$ y tal que $0 < a < c$ y considérese la función f definida en el intervalo $[0, c]$ por $f(x) = x^n$. Esta función es continua en $[0, c]$ y en los extremos se tiene $f(0)=0$ y $f(c)=c^n$. Puesto que $0<a<c<c^n$ el número a dado está comprendido entre los valores de la función $f(0)$ y $f(c)$. Por tanto, en virtud del teorema del valor intermedio, se tiene $f(x) = a$ para algún x en $[0, c]$, sea $x = b$. Esto demuestra la existencia de por lo menos un positivo b tal que $b^n = a$. No puede haber más que uno puesto que f es creciente en sentido estricto en $[0, c]$, con lo cual queda demostrado el teorema.

3.11 Ejercicios

1. Sea f un polinomio de grado n en x, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, tal que el primero y el último coeficientes c_0 y c_n tienen signos opuestos. Demostrar que $f(x) = 0$ por lo menos para un valor positivo de x.
2. Se dice que un número real x_1 es una raíz real de la ecuación $f(x) = 0$ si $f(x_1) = 0$. Decimos que una raíz real de una ecuación ha sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a, b]$ que contiene esta raíz y ninguna otra. Con ayuda del teorema de Bolzano, separar las raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones (cada una tiene cuatro raíces reales):
   (a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0$.
   (b) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$.
   (c) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0$.
3. Si n es un entero positivo impar y $a < 0$, demostrar que existe un número negativo b y sólo uno tal que $b^n = a$.
4. Sea $f(x) = \tan x$. A pesar de ser $f(\pi/4) = 1$ y $f(3\pi/4) = -1$, no hay ningún punto x en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ tal que $f(x) = 0$. Explicar por qué no hay contradicción con el teorema de Bolzano.
5. Dada una función f de valores reales continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Supongamos que $0 \leq f(x) \leq 1$ para cada x en $[0, 1]$. Demostrar que existe por lo menos un punto

c en $[0, 1]$ para el cual $f(c) = c$. Tal punto se llama un *punto fijo* de f. El resultado de este Ejercicio es un caso particular del *teorema del punto fijo de Brower*. [*Indicación:* Aplicar el teorema de Bolzano a $g(x) = f(x) - x$.]

6. Dada una función f de valores reales continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Suponiendo que $f(a) \leq a$ y que $f(b) \geq b$, demostrar que f tiene un punto fijo en $[a, b]$. (Véase Ejercicio 5.)

3.12 El proceso de inversión

En esta Sección se estudia otro método importante que se usa con frecuencia para construir nuevas funciones a partir de otras funciones dadas. Antes de describir el método con detalle, damos un sencillo ejemplo.

Consideremos la función f definida en el intervalo $[0, 2]$ por la ecuación $f(x) = 2x + 1$. El recorrido de f es el intervalo $[1, 5]$. Cada punto x de $[0, 2]$ es llevado por f a un único punto y de $[1, 5]$, a saber

$$y = 2x + 1. \tag{3.21}$$

Recíprocamente, para todo y de $[1, 5]$, existe un único x en $[0, 2]$ para el que $y = f(x)$. Para encontrar este x, resolvemos la ecuación (3.21) obteniendo

$$x = \tfrac{1}{2}(y - 1).$$

Esta ecuación define x como función de y. Si representamos esta función por g, tenemos

$$g(y) = \tfrac{1}{2}(y - 1)$$

para cada y de $[1, 5]$. La función g se llama la *inversa* de f. Obsérvese que $g[f(x)] = x$ para cada x de $[0, 2]$, y que $f[g(y)] = y$ para cada y de $[1, 5]$.

Consideremos ahora una función más general f con dominio A y recorrido B. A cada x de A corresponde un y en B tal que $y = f(x)$. Para cada y de B, existe por lo menos un x de A tal que $f(x) = y$. Supongamos que existe *uno solo* de esos x. Entonces podemos definir una nueva función g en B del modo siguiente:

$$g(y) = x \quad \text{significa que} \quad y = f(x).$$

Dicho de otro modo, el valor de g en cada punto y de B es el único x de A tal que $f(x) = y$. Esta nueva función g se llama la *inversa* de f. El proceso mediante el cual se obtiene g a partir de f se llama *inversión*. Obsérvese que $g[f(x)] = x$ para todo x de A y que $f[g(y)] = y$ para todo y de B.

El proceso de inversión puede aplicarse a cualquier función f que tenga la propiedad de que para cada y en el recorrido de f, existe un solo x en el dominio de f tal que $f(x) = y$. En particular, una función continua y estrictamente monótona en un intervalo $[a, b]$ tiene esa propiedad. En la figura 3.10 se muestra un ejemplo. Sean $c = f(a)$, $d = f(b)$. El teorema del valor intermedio para las funciones continuas nos dice que en el intervalo $[a, b]$, f toma todo valor comprendido entre c y d. Además, no puede tomar dos veces el mismo valor porque $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Por consiguiente, toda función continua estrictamente monótona tiene inversa.

La relación entre una función f y su inversa g puede explicarse también con la formulación de pares ordenados del concepto de función. En la Sección 1.3 se define una función f como un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que dos cualesquiera no tienen el mismo primer elemento. La función inversa g se forma tomando los pares (x, y) de f e intercambiando los elementos x e y. Esto es $(y, x) \in g$ si y sólo si $(x, y) \in f$. Si f es estrictamente monótona, dos pares cualesquiera de f no tienen el mismo segundo elemento, y por tanto dos pares cualesquiera de g no tienen el mismo primer elemento. Así pues g es una función.

EJEMPLO. *Función raíz enésima.* Si n es un entero positivo, pongamos $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$. Entonces f es estrictamente creciente en todo intervalo $[a, b]$ con $0 \leq a \leq b$. La función inversa g es la función raíz enésima, definida para $y \geq 0$ por la ecuación

$$g(y) = y^{1/n}$$

3.13 Propiedades de las funciones que se conservan por la inversión

Muchas de las propiedades que posee una función f se transmiten a la inversa g. La figura 3.11 muestra la relación entre sus gráficas. Puede obtenerse una a partir de la otra mediante una simple simetría respecto a la recta $y = x$, debido a que un punto (u, v) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (v, u) está sobre la gráfica de g.

Las propiedades de monotonía y continuidad que posee f se transmiten a la función inversa g, como se afirma en el teorema siguiente.

TEOREMA 3.10. *Sea f estrictamente creciente y continua en un intervalo $[a, b]$. Sean $c = f(a)$ y $d = f(b)$ y sea g la inversa de f. Esto es, para cada y en $[c, d]$, sea $g(y)$ aquel x de $[a, b]$ tal que $y = f(x)$. Entonces*

a) *g es estrictamente creciente en $[c, d]$;*
b) *g es continua en $[c, d]$.*

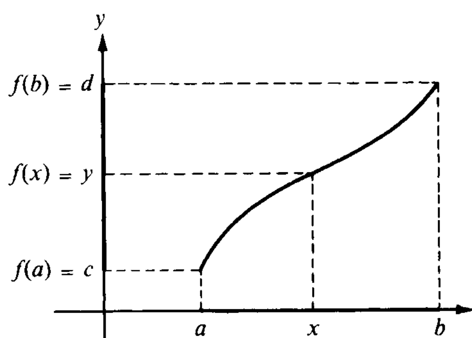


FIGURA 3.10 *Función continua estrictamente creciente.*

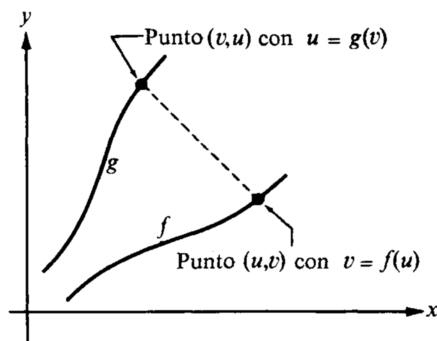


FIGURA 3.11 *Representación gráfica del proceso de inversión.*

Demostración. Elijamos $y_1 < y_2$ en $[c, d]$ y pongamos $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Entonces $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Puesto que f es estrictamente creciente, la relación $y_1 < y_2$ implica que $x_1 < x_2$, la cual, a su vez, implica que g sea estrictamente creciente en $[c, d]$. Esto demuestra la parte a).

Demostremos ahora b). La demostración está representada en la figura 3.12. Elijamos un punto y_0 en el intervalo abierto (c, d). Para demostrar que g es continua en y_0, debemos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

(3.22) $$g(y_0) - \epsilon < g(y) < g(y_0) + \epsilon \quad \text{siempre que} \quad y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$$

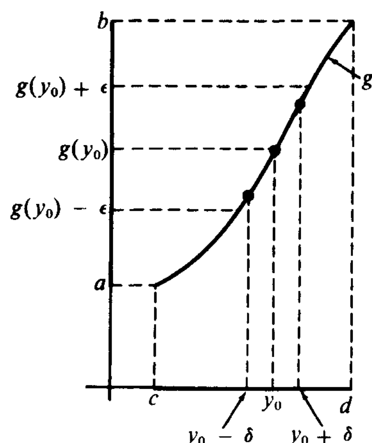
Pongamos $x_0 = g(y_0)$, de modo que $f(x_0) = y_0$. Supongamos ϵ dado. (No se pierde generalidad si consideramos aquellos valores de ϵ bastante pequeños para que $x_0 - \epsilon$ y $x_0 + \epsilon$ queden en el interior de $[a, b]$.) Sea δ el menor de los dos números

$$f(x_0) - f(x_0 - \epsilon) \qquad \text{y} \qquad f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)\,.$$

Es fácil comprobar que con este δ se verifica (3.22). Una ligera modificación del razonamiento prueba que g es continua a la derecha de c, y a la izquierda de d.

Existe el teorema análogo para funciones decrecientes. Esto es, la inversa de una función f estrictamente decreciente es estrictamente decreciente y continua. Esto resulta de aplicar el teorema 3.10 a $-f$.

EJEMPLO. *Continuidad de la función raíz enésima.* La función raíz enésima g, definida por $y \geq 0$ por la ecuación $g(y) = y^{1/n}$, es estrictamente creciente y continua en todo intervalo $[c, d]$ con $0 \leq c < d$, puesto que es la inversa de una función continua estrictamente creciente. Esto nos da otra demostración de la continuidad de la función raíz enésima, independiente de la teoría de la integración. Puesto que el producto de funciones continuas es continuo, deducimos otra vez la continuidad de la función potencia, $h(y) = y^r$, siendo $r = m/n$ un número racional positivo e $y \geq 0$.



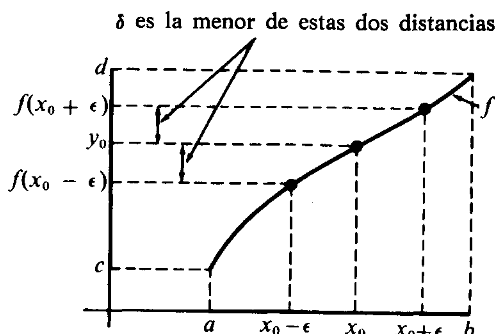


FIGURA 3.12 *Demostración de la continuidad de la función inversa.*

3.14 Inversas de funciones monótonas a trozos

Supongamos que intentamos aplicar el proceso de inversión a una función que no es monótona en $[a, b]$. Por ejemplo, considérese el caso en que $f(x) = x^2$ en un intervalo de la forma $[-c, c]$, del eje x. A cada punto x de este intervalo, f le hace corresponder exactamente un punto y del intervalo $[0, c^2]$, precisamente:

$$y = x^2 . \tag{3.23}$$

Pero la correspondencia entre los puntos de estos dos intervalos *no* es uno a uno. Si se resuelve la ecuación (3.23) de x respecto a y, se encuentra que existen *dos* valores de x correspondientes a cada y en $[0, c^2]$, que son:

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{y} .$$

Ya se mencionó en otro lugar que antes los matemáticos hubieran considerado la inversa g en este caso como una función *biforme* definida por

$$g(y) = \pm\sqrt{y} .$$

Pero el punto de vista más moderno no admite la multiformidad como una propiedad de las funciones y en casos como el considerado se dice que el proceso de inversión da lugar a *dos* nuevas funciones, g_1 y g_2 donde:

$$g_1(y) = \sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad g_2(y) = -\sqrt{y} \quad \text{para cada } y \text{ en } [0, c^2] \tag{3.24}$$

Para encajar este resultado con la noción de inversa tal como se expuso anteriormente, se puede considerar que la ecuación $y = x^2$ no define una función f sino *dos* funciones f_1 y f_2 donde:

$$f_1(x) = x^2 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq c \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = x^2 \quad \text{si} \quad -c \leq x \leq 0\,.$$

Estas funciones pueden considerarse como *distintas* porque tienen dominios distintos. Cada una de ellas es monótona en su dominio y cada una tiene una inversa, la inversa de f_1 es g_1 y la inversa de f_2 es g_2 donde g_1 y g_2 están dadas por (3.24).

Esto hace ver como el proceso de inversión puede aplicarse a funciones monótonas a trozos. Consideramos simplemente una tal función como una reunión de funciones monótonas e invertimos cada uno de los trozos.

Haremos un uso más amplio del proceso de inversión en el capítulo 6.

3.15 Ejercicios

En cada uno de los Ejercicios 1 al 5, demostrar que f es estrictamente monótona en todo el eje real. Desígnese por g la inversa de f. Describir el dominio de g en cada caso. Poner $y = f(x)$ y despejar x en función de y; hallar una fórmula (o fórmulas) para calcular $g(y)$ para cada y en el dominio de g.

1. $f(x) = x + 1$.
2. $f(x) = 2x + 5$.
3. $f(x) = 1 - x$.
4. $f(x) = x^3$.
5. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8x^{1/2} & \text{si } x > 4. \end{cases}$

Valores medios. Sea f continua y estrictamente monótona en el eje real positivo y sea g la inversa de f. Si $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ son n números reales positivos dados, se llama *valor medio* (o *promedio*) con respecto a f al número M definido como sigue:

$$M_f = g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right).$$

En particular, cuando $f(x) = x^p$ para $p \neq 0$, M_f se llama *media de potencias p-ésimas* (Véase también la Sección I 4.10.) Los Ejercicios que siguen se refieren a las propiedades de los valores medios.

6. Demostrar que $f(M_f) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$. Dicho de otro modo, el valor de f en el promedio M_f es la media aritmética de los valores $f(a_1), \ldots, f(a_n)$.
7. Demostrar que $a_1 < M_f < a_n$. De otro modo, el promedio de $a_1, \ldots, a_n$ está comprendido entre el mayor y el menor de los a_i.
8. Si $h(x) = af(x) + b$, donde $a \neq 0$, demostrar que $M_h = M_f$. Esto prueba que funciones distintas pueden conducir al mismo promedio. Interpretar geométricamente este teorema comparando las gráficas de h y f.

3.16 Teorema de los valores extremos para funciones continuas

Sea f una función de valores reales definida en un conjunto S de números reales. Se dice que la función f tiene un *máximo absoluto* en el conjunto S si existe por lo menos un punto c en S tal que

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para todo } x \text{ en } S.$$

El número $f(c)$ se llama máximo absoluto de f en S. Decimos que f tiene un *mínimo absoluto* en S si existe un punto d en S tal que

$$f(x) \geq f(d) \qquad \text{para todo } x \text{ en } S.$$

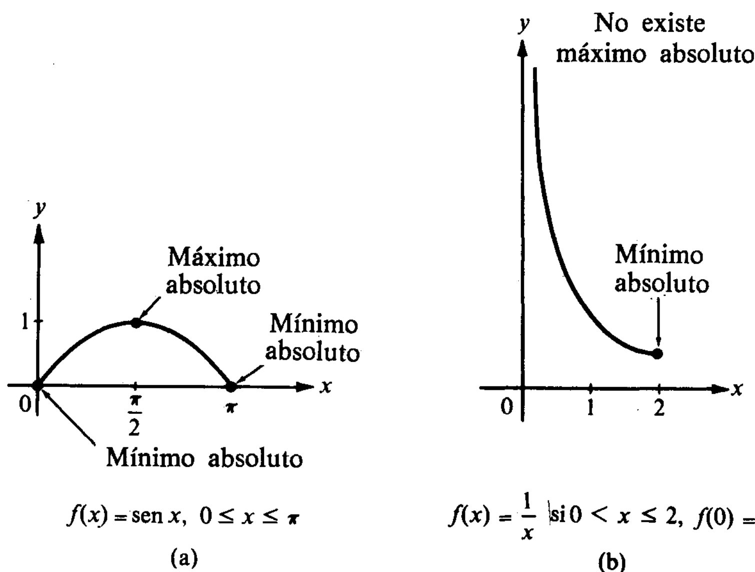


FIGURA 3.13 *Valores máximos y mínimos de las funciones.*

Esos conceptos se representan en la figura 3.13. En la figura 3.13 (a), S es el intervalo cerrado $[0, \pi]$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$. El mínimo, que se presenta en los extremos del intervalo, es 0. El máximo es $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$.

En la figura 3.13 (b), S es el intervalo cerrado $[0, 2]$ y $f(x) = 1/x$ si $x > 0$, $f(0) = 1$. En este ejemplo, f posee un mínimo absoluto en $x = 2$, pero no tiene máximo absoluto. No posee máximo debido a una discontinuidad en un punto de S.

Queremos demostrar que si S es un intervalo cerrado y f es continua en todo S, entonces f posee un máximo absoluto y un mínimo absoluto en S. Este resultado, conocido como el teorema del máximo (mínimo) para funciones continuas, se deducirá como una sencilla consecuencia del siguiente teorema.

TEOREMA 3.11. TEOREMA DE ACOTACIÓN PARA FUNCIONES CONTINUAS. *Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f es acotada en $[a, b]$. Esto es, existe un número $C \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo x en $[a, b]$.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo o contradicción, utilizando una técnica llamada método de bipartición. Supongamos que f *no es acotada* en $[a, b]$. Sea c el punto medio de $[a, b]$. Ya que f no es acotada en $[a, b]$ tampoco lo está por lo menos en uno de los subintervalos $[a, c]$ o $[c, b]$. Sea $[a_1, b_1]$ aquella mitad de $[a, b]$ en la que f no está acotada. Si f no es acotada en ambas mitades, sea $[a_1, b_1]$ la mitad izquierda de $[a, c]$. Continuemos el proceso de bipartición reiteradamente, designando con $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ la mitad de $[a_n, b_n]$ en la cual f no es acotada, con el convenio de elegir la mitad izquierda si f no es acotada en ambas mitades. Como la longitud de cada intervalo es la mitad de su precedente, observamos que la longitud de $[a_n, b_n]$, es $(b-a)/2^n$.

Designemos con A el conjunto de los extremos izquierdos $a, a_1, a_2, \ldots$, así obtenidos, y sea α el extremo superior de A. Tal punto α está situado en $[a, b]$. Por la continuidad de f en α, existe un intervalo de la forma $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ en el que

$$|f(x) - f(\alpha)| < 1 . \tag{3.25}$$

Si $\alpha = a$ este intervalo tiene la forma $[a, a + \delta)$, y si $\alpha = b$ tiene la forma $(b - \delta, b]$. La desigualdad (3.25) implica

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)| ,$$

de modo que f es acotada por $1 + |f(\alpha)|$ en ese intervalo. Sin embargo, el intervalo $[a_n, b_n]$ está contenido en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ cuando n es lo bastante grande para que $(b - a)/2^n < \delta$. Por consiguiente f también es acotada en $[a_n, b_n]$, en contradicción con el hecho de que f está acotada en $[a_n, b_n]$. Esta contradicción completa la demostración.

Si f es acotada en $[a, b]$, el conjunto de todos los valores $f(x)$ está acotado superior e inferiormente. Por consiguiente, este conjunto tiene un extremo superior y un extremo inferior que designamos por $\sup f$ y por $\inf f$, respectivamente. Esto es, escribimos

$$\sup f = \sup \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}, \qquad \inf f = \inf \{f(x) \mid a \leq x \leq b\} .$$

Para cualquier función acotada tenemos $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$ para todo x en

$[a, b]$. A continuación demostramos que una función continua alcanza los valores $\inf f$ y $\sup f$ en algún punto de $[a, b]$.

TEOREMA 3.12. TEOREMA DEL MÁXIMO (MÍNIMO) PARA FUNCIONES CONTINUAS. *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existen puntos c y d en $[a, b]$ tales que*

$$f(c) = \sup f \qquad y \qquad f(d) = \inf f.$$

Demostración. Basta probar que f alcanza su extremo superior en $[a, b]$. Para el extremo inferior basta tener en cuenta que el extremo inferior de f es el extremo superior de $-f$.

Sea $M = \sup f$. Supondremos que no existe un x en $[a, b]$ para el que $f(x) = M$ y se llegará a una contradicción. Sea $g(x) = M - f(x)$. Para todo x en $[a, b]$ será entonces $g(x) > 0$ con lo que la función recíproca $1/g$ es continua en $[a, b]$, pongamos $1/g(x) < C$ para todo x en $[a, b]$, siendo $C > 0$. Esto implica que $M - f(x) > 1/C$, con lo que $f(x) < M - 1/C$ para todo x de $[a, b]$. Esto está en contradicción con el hecho de que M es la menor cota superior de f en $[a, b]$. Por consiguiente, $f(x) = M$ para un x por lo menos en $[a, b]$.

Nota: Este teorema demuestra que si f es continua en $[a, b]$, el $\sup f$ es su máximo absoluto, y el $\inf f$ es su mínimo absoluto. Luego, en virtud del teorema del valor intermedio, el recorrido de f es el intervalo cerrado $[\inf f, \sup f]$.

3.17 Teorema de la continuidad uniforme

Sea f una función de valores reales y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sean $M(f)$ y $m(f)$ los valores máximo y mínimo respectivamente de f en $[a, b]$. A la diferencia

$$M(f) - m(f)$$

la llamaremos *oscilación* de f en el intervalo $[a, b]$. Se podría utilizar la palabra *extensión,* en lugar de *oscilación,* ya que esta palabra tiene el inconveniente de sugerir funciones ondulantes. En textos antiguos se emplea *saltus,* equivalente latino de brinco o salto; pero nosotros conservaremos el nombre de oscilación, por ser su uso muy generalizado. Observemos que la oscilación de f en cualquier subintervalo de $[a, b]$ no puede superar la de f en $[a, b]$.

Demostraremos seguidamente que el intervalo $[a, b]$ puede subdividirse de modo que la oscilación de f en cada subintervalo sea tan pequeña como se se quiera. Esta propiedad, en forma precisa, es la que da el siguiente teorema, que equivale al que ordinariamente se denomina *teorema de la continuidad uniforme.*

TEOREMA 3.13. *Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para todo $\epsilon > 0$ existe una partición de $[a, b]$, en un número finito de subintervalos, tal que la oscilación de f en todo subintervalo es menor que ϵ.*

Demostración. Razonaremos por contradicción, utilizando el método de biparticiones sucesivas. Supongamos que el teorema es *falso.* Esto es, que para un cierto ϵ, por ejemplo para $\epsilon = \epsilon_0$, el intervalo $[a, b]$ no puede ser subdividido en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales la oscilación de f sea menor que ϵ_0. Sea c el punto medio de $[a, b]$. Entonces para ese ϵ_0 el teorema es falso en uno por lo menos de los dos subintervalos $[a, c]$ o $[c, b]$. (Si el teorema fuese cierto en ambos subintervalos, también lo sería en el intervalo completo $[a, b]$.) Sea $[a_1, b_1]$ aquella mitad de $[a, b]$ en la que el teorema es falso para ϵ_0. Si es falso en ambas mitades, sea $[a_1, b_1]$ la mitad izquierda $[a, c]$. Reiteramos el proceso de bipartición, designando por $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ aquella mitad de $[a_n, b_n]$ en la que el teorema es falso para ϵ_0, teniendo en cuenta que elegimos la mitad izquierda si el teorema es falso en ambas mitades de $[a_n, b_n]$. Nótese que la oscilación de f en cada subintervalo de $[a_n, b_n]$ así construido es por lo menos ϵ_0.

Llamemos A al conjunto de extremos izquierdos $a, a_1, a_2, \ldots,$ construidos como se indicó, y sea α la mínima cota superior de A. Este punto α está situado en $[a, b]$. Por la continuidad de f en α, existe un intervalo $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ en el que la oscilación de f es menor que ϵ_0. (Si $\alpha = a$, ese intervalo es $[a, a + \delta)$, y si $\alpha = b$, es $(b - \delta, b]$.) Sin embargo, el intervalo $[a_n, b_n]$ está dentro de $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ cuando n es lo bastante grande para que $(b - a)/2^n < \delta$, con lo que la oscilación de f en $[a_n, b_n]$ es también menor que ϵ_0, lo que está en contradicción con el hecho de que la oscilación de f es por lo menos ϵ_0 en $[a_n, b_n]$. Esta contradicción completa la demostración del teorema 3.13.

3.18 Teorema de integrabilidad para funciones continuas

El teorema de la continuidad uniforme puede utilizarse para demostrar que una función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

TEOREMA 3.14. INTEGRABILIDAD DE FUNCIONES CONTINUAS. *Si una función f es continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$, es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. El teorema 3.11 demuestra que f es acotada en $[a, b]$, con lo que f tiene una integral superior, $\bar{I}(f)$, y una integral inferior $\underline{I}(f)$. Demostraremos que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

Elijamos un entero $N \geq 1$ y sea $\epsilon = 1/N$. En virtud del teorema de la continuidad uniforme, elegido este ϵ existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ en n subintervalos tales que la oscilación de f en cualquier subintervalo es menor que ϵ. Designemos por $M_k(f)$ y $m_k(f)$, respectivamente, el máximo y el mínimo absolutos de f en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Tenemos entonces

$$M_k(f) - m_k(f) < \epsilon$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Sean s_n y t_n dos funciones escalonadas definidas en $[a, b]$ como sigue:

$$s_n(x) = m_k(f) \quad \text{si} \quad x_{k-1} < x \leq x_k\,, \qquad s_n(a) = m_1(f),$$

$$t_n(x) = M_k(f) \quad \text{si} \quad x_{k-1} \leq x < x_k\,, \qquad t_n(b) = M_n(f).$$

Tenemos entonces $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$ para todo x de $[a, b]$. Tenemos también

$$\int_a^b s_n = \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{y} \qquad \int_a^b t_n = \sum_{k=1}^n M_n(f)(x_k - x_{k-1})\,.$$

La diferencia de esas dos integrales es

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)](x_k - x_{k-1}) < \epsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \epsilon(b - a)\,.$$

Puesto que $\epsilon = 1/N$, esta desigualdad puede escribirse en la forma

(3.26) $$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n < \frac{b-a}{N}\,.$$

Por otra parte, las integrales superior e inferior de f satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s_n \leq \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n \qquad \text{e} \qquad \int_a^b s_n \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t_n\,.$$

Multiplicando el primer conjunto de desigualdades por (-1) y sumando el resultado al segundo conjunto obtenemos

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n - \int_a^b s_n\,.$$

Haciendo uso de (3.26) y la relación $\underline{I}(f)) \leq \bar{I}(f)$, tenemos

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) < \frac{b-a}{N}$$

para todo entero $N \geq 1$. Por consiguiente, según el teorema I.31, debe ser $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. Esto demuestra que f es integrable en $[a, b]$.

3.19 Teoremas del valor medio para funciones continuas

En la Sección 2.16 se definió el valor promedio $A(f)$ de una función f sobre un intervalo $[a, b]$ como el cociente $\int_a^b f(x)\,dx/(b-a)$. Cuando f es continua, podemos demostrar que este valor promedio es igual al valor de f en un cierto punto de $[a, b]$.

TEOREMA 3.15. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES. *Si f es continua en $[a, b]$, para un cierto c de $[a, b]$ tenemos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Demostración. Representamos por m y M, respectivamente, los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$. Entonces $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Integrando esas desigualdades y dividiendo por $b-a$, encontramos que $m \leq A(f) \leq M$, siendo $A(f) = \int_a^b f(x)\,dx/(b-a)$. Pero ahora el teorema del valor intermedio nos dice que $A(f) = f(c)$ para un cierto c de $[a, b]$. Esto completa la demostración.

Para valores medios ponderados hay un resultado análogo.

TEOREMA 3.16. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PONDERADO PARA INTEGRALES. *Supongamos que f y g son continuas en $[a, b]$. Si g no cambia nunca de signo en $[a, b]$ entonces, para un cierto c de $[a, b]$, tenemos*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{3.27}$$

Demostración. No cambiando nunca de signo en $[a, b]$, g es siempre no negativa o siempre no positiva en $[a, b]$. Supongamos que g es no negativa en $[a, b]$. Entonces podemos razonar como en la demostración del teorema 3.15, excepto que integramos las desigualdades $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ obteniendo

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{3.28}$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, esa desigualdad demuestra que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. En este caso, la ecuación (3.27) se satisface para cualquier c ya que ambos miembros son cero. De otro modo, la integral de g es positiva, y podemos dividir por esta integral en (3.28) y aplicar como antes el teorema del valor intermedio para completar la demostración. Si g es no positiva, aplicamos el mismo razonamiento $-g$.

El teorema del valor medio ponderado nos lleva algunas veces a estimaciones útiles para la integral de un producto de dos funciones y especialmente si la integral de uno de los factores es fácil de calcular. En los próximos Ejercicios se dan ejemplos.

3.20 Ejercicios

1. Con el teorema 3.16 establecer las desigualdades siguientes:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}.$$

2. Teniendo en cuenta que $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)/\sqrt{1-x^2}$ y por medio del teorema 3.16 obtener las desigualdades

$$\frac{11}{24} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx \leq \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

3. Utilizar la identidad $1 + x^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$ y el teorema 3.16 para demostrar que para $a > 0$, tenemos

$$\frac{1}{1+a^6}\left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

Tómese $a = 1/10$ y calcular el valor de la integral con seis cifras decimales.

4. Una de las siguientes afirmaciones es incorrecta. Explicar por qué es falsa.

a) La integral $\int_{2\pi}^{4\pi} (\operatorname{sen} t)/t\,dt > 0$ debido a que $\int_{2\pi}^{3\pi} (\operatorname{sen} t)/t\,dt > \int_{3\pi}^{4\pi} |\operatorname{sen} t|/t\,dt$.

b) La integral $\int_{2\pi}^{4\pi} (\operatorname{sen} t)/t\,dt = 0$ porque, según el teorema 3.16, para un cierto c comprendido entre 2π y 4π tenemos

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{1}{c}\int_{2\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} t\,dt = \frac{\cos(2\pi) - \cos(4\pi)}{c} = 0.$$

5. Si n es un entero positivo, utilizar el teorema 3.16 para demostrar que

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{(-1)^n}{c}, \qquad \text{donde } \sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi}.$$

6. Supóngase que f es continua en $[a, b]$. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, demostrar que $f(c) = 0$ por lo menos para un c de $[a, b]$.

7. Supóngase que f es integrable y no negativa en $[a, b]$. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, demostrar que $f(x) = 0$ en cada punto de continuidad de f. [*Indicación:* Si $f(c) > 0$ en un punto de continuidad c, existe un entorno de c en el cual $f(x) > \frac{1}{2}f(c)$.]

8. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, para toda función g que sea continua en $[a, b]$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$.

4

CÁLCULO DIFERENCIAL

4.1 Introducción histórica

Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo integral hasta llegar a conseguir que problemas, en su tiempo irresolubles, pudieran serlo por los nuevos métodos y de forma casi rutinaria. Su mayor logro fue esencialmente el hecho de poder fundir en uno el Cálculo integral y la segunda rama importante del Cálculo: el Cálculo diferencial.

La idea central del Cálculo diferencial es la noción de *derivada.* Igual que la integral, la derivada fue originada por un problema de Geometría: el problema de hallar la tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de la Matemática. Este concepto no se formuló hasta el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat, trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones.

La idea de Fermat, básicamente muy simple, puede comprenderse con auxilio de la figura 4.1. Se supone que en cada uno de sus puntos, esta curva tiene una dirección definida que puede venir dada por la tangente. Cada una de estas tangentes se ha indicado en la figura por una recta de trazos. Fermat observó que en aquellos puntos en que la curva tiene un máximo o un mínimo como los de la figura, de abscisas x_0 y x_1, la tangente ha de ser horizontal. Por tanto, el problema de localizar estos valores extremos se reduce al de la localización de las tangentes horizontales.

Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección de la tangente en un *punto arbitrario* de la curva. El intento de resolver este problema fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas de las ideas rudimentarias referentes a la noción de derivada.

A primera vista parece que no habrá conexión entre el problema de hallar el área de una región limitada por una curva y el de hallar la tangente en un punto de una curva. El primero que descubrió que estas dos ideas, en apariencia

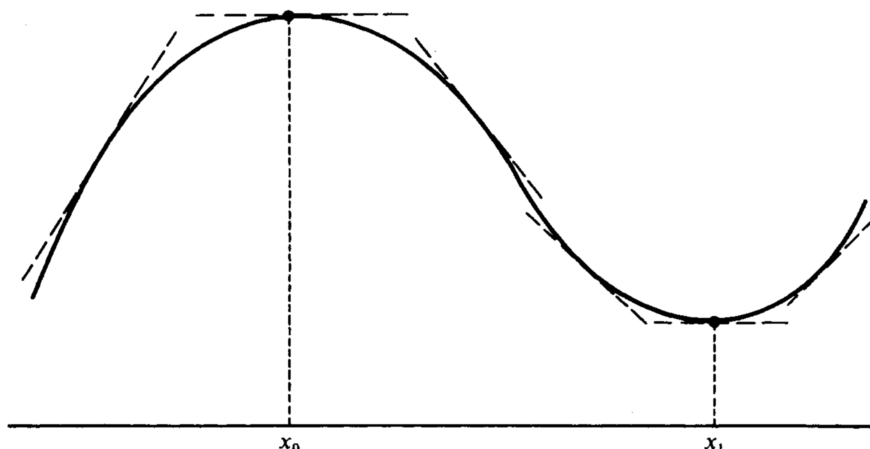


FIGURA 4.1 *La curva tiene tangentes horizontales en los puntos* x_0 *y* x_1.

sin conexión, estaban íntimamente ligadas, fue el maestro de Newton, Isaac Barrow (1630-1677). Sin embargo, Newton y Leibniz fueron los primeros que comprendieron la verdadera importancia de esta relación y la explotaron en forma tal que inauguraron una etapa sin precedente en el desarrollo de la Matemática.

Aunque la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vio que proporcionaba también un instrumento para el cálculo de *velocidades* y, en general para el estudio de la *variación* de una función. En el apartado siguiente se considerará un problema particular que se refiere al cálculo de una velocidad. La solución de este problema contiene todas las características esenciales del concepto de derivada, y su análisis conduce a la definición general que se da en el apartado 4.3.

4.2 Un problema relativo a velocidad

Sea un proyectil lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de 45 m por segundo. Prescindiendo del rozamiento, se supone que solamente actúa la gravedad, por lo que el proyectil se mueve en línea recta. Sea $f(t)$ la altura en metros que alcanza el proyectil t segundos después del lanzamiento. Si la fuerza de la gravedad no actuara en él, el proyectil continuaría subiendo a velocidad constante, recorriendo una distancia de 45 m cada segundo, y en el tiempo t se tendría $f(t) = 45t$. Pero a causa de la gravedad, el proyectil va retardándose hasta que su velocidad llega a valer cero, y a partir de este momento cae al suelo. Experiencias físicas indican que mientras el proyectil está en movimiento su altura $f(t)$ viene dada aproximadamente por la fórmula

(4.1) $$f(t) = 45t - 5t^2.$$

El término $-5t^2$ es debido a la influencia de la gravedad. Obsérvese que $f(t) = 0$ cuando $t = 0$ y $t = 9$; o sea, que el proyectil regresa a la tierra después de 9 segundos, por lo que la fórmula 4.1 sólo es válida para $0 \leq t \leq 9$.

El problema a considerar es el siguiente: *Determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento.* Para poder comprender este problema, hay que precisar lo que *se entiende* por velocidad en cada instante. Para ello, se introduce la noción de *velocidad media durante un intervalo de tiempo,* es decir, desde el instante t al $t + h$, definiéndola como el cociente:

$$\frac{\text{diferencia de distancias en el intervalo de tiempo}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Este cociente, llamado *cociente incremental,* es un número que se puede calcular siempre que t y $t + h$ pertenezcan ambos al intervalo $[0, 9]$. El número h puede ser positivo o negativo, pero no cero. Se dejará fijo t y se estudiará lo que le ocurre al cociente incremental, cuando se dan a h valores cada vez menores en valor absoluto.

Por ejemplo, considérese el instante $t = 2$. La distancia recorrida después de 2 segundos es:

$$f(2) = 90 - 20 = 70.$$

En el tiempo $t = 2 + h$ la distancia recorrida es:

$$f(2 + h) = 45(2 + h) - 5(2 + h)^2 = 70 + 25h - 5h^2.$$

Por tanto, la velocidad media en el intervalo entre $t = 2$ y $t = 2 + h$ es

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{25h - 5h^2}{h} = 25 - 5h.$$

Tomando valores de h cada vez más pequeños en valor absoluto, esta velocidad media, se acerca más y más a 25. Por ejemplo, si $h = 0{,}1$ la velocidad media es 24,5; si $h = 0{,}001$, es 24,995; si $h = 0{,}00001$, se obtiene el valor 24,99995, y cuando $h = -0{,}00001$ se obtiene 25,00005. Lo importante es que se puede obtener la velocidad media tan próxima a 25 como se desee, sin más que tomar $|h|$ suficientemente pequeño. Se describe este hecho diciendo que la velocidad media *tiende al límite* 25 *cuando* h *tiende a cero.* Parece natural llamar al valor de este límite la *velocidad instantánea* en el instante $t = 2$.

Los mismos cálculos se pueden efectuar para cualquier otro instante. La velocidad media en un intervalo arbitrario entre t y $t + h$ está dado por el cociente:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{[45(t+h)-5(t+h)^2]-[45t-5t^2]}{h}=+45-10t-5h.$$

Cuando h tiende a cero, la expresión de la derecha tiende al límite $45 - 10t$ que define la *velocidad instantánea* en el instante t. Designando la velocidad instantánea por $v(t)$ se tiene

$$v(t) = 45 - 10t. \tag{4.2}$$

La fórmula (4.1) del espacio $f(t)$, define una función f que indica la altura a que se encuentra el proyectil en cada instante de su movimiento; f se denomina *función posición* o *ley de espacios*. Su dominio es el intervalo cerrado [0, 9]

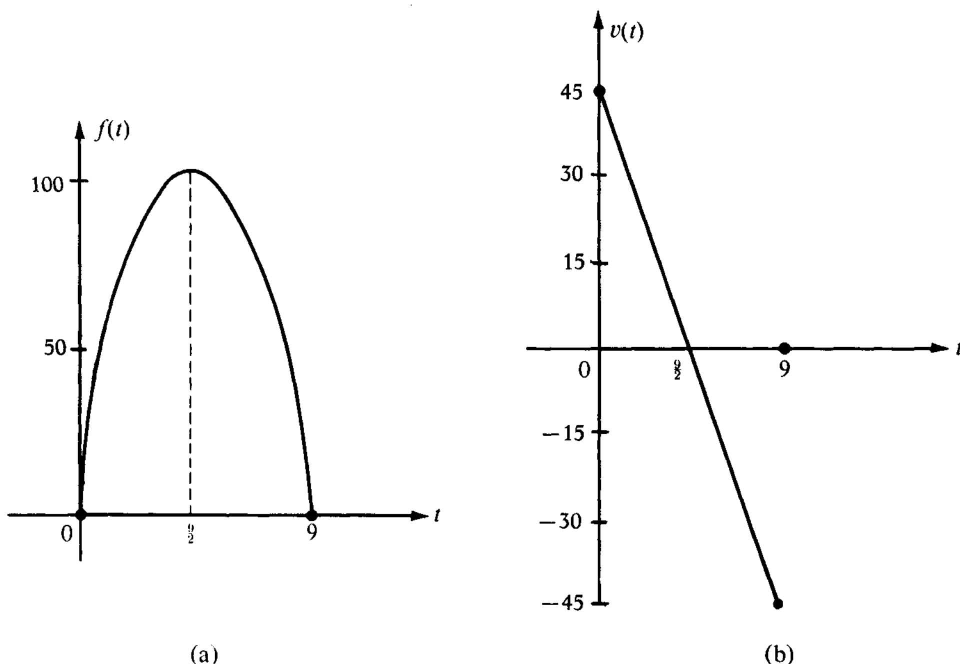


FIGURA 4.2 (a) *Gráfica de la función de posición* $f(t) = 45t - 5t^2$.
(b) *Gráfica de la función velocidad* $v(t) = 45 - 10t$.

y su gráfica es la de la figura 4.2(a). [La escala sobre el eje vertical en ambas figuras 4.2(a) y (b) ha sido modificada]. La fórmula (4.2) de la velocidad $v(t)$ define una nueva función v que indica la rapidez con que se mueve el proyectil en cada instante de su movimiento, se denomina *función velocidad* y su gráfica es la de la figura 4.2(b). Al crecer t de 0 a 9, $v(t)$ decrece constantemente de $v(0) = 45$ a $v(9) = -45$. Para hallar el instante t en el cual $v(t) = 0$ se resuelve la ecuación $45 = 10t$ obteniéndose $t = 9/2$. Por tanto, en el punto central del movimiento la influencia de la gravedad reduce la velocidad a cero y el proyectil queda instantáneamente fijo. La altura en este instante es $f(9/2) = 101{,}25$. Si $t > 9/2$, la velocidad es negativa y la altura decrece.

El proceso por el cual se obtiene $v(t)$ a partir del cociente incremental se denomina «hallar el límite cuando h tiende a cero», y se expresa simbólicamente como sigue:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} . \tag{4.3}$$

Esta expresión usada para definir la velocidad, en el ejemplo anterior, tiene un sentido más amplio y permite definir la velocidad en movimientos a lo largo de una línea recta, cuando se conozca la función de posición f, y siempre que el cociente incremental tienda a un límite cuando h tiende a cero.

4.3 Derivada de una función

El ejemplo expuesto en la Sección anterior señala el camino para introducir el concepto de derivada. Sea f una función definida por lo menos, en un intervalo abierto (a, b) del eje x. Se elige un punto x en este intervalo y se forma el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} ,$$

donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x + h$ pertenezca también a (a, b). El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x + h$. El cociente representa la *variación media* de f en el intervalo que une x a $x + h$.

Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f'(x)$ (se lee «f prima de x»). Con lo que la definición formal de $f'(x)$ puede establecerse del siguiente modo:

DEFINICIÓN DE DERIVADA. *La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{4.4}$$

con tal que el límite exista. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x.

Comparando (4.4) con (4.3) se ve que el concepto de velocidad instantánea es simplemente un ejemplo del concepto de derivada. La velocidad $v(t)$ es igual a la derivada $f'(t)$ cuando f es la ley de espacios; lo que frecuentemente se expresa diciendo, que la velocidad es la relación entre la variación del espacio y la del tiempo. En el ejemplo desarrollado en la Sección 4.2 la ley de espacios está dada por la ecuación

$$f(t) = 45t - 5t^2$$

y su derivada f' es una nueva función (velocidad) dada por

$$f'(t) = 45 - 10t.$$

En general, el proceso de paso al límite por el que se obtiene $f'(x)$ a partir de $f(x)$, abre un camino para obtener una nueva función f' a partir de una función dada f. Este proceso se denomina *derivación,* y f' es la *primera derivada* de f. Si f' a su vez está definida en un intervalo abierto se puede también calcular *su* primera derivada, indicada por f'' y que es la *segunda derivada* de f. Análogamente, la derivada n-sima de f, que se indica por $f^{(n)}$, se define como la derivada primera de $f^{(n-1)}$. Convendremos en que $f^{(0)} = f$, esto es, la derivada de orden cero es la misma función.

En el caso del movimiento rectilíneo, la primera derivada de la velocidad (segunda derivada del espacio) se denomina *aceleración.* Por ejemplo, para calcular la aceleración en el ejemplo de la Sección 4.2 se puede utilizar la ecuación (4.2) para formar el cociente de diferencias

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{[45 - 10(t+h)] - [45 - 10t]}{h} = \frac{-10h}{h} = -10.$$

Como este cociente no varía al tender h a 0, se puede considerar que *tiende* a -10 (puesto que es -10 cuando h está próximo a 0). Se concluye pues, que la aceleración en este problema es constante e igual a -10, lo que indica que la velocidad decrece a una razón de 10 metros por segundo cada segundo. En 9 segundos el decrecimiento total de la velocidad es $9 \cdot 10 = 90$ m por segun-

do, que está de acuerdo con el hecho que durante los 9 segundos de movimiento la velocidad cambia de $v(0) = 45$ a $v(9) = -45$.

4.4 Ejemplos de derivadas

EJEMPLO 1. *Derivada de una función constante.* Supongamos que f es una función constante, sea por ejemplo $f(x) = c$ para todo x. El cociente de diferencias es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 .$$

Puesto que el cociente es 0 para todo $x \neq 0$, su límite, $f'(x)$, es también 0 para todo x. Dicho de otro modo, una función constante tiene derivada nula para todo x.

EJEMPLO 2. *Derivada de una función lineal.* Sea f una función lineal, por ejemplo $f(x) = mx + b$ para todo real x. Si $h \neq 0$, tenemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{mh}{h} = m .$$

Como que el cociente de diferencias no cambia cuando h tiende a 0, resulta que

$$f'(x) = m \quad \text{para cada } x.$$

Así que, la derivada de una función lineal es una función constante.

EJEMPLO 3. *Derivada de una función potencial de exponente entero positivo.* Consideremos el caso $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo. El cociente de diferencias es ahora

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} .$$

Para estudiar este cociente al tender h a cero, podemos proceder de dos maneras, o por la descomposición factorial del numerador considerado como diferencia de dos potencias n-simas o aplicando el teorema del binomio para el desarrollo de $(x+h)^n$. Seguiremos el primer método y dejaremos el segundo como Ejercicio para el lector. (Ver Ejercicio 39 de la Sección 4.6)

En álgebra elemental se tiene la identidad *

$$a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Si se toma $a = x + h$ y $b = x$ y dividimos ambos miembros por h, esa identidad se transforma en

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x + h)^k x^{n-1-k}.$$

En la suma hay n términos. Cuando h tiende a 0, $(x + h)^k$ tiende a x^k, el k-ésimo término tiende a $x^k x^{n-1-k} = x^{n-1}$, y por tanto la suma de los n términos tiende a nx^{n-1}. De esto resulta que

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad \text{para todo } x.$$

EJEMPLO 4. *Derivada de la función seno.* Sea $s(x) = \operatorname{sen} x$. El cociente de diferencias es

$$\frac{s(x + h) - s(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}.$$

Para transformarlo de modo que haga posible calcular el límite cuando $h \to 0$, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{y - x}{2} \cos \frac{y + x}{2}$$

poniendo $y = x + h$. Esto conduce a la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

* Esta identidad es una consecuencia inmediata de la propiedad telescópica de las sumas finitas. En efecto, si se multiplica cada término de la suma por $(a - b)$ se encuentra:

$$(a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}) = a^n - b^n.$$

Cuando $h \to 0$, el factor $\cos(x + \frac{1}{2}h) \to \cos x$ por la continuidad del coseno. Asimismo, la fórmula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \,,$$

establecida en la Sección 3.4, demuestra que

$$\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \to 1 \quad \text{para todo } h \to 0 \,. \tag{4.5}$$

Por lo tanto el cociente de diferencias tiene como límite $\cos x$ cuando $h \to 0$. Dicho de otro modo, $s'(x) = \cos x$ para todo x; la derivada de la función seno es la función coseno.

EJEMPLO 5. *Derivada de la función coseno.* Sea $c(x) = \cos x$. Demostraremos que $c'(x) = -\operatorname{sen} x$; esto es, la derivada de la función coseno es menos la función seno. Partamos de la identidad

$$\cos y - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{y - x}{2} \operatorname{sen} \frac{y + x}{2}$$

y pongamos $y = x + h$. Esto nos conduce a la fórmula

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) .$$

La continuidad del seno demuestra que $\operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}h) \to \operatorname{sen} x$ cuando $h \to 0$; a partir de (4.5) obtenemos $c'(x) = -\operatorname{sen} x$.

EJEMPLO 6. *Derivada de la función raíz n-sima.* Si n es un entero positivo, sea $f(x) = x^{1/n}$ para $x > 0$. El cociente de diferencias para f es

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^{1/n} - x^{1/n}}{h} .$$

Pongamos $u = (x + h)^{1/n}$ y $v = x^{1/n}$. Tenemos entonces $u^n = x + h$ y $v^n = x$, con lo que $h = u^n - v^n$, y el cociente de diferencias toma la forma

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1}} .$$

La continuidad de la función raíz n-sima prueba que $u \to v$ cuando $h \to 0$. Por consiguiente cada término del denominador del miembro de la derecha tiene límite v^{n-1} cuando $h \to 0$. En total hay n términos, con lo que el cociente de diferencias tiene como límite v^{1-n}/n. Puesto que $v = x^{1/n}$, esto demuestra que

$$f'(x) = \frac{1}{n}\, x^{1/n-1}\,.$$

EJEMPLO 7. *Continuidad de las funciones que admiten derivada.* Si una función f tiene derivada en un punto x, es también continua en x. Para demostrarlo, empleamos la identidad

$$f(x+h) = f(x) + h\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

que es válida para $h \neq 0$. Si hacemos que $h \to 0$, el cociente de diferencias del segundo miembro tiende a $f'(x)$ y, puesto que este cociente está multiplicado por un factor que tiende hacia 0, el segundo término del segundo miembro tiende a $0 \cdot f'(x) = 0$. Esto demuestra que $f(x+h) \to f(x)$ cuando $h \to 0$, y por tanto que f es continua en x.

Este ejemplo proporciona un nuevo procedimiento para probar la continuidad de las funciones. Cada vez que establecemos la existencia de una derivada $f'(x)$, establecemos también, al mismo tiempo, la continuidad de f en x. Debería observarse, no obstante, que el recíproco no es cierto. La continuidad en x no implica necesariamente la existencia de la derivada $f'(x)$. Por ejemplo, cuando $f(x) = |x|$, el punto $x = 0$ es de continuidad de f [puesto que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0$] pero no existe derivada en 0. (Véase la figura 4.3.) El cociente de diferencias $[f(0+h) - f(0)]/h$ es igual a $|h|/h$. Éste vale $+1$ si $h > 0$ y -1 si $h < 0$, y por consiguiente no tiene límite cuando $h \to 0$.

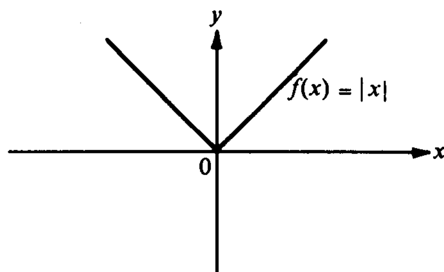


FIGURA 4.3 *La función es continua en* 0 *pero* $f'(0)$ *no existe*

4.5 Álgebra de las derivadas

Lo mismo que los teoremas relativos a los límites de la Sección 3.4 nos enseñan a calcular el límite de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones, el teorema siguiente nos proporciona un conjunto de reglas para el cálculo de derivadas.

TEOREMA 4.1. *Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo común. En cada punto en que f y g tienen derivadas, también las tienen la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto $f \cdot g$ y el cociente f/g. (Para f/g hay que añadir también que g ha de ser distinta de cero en el punto considerado). Las derivadas de estas funciones están dadas por las siguientes fórmulas:*

(i) $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) $(f-g)' = f' - g'$,

(iii) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ *en puntos x donde $g(x) \neq 0$.*

Antes de demostrar estos teoremas, es interesante dar algunas de sus consecuencias. Un caso particular de (iii) se tiene cuando una de las dos funciones es constante, por ejemplo, $g(x) = c$ para todo valor de x. En este caso, (iii) se transforma en: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; es decir, la derivada del producto de una función por una constante es el producto de la derivada de la función por la constante. Combinando esta propiedad con la de la derivada de una suma [propiedad (i)] se tiene, que para cada par de constantes c_1 y c_2, es:

$$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'.$$

Esta propiedad se denomina *propiedad lineal* de la derivada, y es análoga a la propiedad lineal de la integral.

Aplicando el método de inducción se puede extender la propiedad lineal a un número cualquiera finito de sumandos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i',$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son constantes y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones cuyas derivadas son $f_1', f_2', \ldots, f_n'$.

Cada fórmula referente a derivadas se puede escribir de dos maneras, o como una igualdad entre dos *funciones*, o como una igualdad entre *números*. Las propiedades del teorema 4.1 tal como se han escrito antes, son igualdades que contienen funciones. Por ejemplo, la propiedad (i) indica que la derivada de la función $f + g$ es la suma de dos funciones f' y g'. Cuando se consideran los valores de estas funciones en un punto x, se obtienen fórmulas entre números; así la fórmula (i) implica

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Vamos ahora a demostrar el teorema 4.1.

Demostración de (i). Sea x un punto en el que existen ambas derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$. El cociente de diferencias para $f + g$ es

$$\frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

Cuando $h \to 0$, el primer cociente del segundo miembro tiende a $f'(x)$ y el segundo a $g'(x)$ y por tanto la suma tiende a $f'(x) + g'(x)$. La demostración de (ii) es análoga.

Demostración de (iii). El cociente de diferencias para el producto $f \cdot g$ es:

$$\frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h}. \tag{4.6}$$

Para estudiar este cociente cuando $h \to 0$ se suma y resta al numerador un término conveniente para que se pueda escribir (4.6) como la suma de dos términos en los que aparezcan los cocientes de diferencias de f y g. Sumando y restando $g(x) f(x + h)$, (4.6) se convierte en

$$\frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} = g(x)\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + f(x + h)\frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

Cuando $h \to 0$ el primer término del segundo miembro tiende a $g(x)f'(x)$, y puesto que $f(x + h) \to f(x)$, el segundo término tiende a $f(x)g'(x)$, lo que demuestra (iii).

Demostración de (iv). Un caso particular de (iv) se tiene cuando $f(x) = 1$ para todo x. En este caso $f'(x) = 0$ y (iv) se reduce a la fórmula

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \tag{4.7}$$

suponiendo que $g(x) \neq 0$. A partir de este caso particular, se puede deducir la fórmula general (iv) escribiendo f/g como producto y aplicando (iii), con lo cual se tiene:

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{1}{g} \cdot f' + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}.$$

Por tanto, queda solamente por probar (4.7). El cociente de diferencias de $1/g$ es:

(4.8) $$\frac{[1/g(x+h)] - [1/g(x)]}{h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x+h)}.$$

Cuando $h \to 0$, el primer cociente de la derecha tiende a $g'(x)$ y el tercer factor tiende a $1/g(x)$. Se requiere la continuidad de g en x ya que se hace uso del hecho que $g(x+h) \to g(x)$ cuando $h \to 0$. Por tanto, el cociente en (4.8) tiende a $-g'(x)/g(x)^2$, lo que demuestra (4.7).

Nota: Para poder escribir (4.8) es necesario suponer que $g(x+h) \neq 0$ para todo h suficientemente pequeño. Esto es consecuencia del teorema 3.7.

El empleo del teorema 4.1 teniendo en cuenta los ejemplos expuestos en la Sección 4.4, nos permite deducir nuevos ejemplos de derivación.

EJEMPLO 1. *Polinomios.* En el ejemplo 3 de la Sección 4.4 se vio que si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$. Puede ser interesante para el lector encontrar de nuevo este resultado a partir del caso particular $n = 1$, aplicando el método de inducción juntamente con la fórmula de derivación de un producto.

Combinando este resultado con la propiedad lineal, se puede derivar cualquier polinomio sumando las derivadas de cada uno de los términos; es decir, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k,$$

derivando término a término se tiene

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k c_k x^{k-1}.$$

Obsérvese que la derivada de un polinomio de grado n es un polinomio de grado $n-1$. Por ejemplo, si $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8$, entonces $f'(x) = 6x^2 + 10x - 7$.

EJEMPLO 2. *Funciones racionales.* Si r es el cociente de dos polinomios, es decir, $r(x) = p(x)/q(x)$, la derivada $r'(x)$ se puede calcular por medio de la fórmu-

la del cociente (iv) del teorema 4.1. La derivada existe para todo x en el que $q(x) \neq 0$. Obsérvese que la función r' así definida es a su vez una función racional. En particular, si $r(x) = 1/x^m$ donde m es un entero positivo y $x \neq 0$ se tiene:

$$r'(x) = \frac{x^m \cdot 0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}} .$$

Escribiendo este resultado en la forma: $r'(x) = -mx^{-m-1}$ se obtiene una extensión a exponentes negativos de la fórmula dada para la derivación de potencias n-simas para n positivo.

EJEMPLO 3. *Potencias de exponente fraccionario.* Sea $f(x) = x^r$ para $x > 0$, siendo r un número racional. Ya hemos demostrado la fórmula de derivación

(4.9) $$f'(x) = rx^{r-1}$$

para $r = 1/n$, siendo n un entero positivo. Vamos ahora a extenderla a todas las potencias de exponente racional. La fórmula para la derivación de un producto demuestra que la igualdad (4.9) también es válida para $r = 2/n$ y, por inducción, para $r = m/n$, siendo m cualquier entero positivo. (El razonamiento por inducción lo hacemos sobre m.) Por tanto la igualdad (4.9) es válida para todo r racional positivo. La fórmula para derivar un cociente nos prueba que (4.9) también es válida para r racional negativo. Así pues, si $f(x) = x^{2/3}$, tenemos $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Si $f(x) = x^{-1/2}$, entonces $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$. En cada caso, es preciso que $x > 0$.

4.6 Ejercicios

1. Si $f(x) = 2 + x - x^2$, calcular $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(-10)$.
2. Si $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, encontrar todos los valores de x para los que (a) $f'(x) = 0$; (b) $f'(x) = -2$; (c) $f'(x) = 10$.

En los Ejercicios del 3 al 12, obtener una fórmula para $f'(x)$ si $f(x)$ es la que se indica.

3. $f(x) = x^2 + 3x + 2$.
4. $f(x) = x^4 + \operatorname{sen} x$.
5. $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad x \neq -1$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + x^5 \cos x$.
8. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad x \neq 1$.
9. $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x}$.
10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}$.

11. $f(x) = \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.

12. $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 + x^2}$.

13. Se supone que la altura $f(t)$ de un proyectil, t segundos después de haber sido lanzado hacia arriba a partir del suelo con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo, está dada por la fórmula:

$$f(t) = v_0 t - 15t^2.$$

(a) Aplíquese el método descrito en la Sección 4.2 para probar que la velocidad media del proyectil durante el intervalo de tiempo de t a $t + h$ es $v_0 - 10t - 5h$ metros por segundo, y que la velocidad instantánea en el instante t es $v_0 - 10t$ metros por segundo.
(b) Calcúlese (en función de v_0) el tiempo necesario para que la velocidad se anule.
(c) ¿Cuál es la velocidad de regreso a la Tierra?
(d) ¿Cuál debe ser la velocidad inicial del proyectil para que regrese a la Tierra al cabo de 1 segundo? ¿y al cabo de 10 segundos? ¿y al cabo de T segundos?
(e) Pruébese que el proyectil se mueve con aceleración constante.
(f) Búsquese un ejemplo de otra fórmula para la altura que dé lugar a una aceleración constante de -10 metros por segundo cada segundo.

14. ¿Cuál es el coeficiente de variación del volumen de un cubo con respecto a la longitud de cada lado?

15. a) El área de un círculo de radio r es πr^2 y su circunferencia es $2\pi r$. Demostrar que el coeficiente de variación del área respecto al radio es igual a la circunferencia.
b) El volumen de una esfera de radio r es $4\pi r^3/3$ y su área es $4\pi r^2$. Demostrar que el coeficiente de variación del volumen respecto al radio es igual al área.

En los Ejercicios del 16 al 23, obtener una fórmula para $f'(x)$ si $f(x)$ es la que se indica

16. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0.$

17. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}, \quad x > 0.$

18. $f(x) = x^{3/2}, \quad x > 0.$

19. $f(x) = x^{-3/2}, \quad x > 0.$

20. $f(x) = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}, \quad x > 0.$

21. $f(x) = x^{-1/2} + x^{-1/3} + x^{-1/4}, \quad x > 0.$

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}, \quad x > 0.$

23. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad x > 0.$

24. Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones que admiten derivadas $f_1', \ldots, f_n'$. Dar una regla para la derivación del producto $g = f_1 \ldots f_n$ y demostrarla por inducción. Demostrar que para aquellos puntos x, en los que ninguno de los valores $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ es cero, tenemos

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

25. Comprobar la pequeña tabla de derivadas que sigue. Se sobrentiende que las fórmulas son válidas para aquellos valores de x para los que $f(x)$ está definida.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\sec x$	$\tan x \sec x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\csc x$	$-\cot x \csc x$

En los Ejercicios del 26 al 35, calcular la derivada $f'(x)$. Se sobrentiende que cada fórmula será válida para aquellos valores de x para los que $f(x)$ esté definida.

26. $f(x) = \tan x \sec x$.

27. $f(x) = x \tan x$.

28. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$.

29. $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$.

30. $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

31. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

32. $f(x) = \dfrac{1}{x + \operatorname{sen} x}$.

33. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

34. $f(x) = \dfrac{\cos x}{2x^2 + 3}$.

35. $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

36. Si $f(x) = (ax + b) \operatorname{sen} x + (cx + d) \cos x$, determinar valores de las constantes a, b, c, d tales que $f'(x) = x \cos x$.
37. Si $g(x) = (ax^2 + bx + c) \operatorname{sen} x + (dx^2 + ex + f) \cos x$, determinar valores de las constantes a, b, c, d, e, f tales que $g'(x) = x^2 \operatorname{sen} x$.
38. Dada la fórmula

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

(válida si $x \neq 1$), determinar, por derivación, fórmulas para las siguientes sumas:

(a) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$,
(b) $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n$.

39. Sea $f(x) = x^n$, siendo n entero positivo. Utilizar el teorema del binomio para desarrollar $(x + h)^n$ y deducir la fórmula

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n - 1)}{2} x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}.$$

Expresar el segundo miembro en forma de sumatorio. Hágase que $h \to 0$ y deducir que $f'(x) = nx^{n-1}$. Indicar los teoremas relativos a límites que se han empleado. (Este resultado se obtuvo de otro modo en el ejemplo 3 de la Sección 4.4)

4.7 Interpretación geométrica de la derivada como una pendiente

El método usado para definir la derivada tiene una interesante interpretación geométrica que conduce por un camino natural a la idea de tangente a una curva. En la figura 4.4 está dibujada una parte de la gráfica de una fun-

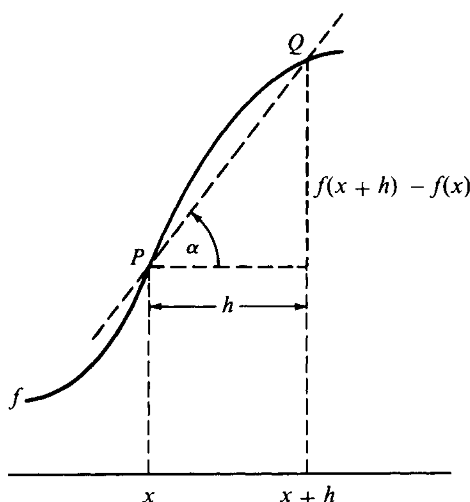


FIGURA 4.4 *Interpretación geométrica del cociente de diferencia como tangente de un ángulo.*

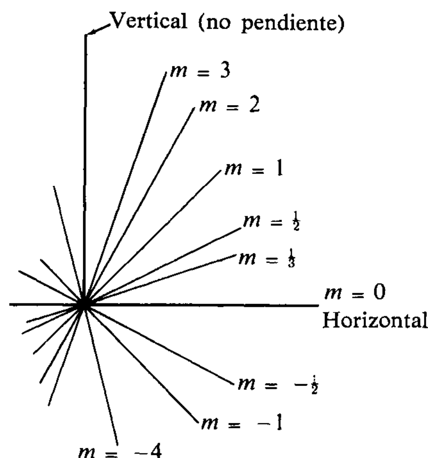


FIGURA 4.5 *Rectas de pendiente distinta.*

ción f. Las coordenadas de los dos puntos P y Q son, respectivamente, $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$. En el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es PQ, la altura es $f(x + h) - f(x)$ y representa la diferencia de las ordenadas de los dos puntos P y Q; y en consecuencia, el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.10}$$

representa la tangente trigonométrica del ángulo α que forma PQ con la horizontal. El número real tg α se denomina la *pendiente* de la curva entre P y Q y da un método para valorar la inclinación de esta línea. Por ejemplo, si f es una función lineal, digamos $f(x) = mx + b$, el cociente de diferencias (4.10) tiene el valor m, de manera que m es la pendiente de la curva. En la figura 4.5 se dan algunos ejemplos de rectas de distinta pendiente. Si se trata de una recta horizontal, $\alpha = 0$ y la pendiente, tg α, es también 0. Si α está entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$, yendo de izquierda a derecha, la ruta es ascendente y la pendiente está repre-

sentada por un número positivo. Si α está comprendido entre $\frac{1}{2}\pi$ y π, yendo de izquierda a derecha la recta es descendente y la pendiente es negativa. Una recta en la que $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, tiene pendiente 1. Si α crece de 0 a $\frac{1}{2}\pi$, tan α crece más allá de todo número y las rectas correspondientes a tales pendientes se aproximan a la posición vertical. Puesto que tan $\frac{1}{2}\pi$ no está definida, se dice que las *rectas verticales no tienen pendiente.*

Sea f una función que tiene derivada en x, por lo que el cociente de diferencias tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando h tiende a 0. En la interpretación geométrica, al tender h a cero, el punto P permanece fijo pero Q se mueve hacia P a lo largo de la curva y la recta PQ se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo α tiende al límite $f'(x)$. Por esta razón parece natural tomar como *pendiente de una curva* en el punto P el número $f'(x)$. La recta por P que tiene esta pendiente se denomina la *tangente* a la curva en P.

Nota: El concepto de tangente a una circunferencia (y a algunas otras curvas especiales) ya había sido considerado por los antiguos griegos. Definían la tangente a un círculo como la recta que tenía un punto común con el círculo y todos los demás fuera de él. De esta definición se pueden deducir muchas de las propiedades de las tangentes a los círculos. Por ejemplo, se puede demostrar que la tangente en cada punto es perpendicular al radio en este punto. Sin embargo, esta definición de tangente dada por los griegos para el círculo no se puede extender fácilmente a otras curvas. El método anterior, en el que la tangente se define a partir de la derivada, ha demostrado ser más satisfactorio. Utilizando esta definición para obtener la tangente al círculo, se puede probar que la recta así encontrada, tiene todas las propiedades halladas por los geómetras griegos. Conceptos como perpendicularidad y paralelismo se pueden explicar analíticamente en forma simple, utilizando las pendientes de rectas. Por ejemplo, de la identidad trigonométrica.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta},$$

se sigue que dos rectas no verticales, con la misma pendiente, son paralelas. También, de la identidad:

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{1 + \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta},$$

se deduce que dos rectas no verticales cuyas pendientes tienen como productos -1 son perpendiculares.

El signo de la derivada de una función es de utilidad para precisar la forma de la gráfica. Por ejemplo, si en un punto x de un intervalo abierto la derivada es *positiva,* la gráfica es ascendente en la proximidad de x al pasar de la izquierda de x a la derecha. Esto ocurre en x_3 en la figura 4.6. Una derivada *negativa* en un intervalo indica que la gráfica es descendente como ocurre en x_1, mientras que una derivada cero en un punto significa una tangente horizontal. En un máximo

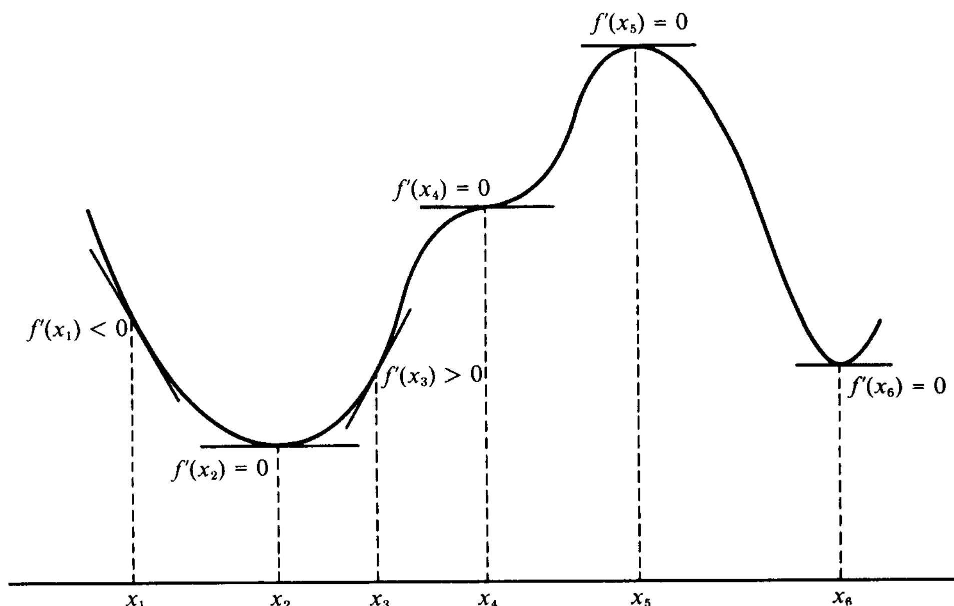


FIGURA 4.6 *Significado geométrico del signo de la derivada.*

o mínimo tales como los indicados en x_2, x_5 y x_6 la pendiente ha de ser cero. Fermat fue el primero que observó que puntos como x_2, x_5 y x_6 donde f tiene un máximo o un mínimo se han de encontrar entre las raíces de $f'(x) = 0$. Es importante hacer notar que $f'(x)$ puede también ser cero en puntos en los que no hay máximo ni mínimo, tal como, por ejemplo, en x_4. Obsérvese que estas tangentes particulares, atraviesan la gráfica. Éste es un ejemplo de una situación no incluida en la definición de tangencia de los griegos.

Las anteriores observaciones relativas al significado del signo de la derivada se pueden considerar como obvias si se interpretan geométricamente. Las demostraciones analíticas, basadas en propiedades generales de las derivadas, se darán en la Sección 4.16.

4.8 Otras notaciones para las derivadas

La notación juega un papel muy importante en el desarrollo de la Matemática. Algunos símbolos matemáticos tales como x^n o $n!$ son simples abreviaturas que permiten escribir en corto espacio largas proposiciones o fórmulas. Otros, como el símbolo de integración $\int_a^b f(x)\,dx$, no sólo recuerdan el proceso por él representado, sino que también ayudan para efectuar su cálculo.

Algunas veces se han utilizado diferentes notaciones para un mismo concepto, prefiriéndose una a otra según las circunstancias que acompañan el uso del símbolo. Esto es particularmente cierto en el Cálculo diferencial donde se han empleado muchas notaciones diferentes para las derivadas. Hasta ahora, la derivada de una función f se ha indicado con el símbolo f', notación introducida por Lagrange (1736-1813) a finales del siglo XVIII, y que pone de manifiesto que f' es una nueva función obtenida de f por derivación, indicándose su valor en x por $f'(x)$. Cada punto (x, y) de la gráfica de $f(x)$ tiene sus coordenadas x e y ligadas por la ecuación $y = f(x)$ y el símbolo y' se utiliza también para representar la derivada $f'(x)$. Análogamente $y'', \ldots, y^{(n)}$ representan las derivadas de orden superior $f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Por ejemplo, si $y = \text{sen } x$, entonces $y' = \cos x$, $y'' = -\text{sen } x$, etc. La notación de Lagrange no ha caído en desuso como la que utilizaba Newton, que escribía $\dot{y}$, $\ddot{y}$ en vez de y', y''. Los puntos de Newton han sido utilizados por algunos autores para indicar especialmente velocidad y aceleración.

Otro símbolo fue introducido en 1800 por L. Arbogast (1759-1803), que indicaba la derivada de f por Df, símbolo cuyo uso ha tenido hoy día gran aceptación. El símbolo D se denomina *operador derivación* y sugiere que Df es una nueva función que se obtiene de f por la operación derivación. Las derivadas de orden superior f'', f''', $\ldots$, $f^{(n)}$ se representan por D^2f, D^3f, $\ldots$, D^nf respectivamente, y los valores de estas derivadas en x se indican por $D^2f(x)$, $D^3f(x)$, $\ldots$, $D^nf(x)$. Así, se tiene, $D \text{ sen } x = \cos x$, $D^2 \text{ sen } x = D \cos x = -\text{sen } x$. La regla de derivación de la suma de dos funciones se escribe por medio de la notación D en la forma $D(f + g) = Df + Dg$, y considerando el valor de las derivadas en x se tiene: $[D(f + g)](x) = Df(x) + Dg(x)$ que se puede escribir también en la forma: $D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$. El lector puede formular fácilmente las reglas de derivación del producto y del cociente mediante la notación D.

Entre los primeros cultivadores del Análisis matemático, fue Leibniz el que mejor comprendió la importancia de los símbolos bien elegidos. Introducida una notación la experimentaba largamente y después mantenía extensa correspondencia con otros matemáticos sobre sus ventajas e inconvenientes. El formidable impacto que el Cálculo ha tenido en el desarrollo de la Matemática moderna, es debido en gran parte a la elección adecuada y sugestiva de los símbolos, muchos de ellos introducidos por Leibniz.

Leibniz empleaba una notación para la derivada algo distinta de la que se ha indicado. Utilizando y en vez de $f(x)$, el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

lo escribía en la forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

poniendo Δx en vez de h, y Δy en vez de $f(x + h) - f(x)$. El símbolo Δ se denomina *operador diferencia.* El límite del cociente de diferencias, es decir, la derivada $f'(x)$, la designaba Leibniz por dy/dx. Con esta notación, la definición de derivada se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

No sólo era distinta la notación, sino también la manera de pensar de Leibniz acerca de las derivadas, pues consideraba el límite dy/dx como un cociente de cantidades «infinitesimales» dy y dx que llamaba «diferenciales», y la derivada dy/dx era un «cociente diferencial». En vez de utilizar el paso a límite para definir las derivadas, pasaba de Δy y Δx a dy y dx indicando simplemente que Δy Δx se transformaban en infinitesimales. Leibniz imaginaba los infinitesimales como un nuevo tipo de números, que sin ser cero, eran más pequeños que cualquier número real positivo.

Durante mucho tiempo se creyó que el Cálculo era intrínsecamente difícil y algo misterioso, porque no era posible comprender lo que era un infinitesimal. Los trabajos de Cauchy y otros matemáticos en el siglo XIX condujeron gradualmente a abandonar las cantidades infinitamente pequeñas como una parte esencial de las Matemáticas. No obstante, son todavía muchos, especialmente entre los que se dedican a la Matemática aplicada, los que consideran útil razonar a la manera de Leibniz a base de los infinitesimales. Muy frecuentemente de esta forma se llega rápidamente a resultados que pueden ser demostrados de manera rigurosa por métodos adecuados.

Recientemente Abraham Robinson ha mostrado que el sistema de los números reales puede ser extendido por la incorporación de los infinitesimales de acuerdo con la idea de Leibniz. Una discusión de esta extensión, así como del impacto en otras ramas de la Matemática se encuentra en el libro de Robinson *Non-standard Analysis.* North-Holland Publishing, Amsterdam, 1966.

Aunque algunas de las ideas de Leibniz no pasaron a la posteridad, no ha ocurrido lo mismo con sus notaciones. El símbolo dy/dx tiene la ventaja manifiesta de resumir el proceso completo del cálculo de un cociente de diferencias y posterior paso a límite. Más tarde se observará que el uso del cociente de diferenciales permite operar más fácilmente y las fórmulas que se obtienen se recuerdan sin dificultad.

4.9 Ejercicios

1. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es horizontal.
2. Sea $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ para todo x. Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la pendiente es: a) 0; b) -1; c) 5.

3. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ para todo x. Hallar todos los puntos x para los que la gráfica de f en $(x, f(x))$ tiene pendiente cero.
4. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x. Hallar valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 4)$.
5. Hallar valores de las constantes a, b y c para los cuales las gráficas de los dos polinomios $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se corten en el punto $(1, 2)$ y tengan la misma tangente en dicho punto.
6. Considérese la gráfica de la función f definida por la ecuación $f(x) = x^2 + ax + b$, siendo a y b constantes.
   a) Hallar la pendiente de la cuerda que une los puntos de la gráfica para los que $x = x_1$ y $x = x_2$.
   b) Hallar, en función de x_1 y x_2, todos los valores de x para los que la tangente en $(x, f(x))$ tiene la misma pendiente que la cuerda de la parte a).
7. Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar los puntos de tangencia. ¿Vuelve a cortar la curva esa tangente?
8. Dibujar la gráfica de la cúbica $f(x) = x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 0)$. Una segunda recta que pasa por $(-1, 0)$ es también tangente a la gráfica de f en el punto (a, c). Determinar las coordenadas a y c.
9. Una función f está definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq c, \\ ax + b & \text{si } x > c, \end{cases} \qquad (a, b, c \text{ constantes}).$$

   Hallar los valores de a y b (en función de c) tales que $f'(c)$ exista.
10. Resolver el Ejercicio 9 cuando f es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si } |x| > c, \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \leq c. \end{cases}$$

11. Resolver el Ejercicio 9 cuando f es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq c, \\ ax + b & \text{si } x > c. \end{cases}$$

12. Si $f(x) = (1 - \sqrt{x})/1 + \sqrt{x})$ para $x > 0$, hallar fórmulas para $Df(x)$, $D^2f(x)$ y $D^3f(x)$.
13. Existe un polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $P(0) = P(1) = -2$, $P'(0) = -1$, y $P''(0) = 10$. Calcular a, b, c, d.
14. Dos funciones f y g admiten primera y segunda derivada en 0 y satisfacen las relaciones

$$f(0) = 2/g(0), \qquad f'(0) = 2g'(0) = 4g(0), \qquad g''(0) = 5f''(0) = 6f(0) = 3.$$

   a) Póngase $h(x) = f(x)/g(x)$, y calcular $h'(0)$.
   b) Póngase $k(x) = f(x)g(x) \operatorname{sen} x$, y calcular $k'(0)$.
   c) Calcular el límite de $g'(x)/f'(x)$ cuando $x \to 0$.

15. Supóngase que existe la derivada $f'(a)$. Indicar cuáles de las igualdades siguientes son ciertas y cuáles falsas. Expresar el fundamento de la decisión en cada caso.

(a) $f'(a) = \lim_{h\to a} \frac{f(h) - f(a)}{h - a}$.

(b) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a - h)}{h}$.

(c) $f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + 2t) - f(a)}{t}$.

(d) $f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + 2t) - f(a + t)}{2t}$.

16. Supóngase que en lugar de la definición usual de derivada $Df(x)$ se define una nueva clase de derivada $D^*f(x)$ por la fórmula:

$$D^*f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x + h) - f^2(x)}{h},$$

donde $f^2(x)$ significa $[f(x)]^2$.
(a) Hallar fórmulas para calcular la derivada D^* de una suma, diferencia, producto y cociente.
(b) Expresar $D^*f(x)$ en función de $Df(x)$.
(c) ¿Para qué funciones es $D^*f = Df$?

4.10 Regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas

Con las fórmulas de derivación dadas hasta ahora, se pueden calcular derivadas de funciones f para las cuales $f(x)$ es una suma finita de productos o cocientes de constantes multiplicadas por sen x, cos x, y x^r (r racional). Sin embargo, hasta ahora no se ha tratado de funciones tales como $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$, cuyas derivadas se calculan a partir de la misma definición. En esta Sección presentaremos un teorema, llamado *regla de la cadena,* que nos permitirá derivar funciones tales como $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$. De este modo aumentará considerablemente el número de funciones que podremos derivar.

Recordemos que si u y v son dos funciones tales que el dominio de u incluye el recorrido de v, podemos definir la función compuesta $f = u \circ v$ mediante la igualdad

$$f(x) = u[v(x)]\,.$$

La regla de la cadena nos dice cómo se expresa la derivada de f en función de las derivadas u' y v'.

TEOREMA 4.2. REGLA DE LA CADENA. *Sea f la función compuesta de dos funciones u y v, $f = u \circ v$. Si existen las derivadas $v'(x)$ y $u'(y)$ donde $y = v(x)$, la derivada $f'(x)$ también existe y está dada por la fórmula*:

$$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x)\,. \tag{4.11}$$

Dicho de otro modo, para calcular la derivada de $u \circ v$ respecto a x se calcula primero la derivada de u en el punto y, donde $y = v(x)$, y se multiplica ésta por $v'(x)$.

Antes de proceder a la demostración de (4.11) se darán algunas formas diversas de expresar la regla de la cadena, y se ilustrarán con algunos ejemplos. Escribiendo la fórmula (4.11) referida a la variable x se tiene

$$f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)\,.$$

Expresada como igualdad entre *funciones* más que entre números, la regla de la cadena toma la forma siguiente:

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'.$$

En la notación $u(v)$, si se escribe $u(v)'$ para indicar la derivada de la función compuesta $u(v)$ y $u'(v)$ para la composición $u' \circ v$, entonces la última fórmula se escribe

$$u(v)' = u'(v) \cdot v'.$$

Demostración del teorema 4.2. Se trata aquí de demostrar (4.11). Se supone que v tiene derivada en x y u tiene derivada en $v(x)$ y se trata de demostrar que f tiene derivada en x dada por el producto $u'[v(x)] \cdot v'(x)$. El cociente de diferencias para f es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u[v(x+h)] - u[v(x)]}{h}. \tag{4.12}$$

Ahora es conveniente introducir la siguiente notación: Sean $y = v(x)$ y sea $k = v(x+h) - v(x)$. (Es importante poner de manifiesto que k depende de h.) Entonces se tiene $v(x+h) = y + k$ y (4.12) se transforma en:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{h}. \tag{4.13}$$

El segundo miembro de (4.13) sería el cociente de diferencias cuyo límite define $u'(y)$, si en el denominador en vez de h apareciera k. Si $k \neq 0$ se completa fácilmente la demostración multiplicando el numerador y el denominador por k y el segundo miembro de (4.13) toma la forma:

$$\frac{u(y+k)-u(y)}{k}\cdot\frac{k}{h}=\frac{u(y+k)-u(y)}{k}\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}. \tag{4.14}$$

Cuando $h \to 0$ el último cociente del segundo miembro tiende a $v'(x)$. Puesto que $k = v(x+h) - v(x)$ y v es continua en x, al tender $h \to 0$ también $k \to 0$; por tanto, el primer cociente del segundo miembro de (4.14) tiende a $u'(y)$ cuando $h \to 0$, de donde se deduce inmediatamente (4.11).

Aunque el razonamiento precedente parece el camino más natural para la demostración, sin embargo no es completamente general. Como $k = v(x+h) - v(x)$, puede ocurrir que $k = 0$ para infinitos valores de h cuando $h \to 0$, en cuyo caso, el paso de (4.13) a (4.14) no es válido. Para soslayar esta dificultad es necesario modificar ligeramente la demostración.

Volviendo a la ecuación (4.13) se expresa el cociente del segundo miembro de manera que no aparezca k en el denominador, para lo cual se introduce la diferencia entre la derivada $u'(y)$ y el cociente de diferencias cuyo límite es $u'(y)$. Es decir, se define una nueva función g como sigue:

$$g(t)=\frac{u(y+t)-u(y)}{t}-u'(y) \qquad \text{si} \quad t \neq 0. \tag{4.15}$$

Esta ecuación define $g(t)$ sólo si $t \neq 0$. Multiplicando por t y transponiendo términos, se puede escribir (4.15) en la forma:

$$u(y+t)-u(y)=t[g(t)+u'(y)]. \tag{4.16}$$

Aunque (4.16) se había deducido en la hipótesis de ser $t \neq 0$, es válida también para $t = 0$ mientras se asigne algún valor definido a $g(0)$. El valor que se asigne a $g(0)$ no tiene importancia para esta demostración, pero ya que $g(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ parece natural definir $g(0)$ igual a 0. Si ahora se sustituye t en (4.16) por k, donde $k = v(x+h) - v(x)$ y se sustituye el segundo miembro de (4.16) en (4.13) se obtiene:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k}{h}[g(k)+u'(y)], \tag{4.17}$$

fórmula que es válida aun cuando $k = 0$. Si $h \to 0$ el cociente $k/h \to v'(x)$ y $g(k) \to 0$; por tanto el segundo miembro de (4.17) tiende al límite $u'(y) \cdot v'(x)$. Queda pues completada la demostración de la regla de la cadena.

4.11 Aplicaciones de la regla de la cadena. Coeficientes de variación ligados y derivación implícita

La regla de la cadena es un ejemplo excelente para mostrar la utilidad de la notación de Leibniz para las derivadas, ya que si se escribe (4.11) con la notación de Leibniz, toma la apariencia de una identidad algébrica trivial. Introducidos los símbolos

$$y = v(x) \qquad \text{y} \qquad z = u(y)\,.$$

y designando con dy/dx la derivada $v'(x)$ y con dz/dy la de $u(y)$, la formación de la función compuesta queda indicada por:

$$z = u(y) = u[v(x)] = f(x)\,,$$

si siguiendo la notación de Leibniz, dz/dx designa la derivada $f'(x)$, la regla de la cadena tal como estaba expresada en (4.11) se presenta ahora en la forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\,. \tag{4.18}$$

Se observa que esta fórmula tiene gran poder sugestivo, y es especialmente atractiva cuando se aplica el Cálculo a problemas físicos. Por ejemplo, supóngase que el símbolo z precedente representa una cantidad física medida por medio de otras x e y. La ecuación $z = f(x)$ indica cómo se halla z dado x, y la ecuación $z = u(y)$ indica cómo se halla z dado y. La relación entre x e y está expresada por la ecuación $y = v(x)$. La regla de la cadena, tal como está escrita en (4.18) expresa que el coeficiente de variación de z con relación a x es igual al producto del coeficiente de variación de z con relación a y por el coeficiente de variación de y con relación a x. El ejemplo siguiente muestra cómo se puede aplicar la regla de la cadena a un problema físico particular.

EJEMPLO 1. Supóngase que se introduce un gas en un globo esférico a la razón constante de 50 cm^3 por segundo. Supóngase que la presión del gas permanece constante y que el globo tiene siempre forma esférica. ¿Cuál es la rapidez con que aumenta el radio del globo cuando su longitud es de 5 cm?

Solución. Sea r el radio y V el volumen del globo en el instante t. Se conoce dV/dt, es decir, el coeficiente de variación del volumen respecto al tiempo, y se quiere determinar dr/dt, es decir, el coeficiente de variación del radio respecto al tiempo en el instante en que $r = 5$. La regla de la cadena da la conexión entre el dato y la incógnita mediante la fórmula:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}\,. \tag{4.19}$$

Para calcular dV/dr se utiliza la fórmula $V = 4\pi r^3/3$ que expresa el volumen de la esfera en función del radio. Por diferenciación se obtiene: $dV/dr = 4\pi r^2$, y, por tanto, (4.19) se transforma en:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Sustituyendo $dV/dt = 50$ y $r = 5$ se obtiene: $dr/dt = 1/(2\pi)$. Es decir, el radio aumenta en la razón de $1/(2\pi)$ centímetros por segundo en el instante en que $r = 5$.

El ejemplo precedente corresponde a los llamados problemas sobre *coeficientes de variación ligados*. Obsérvese que no ha sido necesario expresar r en función de t para determinar la derivada dr/dt. Este hecho es el que hace que la regla de la cadena sea especialmente útil en problemas sobre *coeficientes de variación ligados*.

Los dos ejemplos que siguen muestran cómo puede utilizarse la regla de la cadena para obtener nuevas fórmulas de derivación.

EJEMPLO 2. Dada $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ calcular $f'(x)$.

Solución. La función f es una composición, $f(x) = u[v(x)]$, donde $v(x) = x^2$ y $u(x) = \text{sen}\, x$. Para aplicar la regla de la cadena se necesita determinar $u'[v(x)] = u'(x^2)$. Puesto que $u'(x) = \cos x$ se tiene $u'(x^2) = \cos\,(x^2)$, y, por tanto, (4.11) da:

$$f'(x) = \cos\,(x^2) \cdot v'(x) = \cos\,(x^2) \cdot 2x\,.$$

Se puede también resolver el problema aplicando la notación de Leibniz. Si se escribe $y = x^2$ y $z = f(x)$, entonces $z = \text{sen}\, y$ y $dz/dx = f'(x)$. La regla de la cadena se expresa

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (\cos y)(2x) = \cos\,(x^2) \cdot 2x\,,$$

que coincide con el resultado obtenido anteriormente para $f'(x)$.

EJEMPLO 3. Si $f(x) = [v(x)]^n$ donde n es un entero positivo, calcular $f'(x)$ en función de $v(x)$ y $v'(x)$.

Solución. La función f es una composición, $f(x) = u[v(x)]$, donde $u(x) = x^n$. Puesto que $u'(x) = n\,x^{n-1}$, se tiene $u'[v(x)] = n[v(x)]^{n-1}$, y la regla de la cadena da:

$$f'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x)\,.$$

Si se omite la referencia a x y se escribe como una igualdad entre funciones, se obtiene la importante fórmula:

$$(v^n)' = nv^{n-1}v'$$

que indica cómo se deriva la potencia n-sima de v cuando v' existe. La fórmula es también válida para las potencias *racionales* si v^n y v^{n-1} están definidas. Para resolver el problema mediante la notación de Leibniz se puede escribir $y = v(x)$ y $z = f(x)$. Entonces $z = y^n$, $dz/dx = f'(x)$ y la regla de la cadena da:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}v'(x) = n[v(x)]^{n-1}v'(x)\,,$$

que coincide con la primera solución.

EJEMPLO 4. La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ representa una circunferencia de radio r y centro en el origen. Resolviendo esta ecuación respecto a y en función de x, se obtienen dos soluciones que sirven para definir dos funciones f y g dadas en el intervalo $[-r, r]$ por las fórmulas

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

(La gráfica de f es la semicircunferencia superior, y la de g la semicircunferencia inferior.) Se trata de calcular las derivadas de f y g mediante la regla de la cadena. Para f se aplica el resultado del ejemplo 3 con $v(x) = r^2 - x^2$ y $n = \frac{1}{2}$ y se obtiene:

$$(4.20) \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{f(x)}$$

siempre que $f(x) \neq 0$. El mismo método aplicado a g da

$$(4.21) \qquad g'(x) = -\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{g(x)}$$

siempre que $g(x) \neq 0$. Obsérvese que si se indica por y ya sea $f(x)$ o $g(x)$, ambas fórmulas (4.20) y (4.21) pueden combinarse en una sola, que es:

$$(4.22) \qquad y' = \frac{-x}{y} \quad \text{si} \quad y \neq 0\,.$$

Otra aplicación útil de la regla de la cadena, se encuentra en el método de la *derivación implícita*. Para explicar el método y poner de manifiesto sus ventajas se buscará de nuevo el resultado del ejemplo 4 por un camino más sencillo.

EJEMPLO 5. *Derivación implícita.* La fórmula (4.22) se puede deducir directamente de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ sin necesidad de resolverla respecto a y. Recordando que y es una función de $x[y = f(x)$ o $y = g(x)]$ se pueden derivar ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y se tiene:

$$2x + 2yy' = 0\,. \tag{4.23}$$

(El término $2yy'$ es el resultado de derivar y^2 tal como se ha explicado en el ejemplo 3.) Resolviendo la ecuación (4.23) respecto a y' se obtiene (4.22).

La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ se dice que define y *implícitamente* como función de x (en este caso define *dos* funciones) y el proceso por el cual (4.23) se obtiene a partir de esta ecuación se denomina *derivación implícita.* El resultado final es válido para las dos funciones f y g así definidas. Obsérvese que en el punto (x, y) de la circunferencia con $x \neq 0$ e $y \neq 0$ la pendiente de la tangente es $-x/y$, mientras que el radio que une el centro con el punto (x, y) tiene por pendiente y/x. El producto de ambas pendientes es -1, es decir, la tangente es perpendicular al radio.

4.12 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 14, determinar la derivada $f'(x)$. En cada caso se sobrentiende que x toma sólo los valores para los que $f(x)$ tiene sentido.

1. $f(x) = \cos 2x - 2\,\text{sen}\, x$.
2. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
3. $f(x) = (2 - x^2)\cos x^2 + 2x\,\text{sen}\, x^3$.
4. $f(x) = \text{sen}\,(\cos^2 x) \cdot \cos\,(\text{sen}^2 x)$.
5. $f(x) = \text{sen}^n x \cdot \cos nx$.
6. $f(x) = \text{sen}\,[\text{sen}(\text{sen}\, x)]$.
7. $f(x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x^2}$.
8. $f(x) = \tan \dfrac{x}{2} - \cot \dfrac{x}{2}$.
9. $f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x$.
10. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$.
11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.
12. $f(x) = \left(\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}\right)^{1/3}$.
13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}\,(x + \sqrt{1 + x^2})}$.
14. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.
15. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = (1 + x)(2 + x^2)^{1/2}(3 + x^3)^{1/3}$, $x^3 \neq -3$.
16. Sean $f(x) = \dfrac{1}{1 + 1/x}$ si $x \neq 0$, y $g(x) = \dfrac{1}{1 + 1/f(x)}$. Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$.

17. La siguiente tabla de valores se calculó para un par de funciones f y g y sus derivadas f' y g'. Construir la correspondiente tabla para las dos funciones compuestas h y k dadas por $h(x) = f[g(x)]$, $k(x) = g[f(x)]$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	5	2	−5
1	3	−2	0	1
2	0	2	3	1
3	2	4	1	−6

18. Una función f y sus dos primeras derivadas se han tabulado como a continuación se indica. Poner $g(x) = f(x^2)$ y construir una tabla para g y sus dos primeras derivadas para $x = 0, 1, 2$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	1	2
1	1	1	1
2	3	2	1
4	6	3	0

19. Determinar la derivada $g'(x)$ en función de $f'(x)$ si:

(a) $g(x) = f(x^2)$; (c) $g(x) = f[f(x)]$;
(b) $g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x) + f(\cos^2 x)$; (d) $g(x) = f\{f[f(x)]\}$.

Coeficientes de variación ligados y derivación implícita.

20. Cada arista de un cubo se dilata a razón de 1 cm por segundo. ¿Cuál es la razón de variación del volumen cuando la longitud de cada arista es (a) 5 cm, (b) 10 cm, (c) x cm?
21. Un avión se desplaza en vuelo horizontal, a 8 kilómetros de altura. (En este Ejercicio se supone la Tierra llana.) La ruta de vuelo pasa por encima de un punto P del suelo. La distancia entre el avión y el punto P disminuye a razón de 4 kilómetros por minuto en el instante en el que esta distancia es de 10 kilómetros. Calcular la velocidad del avión en kilómetros por hora.
22. En campo de baseball es un cuadrado cuyo lado tiene 90 pies de longitud. Una pelota es lanzada por el bateador a lo largo de una línea que pasa por la tercera base con una velocidad constante de 100 pies por segundo. ¿Cuál es la rapidez con que varía la distancia de la pelota a la primera base, (a) cuando la pelota se encuentra a mitad de camino de la tercera base, (b) cuando la pelota alcanza la tercera base.
23. Un barco navega paralelamente a una costa recta, a una velocidad de 12 millas por hora y a una distancia de 4 millas. ¿Cuál es su velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que diste precisamente 5 millas del faro?
24. Un recipiente tiene forma de cono circular. La altura es 10 m y el radio de la base 4 m. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de 5 m^3 por minuto, ¿con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 5 m, si (a) el vértice del cono está hacia arriba, (b) el vértice del cono está hacia abajo?

25. Un depósito de agua tiene la forma de un cono circular recto con su vértice hacia abajo. Su altura es de 10 m y el radio de la base de 15 m. El agua sale por el fondo de modo constante a razón de 1 m^3 por segundo. Se vierte agua en el depósito a razón de c m^3 por segundo. Calcular c de modo que el nivel del agua ascienda a razón de 4 m por segundo en el instante en que el agua alcance la altura de 8 m.
26. El agua entra en un tanque hemisférico de 10 m de radio (la parte plana hacia arriba). En un instante dado, sea h la altura del agua medida desde el fondo, r el radio de la superficie libre del agua, y V el volumen del agua en el tanque. Calcular dV/dh en el instante en que $h = 5$ m. Si el agua entra a razón constante de $5\sqrt{3}$ m^3 por segundo, calcular dr/dt, el coeficiente de variación de r, en el instante t en que $h = 5$ m.
27. Un triángulo rectángulo variable ABC en el plano xy tiene su ángulo recto en el vértice B, un vértice A fijo en el origen, y el tercer vértice C sobre la parábola $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$. El vértice B parte del punto (0, 1) en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje y a una velocidad constante de 2 cm/seg. ¿Con qué rapidez crece el área del triángulo cuando $t = 7/2$ segundos?
28. El radio de un cilindro circular recto aumenta con un coeficiente de variación constante. Su altura es una función lineal del radio y aumenta tres veces más rápidamente que éste. Cuando el radio es 1 m su altura es 6 m. Cuando el radio es 6 m, el volumen crece a razón de 1 m^3 por segundo. Cuando el radio es 36 m, el volumen aumenta a razón de n m^3 por segundo, siendo n entero. Calcular n.
29. Una partícula está obligada a moverse a lo largo de una parábola cuya ecuación es $y = x^2$. (a) ¿En qué punto de la curva varían la abscisa y la ordenada con el mismo coeficiente de variación? (b) Encontrar esta razón si el movimiento es tal que en el instante t, es $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \operatorname{sen}^2 t$.
30. La ecuación $x^3 + y^3 = 1$ define una o más funciones y de x. (a) Supuesto que existe la derivada y' y sin resolver la ecuación respecto a y, demostrar que y' satisface a la ecuación $x^2 + y^2y' = 0$. (b) Supuesto que existe la segunda derivada y'', demostrar que $y'' = -2xy^{-5}$ siempre que $y \neq 0$.
31. Si $0 < x < 5$ la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = 5$ define y como función de x. Sin resolverla respecto a y demostrar que y' tiene signo constante. (Se supone la existencia de y'.)
32. La ecuación $3x^2 + 4y^2 = 12$ define implícitamente dos funciones y de x si $|x| \leq 2$. Supuesto que la segunda derivada y'' existe, demostrar que verifica la ecuación $4y^3y'' = -9$.
33. La ecuación $x \operatorname{sen} xy + 2x^2 = 0$. define implícitamente y como función de x. Suponiendo que la derivada y' existe, demostrar que satisface la ecuación $y'x^2 \cos xy + xy \cos xy + \operatorname{sen} xy + 4x = 0$.
34. Si $y = x^r$ donde r es un número racional: $r = m/n$, se tiene $y^n = x^m$. Supuesta la existencia de la derivada y', deducir la fórmula $y' = rx^{r-1}$ aplicando la derivación implícita y la fórmula correspondiente para exponentes enteros.

4.13 Aplicaciones de la derivación a la determinación de los extremos de las funciones

La derivación puede utilizarse en la localización de los máximos y mínimos de las funciones. En realidad, en Cálculo hay dos significados de la palabra «máximo», y se distinguen mediante los adjetivos *absoluto* y *relativo*. El concepto de máximo absoluto se introdujo en el capítulo 3. Recordemos que se dice que una

función f de valores reales tiene un máximo absoluto en un conjunto S si existe por lo menos un punto c en S tal que

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ en } S.$$

El concepto de máximo relativo se define así:

DEFINICIÓN DE MÁXIMO RELATIVO. *Una función f, definida en un conjunto S, tiene un máximo relativo en un punto c de S si existe un cierto intervalo abierto I que contiene c tal que*

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ situado en } I \cap S.$$

El concepto de mínimo relativo se define del mismo modo con la desigualdad invertida.

Es decir, un máximo relativo en c es un máximo absoluto en un cierto entorno de c, si bien no es necesariamente un máximo absoluto en todo el conjunto S. En la figura 4.7 se muestran unos ejemplos. Naturalmente, cualquier máximo absoluto es, en particular, un máximo relativo.

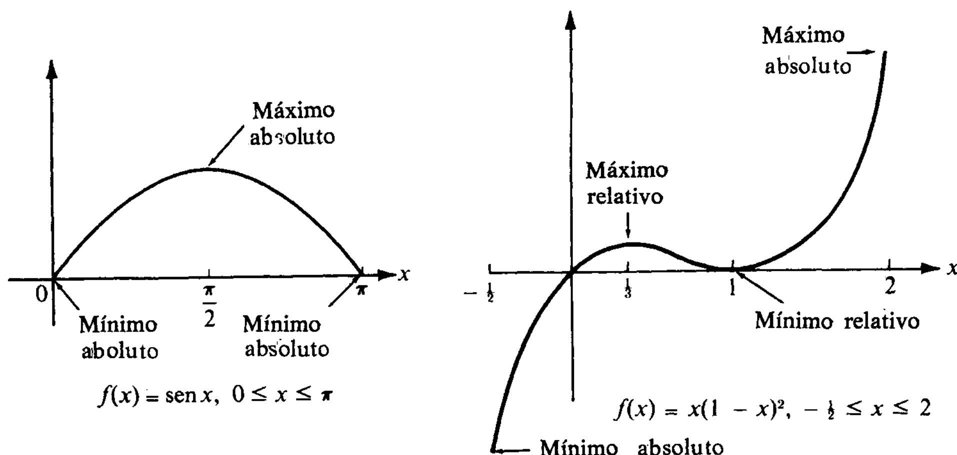


FIGURA 4.7 *Extremos de funciones.*

DEFINICIÓN DE EXTREMO. *Un número que es o un máximo relativo o un mínimo relativo de una función f se denomina valor extremo o extremo de f.*

El teorema que sigue, representado en la figura 4.7, relaciona los extremos de una función con las tangentes horizontales o su gráfica.

TEOREMA 4.3. ANULACIÓN DE LA DERIVADA EN UN EXTREMO INTERIOR. *Sea f definida en un intervalo abierto I, y supongamos que f tiene un máximo relativo*

o un mínimo relativo en un punto c interior a I. Si la derivada $f'(c)$ existe, es $f'(c) = 0$.

Demostración. Definamos en I una función Q como sigue:

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si} \quad x \neq c, \qquad Q(c) = f'(c).$$

Puesto que $f'(c)$ existe, $Q(x) \to Q(c)$ cuando $x \to c$, con lo que Q es continua en c. Queremos demostrar que $Q(c) = 0$. Esto lo conseguiremos demostrando que cada una de las desigualdades $Q(c) > 0$ y $Q(c) < 0$ nos lleva a una contradicción.

Supongamos $Q(c) > 0$. Según la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas, existe un intervalo que contiene a c en el que $Q(x)$ es positiva. Por tanto el numerador del cociente $Q(x)$ tiene el mismo signo que el denominador para todo $x \neq c$ en ese intervalo. Dicho de otro modo, $f(x) > f(c)$ cuando $x > c$, y $f(x) < c$ cuando $x < c$. Esto contradice la hipótesis de que f tiene un extremo en c. Luego, la desigualdad $Q(c) > 0$ es imposible. En forma parecida se demuestra que no puede ser $Q(c) < 0$. Por consiguiente $Q(c) = 0$, como se afirmó. Puesto que $Q(c) = f'(c)$, esto demuestra el teorema.

Es importante notar que el hecho de ser derivada nula en c no implica extremo en c. Por ejemplo, sea $f(c) = x^3$. La gráfica de f es la de la figura 4.8. Puesto

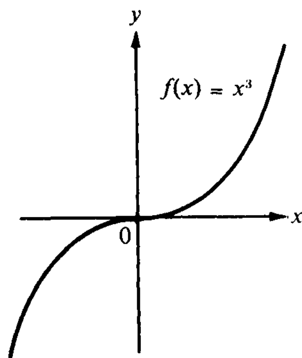


FIGURA 4.8 *Aquí $f'(0) = 0$ pero no existe extremo en 0.*

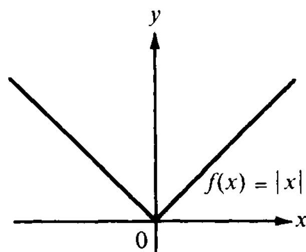


FIGURA 4.9 *Hay extremo en 0, pero $f'(0)$ no existe.*

que $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. Sin embargo, esta función es creciente en todo intervalo que contenga el origen por lo cual no existe extremo en c.

Otro ejemplo, $f(x) = |x|$, demuestra que un cero de la derivada no siempre se presenta en un extremo. Aquí hay un mínimo relativo en 0, como se ve en la figura 4.9, pero en el mismo punto 0 la gráfica tiene un punto anguloso y no existe derivada. El teorema 4.3 supone que la derivada $f'(c)$ *existe* en el extremo. Es decir, el teorema 4.3 nos dice que, *en ausencia de puntos angulosos,* la derivada

necesariamente debe anularse en un extremo, si éste se presenta en el interior de un intervalo.

En una Sección posterior expondremos un criterio para los extremos que es bastante amplio para incluir los dos ejemplos de la figura 4.7 y también el de la figura 4.9. Este criterio que se expone en el teorema 4.8, nos dice que un extremo siempre se presenta en un punto en el que la derivada cambia de signo. Aunque este hecho parece geométricamente evidente, no es fácil demostrarlo con lo visto hasta aquí. Deduciremos este resultado como una consecuencia del teorema del valor medio para derivadas, que vamos a discutir.

4.14 Teorema del valor medio para derivadas

El teorema del valor medio para derivadas es importante en Cálculo porque muchas de las propiedades de las funciones pueden deducirse fácilmente a partir de él. Antes de establecer el teorema del valor medio, examinaremos uno de sus casos particulares a partir del cual puede deducirse el teorema general. Este caso particular lo descubrió en 1690 Michel Rolle (1652-1719), matemático francés.

TEOREMA 4.4. TEOREMA DE ROLLE. *Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en cada punto del intervalo abierto (a, b). Supongamos también que*

$$f(a) = f(b)$$

Existe entonces por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

El significado geométrico del teorema de Rolle está representado en la figura 4.10. En este teorema se afirma tan sólo que la curva debe tener una tangente horizontal en algún punto entre a y b.

Demostración. Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo abierto (a, b), y llegamos a una contradicción como se ve a continuación: Según el teorema de los valores extremos para funciones continuas, f debe alcanzar su máximo absoluto M y su mínimo aboluto m en algún punto del intervalo cerrado $[a, b]$. El teorema 4.3 nos dice que ningún extremo puede ser alcanzado en puntos interiores (de otro modo sería nula la derivada allí). Luego, ambos valores extremos son alcanzados en los extremos a y b. Pero como $f(a) = f(b)$, esto significa que $m = M$, y por tanto f es constante en $[a, b]$. Esto contradice el hecho de que $f'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b). Resulta pues que $f'(c) = 0$ por lo menos en un c que satisfaga $a < c < b$, lo que demuestra el teorema.

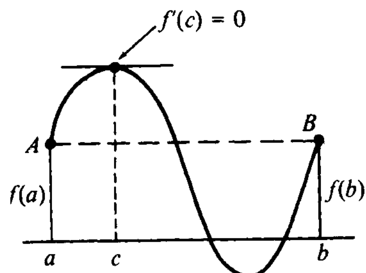
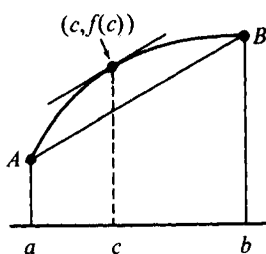


FIGURA 4.10 *Interpretación geómetrica del teorema de Rolle.*



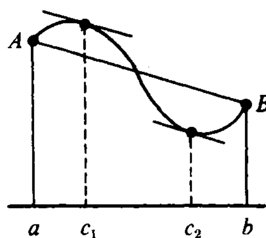


FIGURA 4.11 *Significación geométrica del teorema del valor medio.*

Podemos utilizar el teorema de Rolle para demostrar el teorema del valor medio. Antes de establecerlo, puede ser útil examinar su significado geométrico. Cada una de las curvas dibujadas en la figura 4.11 es la gráfica de una función continua f con tangente en cada punto del intervalo abierto (a, b). En el punto $(c, f(c)$ indicado en la figura 4.11(a), la tangente es paralela a la cuerda AB. En la figura 4.11(b), existen dos puntos en los que la tangente es paralela a la cuerda AB. El teorema del valor medio asegura que existirá *por lo menos un punto* con esta propiedad.

Para traducir al lenguaje analítico esta propiedad geométrica, tan sólo necesitamos observar que el paralelismo de dos rectas significa la igualdad de sus pendientes. Puesto que la pendiente de la cuerda AB es el cociente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y ya que la pendiente de la tangente en c es la derivada $f'(c)$, la afirmación anterior puede expresarse así:

(4.24)
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

para *algún* c del intervalo abierto (a, b).

Para hacer más intuitiva la validez de (4.24), podemos imaginar $f(t)$ como el camino recorrido por una partícula móvil en el tiempo t. Entonces el cociente del primer miembro de (4.24) representa la velocidad *media* en el intervalo de tiempo $[a, b]$, y la derivada $f'(t)$ representa la velocidad instantánea en el tiempo t. La igualdad afirma que debe existir un momento en que la velocidad instantánea es igual a la velocidad media. Por ejemplo, si la velocidad media de un automóvil en un viaje corto es de 75 Km. por hora, el cuentavelocidades debe registrar 75 Km. por hora *por lo menos una vez* durante el viaje.

Formalmente ese teorema puede establecerse como sigue.

TEOREMA 4.5. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS. *Si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a, b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b), existe por lo menos un punto c interior a (a, b) para el que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) . \tag{4.25}$$

Demostración. Para aplicar el teorema de Rolle necesitamos una función que tenga valores iguales en los extremos a y b. A fin de construirla, modificamos f en la forma siguiente:

$$h(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)] .$$

Entonces $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$. También, h es continua en $[a, b]$ y tiene derivada en el intervalo abierto (a, b). Aplicando el teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c) = 0$ para un cierto c de (a, b). Pero

$$h'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)] .$$

Cuando $x = c$, se obtiene la igualdad (4.25).

Obsérvese que el teorema no concreta nada acerca de la posición exacta del «valor o valores medios» c, y sólo indica que todos pertenecen al intervalo (a, b). Para algunas funciones se puede especificar con exactitud la posición de los valores medios, pero en la mayoría de los casos es muy difícil hacer una determinación precisa de estos puntos. Sin embargo, la utilidad real del teorema está en el hecho que se pueden sacar muchas conclusiones del mero conocimiento de la *existencia* de un valor medio por lo menos.

Nota: Es importante comprobar que el teorema del valor medio puede dejar de cumplirse si hay algún punto entre a y b en el que la derivada no existe. Por ejemplo, la función f definida por la ecuación $f(x) = |x|$ es continua en todo el eje real y tiene derivada en todos los puntos del mismo excepto en el 0. En la figura 7.2 se ha dibujado su gráfica en el intervalo $[-1, 2]$. La pendiente de la cuerda que une A y B es:

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

pero la derivada no es igual a $\frac{1}{3}$ en ningún punto.

Con frecuencia es útil la siguiente extensión del teorema del valor medio.

TEOREMA 4.6. FORMULA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que admitan derivadas en todo el intervalo abierto (a, b). Entonces, para un cierto c de (a, b), tenemos*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)] .$$

Demostración. La demostración es parecida a la del teorema 4.5. Pongamos

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)] .$$

Entonces $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Aplicando el teorema de Rolle a h, encontramos que $h'(c)$ a partir de la fórmula que define h, obtenemos la fórmula del valor medio de Cauchy. El teorema 4.5 es un caso particular del 4.6 obtenido tomando $g(x) = x$.

4.15 Ejercicios

1. Probar que en la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, la cuerda que une los puntos para los cuales $x = a$ y $x = b$ es paralela a la tangente en el punto para el cual $x = (a + b)/2$.
2. Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, cualquiera que sea el valor de b.
3. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \quad \text{si} \quad x \leq 1, \qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \geq 1 .$$

(a) Dibujar la gráfica de $f(x)$ para x en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.
(b) Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

4. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, +1]$. Explicar por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.
5. Probar que $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x.
6. Probar que la fórmula del valor medio se puede expresar en la forma:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h) \qquad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1 .$$

Determinar θ en función de x y h cuando (a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = x^3$. Dejar x fijo, $x \neq 0$ y determinar en cada caso el límite de θ cuando $h \to 0$.

7. Sea f un polinomio. Se dice que un número real α es un *cero* de f de multiplicidad m si $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$, donde $g(\alpha) \neq 0$.
(a) Si f tiene r ceros en el intervalo $[a, b]$, probar que f' tiene por lo menos $r - 1$ ceros, y que en general la derivada k-ésima $f^{(k)}$ tiene por lo menos $r - k$ ceros en $[a, b]$. (Los ceros se cuentan tantas veces como indica su multiplicidad.)

(b) Si la derivada k-ésima $f^{(k)}$ tiene exactamente r ceros en $[a, b]$ ¿qué se puede decir acerca del número de ceros de f en $[a, b]$?

8. Utilizar el teorema del valor medio para deducir las desigualdades siguientes:

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.

b) $ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$ si $0 < y \leq x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

9. Una función f, continua en $[a, b]$, tiene derivada segunda f'' en todo punto del intervalo abierto (a, b). El segmento de recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ corta la gráfica de f en un tercer punto $(c, f(c))$, siendo $a < c < b$. Demostrar que $f''(t) = 0$ por lo menos en un punto t de (a, b).

10. Este Ejercicio es un esbozo de demostración del teorema del valor intermedio para derivadas. *Supongamos que f posee derivada en todo punto de un intervalo abierto I. Elijamos $a < b$ en I. La derivada f' toma cualquier valor comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$ en algún punto de (a, b).*

a) Definir una nueva función g en $[a, b]$ del modo siguiente:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{si} \quad x \neq a, \qquad g(a) = f'(a).$$

Demostrar que g toma cualquier valor comprendido entre $f'(a)$ y $g(b)$ en el intervalo abierto (a, b). Utilizar el teorema del valor medio para derivadas, para demostrar que f' toma cualquier valor comprendido entre $f'(a)$ y $g(b)$ en el intervalo abierto (a, b).

b) Definir una nueva función h en $[a, b]$ del modo siguiente:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \text{si} \quad x \neq b, \qquad h(b) = f'(b).$$

Razonando en forma parecida a la que se ha seguido en la parte a), demostrar que f' toma cualquier valor comprendido entre $f'(b)$ y $h(a)$ en (a, b). Puesto que $h(a) = g(b)$, queda demostrado el teorema del valor intermedio para derivadas.

4.16 Aplicaciones del teorema del valor medio a propiedades geométricas de las funciones

Con el teorema del valor medio pueden deducirse propiedades de las funciones partiendo del conocimiento del signo algebraico de su derivada. Esto se confirma en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.7. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Tenemos entonces:*

a) *Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente creciente en $[a, b]$.*
b) *Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.*
c) *Si $f'(x) = 0$ para todo x de (a, b), f es constante en $[a, b]$.*

Demostración. Para probar a) tenemos que demostrar que $f(x) < f(y)$ siempre que $a \leq x < y \leq b$. Por consiguiente, supongamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio al intervalo cerrado $[x, y]$. Obtenemos

(4.26) $$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), \quad \text{donde} \quad x < c < y.$$

Puesto que $f'(c)$ e $y - x$ son positivos, lo mismo le ocurre a $f(y) - f(x)$, y esto significa $f(x) < f(y)$, como se afirmó. Esto demuestra a), y la demostración de b) es parecida. Para demostrar c), utilizamos la igualdad (4.26) haciendo $x = a$. Ya que $f'(c) = 0$, tenemos $f(y) = f(a)$ para todo y en $[a, b]$, con lo que f es constante en $[a, b]$.

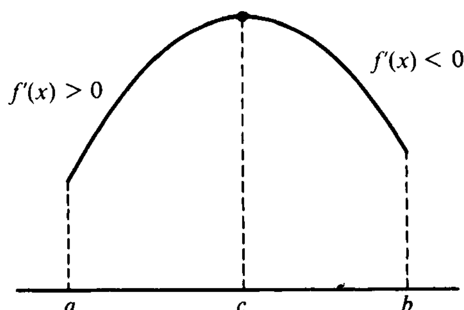
El teorema 4.7 podemos emplearlo para demostrar que se presenta un extremo siempre que la derivada cambia de signo.

TEOREMA 4.8. *Supongamos f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo abierto (a, b), excepto acaso en un punto c.*

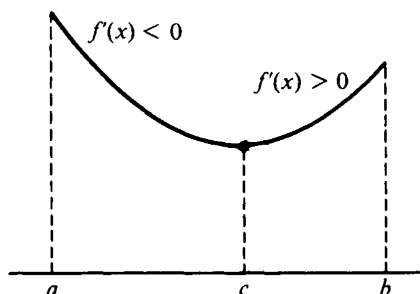
a) *Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, f tiene un máximo relativo en c.*

b) *Si, por otra parte, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$ y positiva para todo $x > c$, f tiene un mínimo relativo en c.*

Demostración. En el caso a), el teorema 4.7 a) nos dice que f es estrictamente creciente en $[a, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, b]$. Luego $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en (a, b), con lo que f tiene un máximo relativo en c.



a) Máximo relativo en c



b) Mínimo relativo en c.

FIGURA 4.12 *Los extremos se presentan cuando la derivada cambia de signo.*

Esto demuestra a) y la demostración de b) es completamente análoga. Los dos casos se han representado en la figura 4.12.

4.17 Criterio de la derivada segunda para los extremos

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, el teorema de los valores extremos nos dice que tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en algún punto de $[a, b]$. Si f tiene derivada en cada punto interior, entonces los únicos puntos en los que pueden presentarse los extremos son:

1) en los extremos del intervalo a y b;

2) en aquellos puntos interiores x en los que $f'(x) = 0$.

Los puntos del tipo 2) se llaman con frecuencia *puntos críticos* de f. Para decidir si en un punto crítico c existe un máximo o un mínimo (o ni uno ni otro), necesitamos más información acerca de la función f. Ordinariamente el comportamiento de f en un punto crítico puede determinarse a partir del signo algebraico de la derivada en las proximidades de c. El teorema que sigue hace ver que un estudio del signo de la derivada segunda en las cercanías de c puede también sernos de utilidad.

TEOREMA 4.9. CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS EN UN PUNTO CRÍTICO. *Sea c un punto crítico de f en un intervalo abierto (a, b); esto es, supongamos $a < c < b$ y que $f'(c) = 0$. Supongamos también que exista la derivada segunda f'' en (a, b). Tenemos entonces:*

a) *Si f'' es negativa en (a, b), f tiene un máximo relativo en c.*

b) *Si f'' es positiva en (a, b) f tiene un mínimo relativo en c.*

Los dos casos están representados en la figura 4.12.

Demostración. Consideremos el caso a), $f'' < 0$ en (a, b). Según el teorema 4.7 (aplicado a f'), la función f' es estrictamente decreciente en (a, b). Pero $f'(c) = 0$, con lo que f' cambia su signo de positivo a negativo en c, como muestra la figura 4.12 a). Luego, según el teorema 4.8, f tiene un máximo relativo en c. La demostración en el caso b) es completamente análoga.

Si f'' es continua en c, y si $f''(c) \neq 0$, existirá un entorno de c en el cual f'' tendrá el mismo signo que $f''(c)$. Por consiguiente, si $f'(c) = 0$, la función f tiene un máximo relativo en c si $f''(c)$ es negativa, y un mínimo relativo si $f''(c)$ es positiva. Este criterio basta para muchos ejemplos que se presentan en la práctica.

El signo de la derivada segunda también está relacionado con la concavidad o la convexidad de f. El siguiente teorema demuestra que la función es convexa en los intervalos en los que f'' es positiva, como se ve en la figura 4.12 b). En la

figura 4.12 a), f es cóncava ya que f'' es negativa. Basta discutir tan sólo el caso de la convexidad, ya que si f es convexa, $-f$ es cóncava.

TEOREMA 4.10. CRITERIO DE LA DERIVADA PARA LA CONVEXIDAD. *Supongamos f continua en $[a, b]$ y que tenga derivada en el intervalo abierto (a, b). Si f' es creciente en (a, b) entonces f es convexa en $[a, b]$. En particular, f es convexa si f'' existe y es no negativa en (a, b).*

Demostración. Consideremos $x < y$ en $[a, b]$ y pongamos $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$, donde $0 < \alpha < 1$. Queremos demostrar que $f(z) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha) f(x)$. Puesto que $f(z) = \alpha f(z) + (1 - \alpha)f(z)$, esto es lo mismo que demostrar que

$$(1 - \alpha)[f(z) - f(x)] \leq \alpha[f(y) - f(z)].$$

Según el teorema del valor medio (aplicado dos veces), existen puntos c y d que satisfacen $x < c < z$ y $z < d < y$ tales que

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z - x), \qquad \text{y} \qquad f(y) - f(z) = f'(d)(y - z).$$

Puesto que f' es creciente, tenemos $f'(c) \leq f'(d)$. Asimismo, tenemos $(1 - \alpha)(z - x) = \alpha(y - z)$, de modo que podemos escribir

$$(1 - \alpha)[f(z) - f(x)] = (1 - \alpha)f'(c)(z - x) \leq \alpha f'(d)(y - z) = \alpha[f(y) - f(z)],$$

lo que demuestra la desigualdad exigida por la convexidad.

4.18 Trazado de curvas

La información reunida en los teoremas de las últimas secciones es con frecuencia útil en el trazado de curvas. Al dibujar la gráfica de una función f, debe determinarse primeramente el dominio de f [el conjunto de valores de x para los cuales está definida $f(x)$] y, si es fácil hacerlo, debería encontrarse el recorrido de f (el conjunto de valores alcanzados por f). Un conocimiento del dominio y del recorrido nos da una idea de la amplitud de la curva $y = f(x)$, ya que precisa una porción del plano xy en la que está situada la curva. Seguidamente es aconsejable situar los puntos (si existen) en los que la curva corta a los ejes coordenados. La intersección con el eje y es el punto $(0, f(0))$ suponiendo que 0 pertenece al dominio de f, y las intersecciones con el eje de las x son los puntos $(x, 0)$ para los que $f(x) = 0$. La determinación de las intersecciones con el eje x puede ser, en la práctica, muy difícil, y podemos contentarnos con valores aproximados.

Deberíamos también determinar los intervalos en los que f es monótona examinando el signo de f', y determinar los intervalos de convexidad y concavidad

estudiando el signo de f''. Especial cuidado deberá ponerse en los puntos en los que la gráfica tiene tangentes horizontales.

EJEMPLO 1. *La gráfica de $y = f(x)$, siendo $f(x) = x + 1/x$ para $x \neq 0$.*

En este caso, no existen intersecciones con los ejes. Las dos primeras derivadas están dadas por las fórmulas

$$f'(x) = 1 - 1/x^2, \qquad f''(x) = 2/x^3.$$

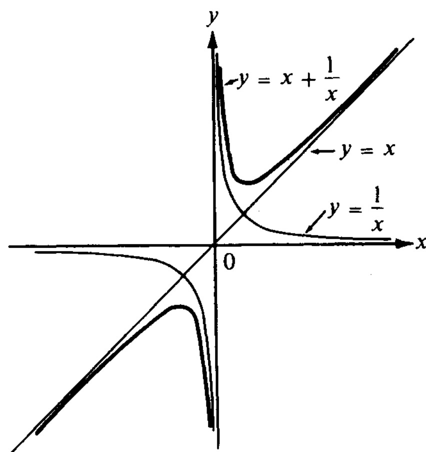


FIGURA 4.13 *Gráfica de $f(x) = x + 1/x$.*

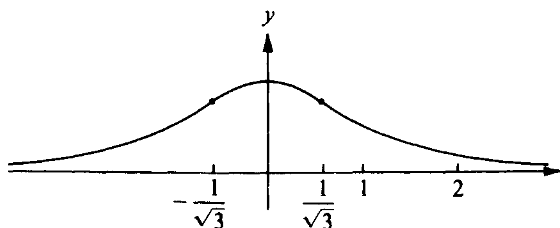


FIGURA 4.14 *Gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.*

La primera derivada es positiva si $x^2 > 1$, negativa si $x^2 < 1$, y cero si $x^2 = 1$. Luego existe un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = -1$. Para $x > 0$, la derivada segunda es positiva de manera que la primera derivada es estrictamente creciente. Para $x < 0$, la derivada segunda es negativa, y por tanto la derivada primera será estrictamente decreciente. Para x próximo a 0, el término x es pequeño comparado a $1/x$, y la curva se comporta como la gráfica de $y = 1/x$. (Ver figura 4.13.) Por otra parte, para valores grandes de x (positivos o negativos), el término $1/x$ es pequeño comparado con x, y la curva es muy parecida a la recta $y = x$. En este ejemplo, la función es impar, $f(-x) = -f(x)$, con lo cual la gráfica es simétrica respecto al origen.

En el ejemplo anterior, la recta $y = x$ es una asíntota de la curva. En general, una recta no vertical de ecuación $y = mx + b$ se llama *asíntota* de la gráfica de $y = f(x)$ si la diferencia $f(x) - (mx + b)$ tiende a 0 cuando x toma valores tan grandes como se quiera positivos o negativos. Una recta vertical, $x = a$, se

llama *asíntota vertical* si $|f(x)|$ llega a ser tan grande como se quiera cuando $x \to a$ por la derecha o por la izquierda. En el ejemplo anterior, el eje y es una asíntota vertical.

EJEMPLO 2. *Gráfica de $y = f(x)$, donde $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.*
Ésta es una función par, positiva para todo x, y el eje x es un asíntota horizontal. La derivada primera viene dada por

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2},$$

de modo que $f'(x) < 0$ si $x > 0$, $f'(x) > 0$ si $x < 0$, y $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. Por consiguiente la función crece por encima del eje x negativo, decrece en la parte positiva del eje x, y tiene un máximo relativo en $x = 0$. Derivando otra vez, encontramos que

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(-2) - (-2x)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

Así que $f''(x) > 0$ si $3x^2 > 1$, y $f''(x) < 0$ si $3x^2 < 1$. Luego, la derivada primera crece cuando $x^2 > \frac{1}{3}$ y decrece cuando $x^2 < \frac{1}{3}$. Esta información basta para dibujar la curva de la figura 4.14. Los dos puntos de la gráfica correspondientes a $x^2 = \frac{1}{3}$, en los que la derivada segunda cambia su signo, se llaman *puntos de inflexión.*

4.19 Ejercicios

En los siguientes Ejercicios, *a*) hallar todos los puntos x tales que $f'(x) = 0$; b) examinar el signo de f' y determinar aquellos intervalos en los que f es monótona; *c*) examinar el signo de f'' y determinar aquellos intervalos en los que f' es monótona; d) construir un boceto de la gráfica de f. En cada caso, la función está definida para todos los x para los cuales tiene sentido $f(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. $f(x) = x^3 - 4x$.
3. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
5. $f(x) = 2 + (x-1)^4$.
6. $f(x) = 1/x^2$.
7. $f(x) = x + 1/x^2$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$.
9. $f(x) = x/(1 + x^2)$.
10. $f(x) = (x^2 - 4)/(x^2 - 9)$.
11. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.
12. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.
13. $f(x) = x + \cos x$.
14. $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}\cos 2x$.

4.20 Ejemplos resueltos de problemas de extremos

Muchos problemas de extremos en Matemáticas puras y aplicadas pueden resolverse sistemáticamente mediante el uso del Cálculo diferencial. En realidad, los rudimentos del Cálculo diferencial fueron en principio desarrollados cuando Fermat intentó encontrar métodos generales para determinar máximos y mínimos. En esta Sección resolveremos algunos ejemplos y daremos al lector la oportunidad de resolver otros en la Sección 4.21.

Formulamos primero dos principios sencillos que pueden usarse para resolver gran número de problemas de extremos.

EJEMPLO 1. *Principio del producto máximo con suma constante.* Dado un número positivo S. Demostrar que entre todos los pares de números positivos x e y tales que $x + y = S$, el producto xy es el mayor cuando $x = y = \frac{1}{2}S$.

Demostración. Si $x + y = S$, $y = S - x$ y el producto xy es igual a $x(S - x) = xS - x^2$. Pongamos $f(x) = xS - x^2$. Este polinomio cuadrático tiene como derivada primera $f'(x) = S - 2x$ que es positiva para $x < \frac{1}{2}S$ y negativa para $x > \frac{1}{2}S$. Por tanto el máximo de xy se presenta cuando $x = \frac{1}{2}S$, $y = S - x = \frac{1}{2}S$ Esto también se puede demostrar sin utilizar el Cálculo. Pongamos simplemente $f(x) = \frac{1}{4}S^2 - (x - \frac{1}{2}S)^2$ y observemos que $f(x)$ es máximo cuando $x = \frac{1}{2}S$.

EJEMPLO 2. *Principio de la suma mínima, con producto constante.* Dado un número positivo P. Demostrar que entre todos los pares de números positivos x e y tales que $xy = P$, el que hace la suma $x + y$ mínima es $x = y = \sqrt{P}$.

Demostración. Tenemos que determinar el mínimo de la función $f(x) = x + P/x$ para $x > 0$. La primera derivada es $f'(x) = 1 - P/x^2$. Ésta es negativa para $x^2 < P$ y positiva para $x^2 > P$, de manera que $f(x)$ tiene su mínimo en $x = \sqrt{P}$. Luego, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = \sqrt{P}$.

EJEMPLO 3. Entre todos los rectángulos de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

Demostración. Utilizamos el resultado del ejemplo 1. Sean x e y los lados de un rectángulo cualquiera. Si el perímetro está fijado, entonces $x + y$ es constante, con lo que el área xy tiene mayor valor cuando $x = y$. Luego, el rectángulo máximo es el cuadrado.

EJEMPLO 4. La media geométrica de dos números positivos no excede a su media aritmética. Esto es, $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$.

Demostración. Dados $a > 0$, $b > 0$, sea $P = ab$. Entre todos los positivos x e y siendo $xy = P$, la suma $x + y$ es la menor cuando $x = y = \sqrt{P}$. Es decir, si $xy = P$, entonces $x + y \geq \sqrt{P} + \sqrt{P} = 2\sqrt{P}$. En particular, $a + b \geq 2\sqrt{P} = 2\sqrt{ab}$, con lo que $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$. La igualdad se presenta si y sólo si $a = b$.

EJEMPLO 5. Un bloque de peso W es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo θ con la recta de la dirección del movimiento, siendo $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, como se ve en la figura 4.15. Supongamos que la resistencia por fricción es proporcional a la fuerza normal con la que el bloque presiona perpendicularmente contra el plano. Hallar el ángulo θ para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible.

Solución. Sea $F(\theta)$ la fuerza de propulsión. Ésta tiene un componente vertical hacia arriba que es $F(\theta)\operatorname{sen}\theta$, de modo que la fuerza normal de presión contra el plano es $N = W - F(\theta)\operatorname{sen}\theta$. La fuerza de fricción es μN, donde μ es una constante llamada coeficiente de fricción. El componente horizontal de la fuerza de propulsión es $F(\theta)\cos\theta$. Cuando ésta se iguala a la fuerza de fricción, llegamos a $F(\theta)\cos\theta = \mu[W - F(\theta)\operatorname{sen}\theta]$ de la que encontramos

$$F(\theta) = \frac{\mu W}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}.$$

Para hacer mínima $F(\theta)$, haremos máximo el denominador $g(\theta) = \cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. En los extremos, tenemos $g(0) = 1$ y $g(\frac{1}{2}\pi) = \mu$. En el interior del intervalo, tenemos

$$g'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta,$$

de manera que g tiene un punto crítico en $\theta = \alpha$, siendo $\operatorname{sen}\alpha = \mu\cos\alpha$. Esto da $g(\alpha) = \cos\alpha + \mu^2\cos\alpha = (1 + \mu^2)\cos\alpha$. Podemos expresar $\cos\alpha$ en función de μ. Puesto que $\mu^2\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, encontramos $(1 + \mu^2)\cos^2\alpha = 1$, con lo que $\cos\alpha = 1/\sqrt{1 + \mu^2}$. Así pues $g(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2}$. Ya que $g(\alpha)$ excede a $g(0)$ y a $g(\frac{1}{2}\pi)$, el máximo de g se presenta en el punto crítico. Luego la fuerza mínima pedida es

$$F(\alpha) = \frac{\mu W}{g(\alpha)} = \frac{\mu W}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

EJEMPLO 6. Hallar la menor distancia de un punto dado $(0, b)$ del eje y a la parábola $x^2 = 4y$. (El número b puede tener cualquier valor real.)

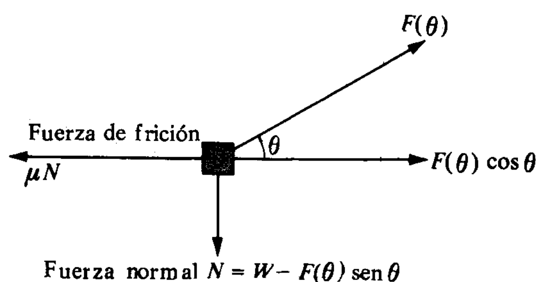


FIGURA 4.15 *Ejemplo* 5.

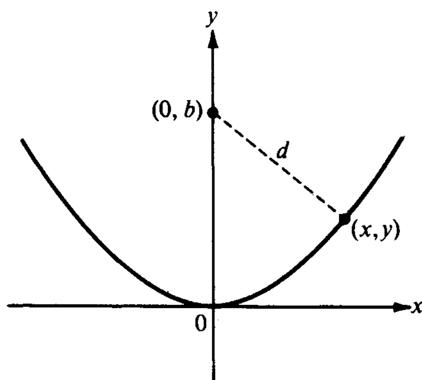


FIGURA 4.16 *Ejemplo* 6.

Solución. La parábola está dibujada en la figura 4.16. La cantidad que hay que hacer mínima es la distancia d, siendo

$$d = \sqrt{x^2 + (y - b)^2},$$

con la restricción $x^2 = 4y$. Ante la figura resulta evidente que cuando b es *negativo* la distancia mínima es $|b|$. Cuando el punto $(0, b)$ se desplaza hacia arriba siguiendo el eje y, el mínimo es b hasta que el punto alcanza una cierta posición especial, por encima de la cual el mínimo es $< b$. Vamos ahora a determinar esa posición especial.

Ante todo, observemos que el punto (x, y) que minimiza d también minimiza d^2. (Esta observación nos permite evitar la derivación de las raíces cuadradas.) Seguidamente, podemos expresar d^2 en función únicamente de x o también en función de y y dejamos como ejercicio para el lector desarrollar los cálculos cuando d^2 se expresa en función de x.

Por tanto la función f que hay que hacer mínima viene dada por la fórmula

$$f(y) = d^2 = 4y + (y - b)^2.$$

Si bien $f(y)$ está definida para todo valor real y, la naturaleza del problema exige que busquemos el mínimo tan sólo entre aquellos valores de y tales que $y \geq 0$. La derivada es $f'(y) = 4 + 2(y - b)$ que es cero sólo cuando $y = b - 2$. Cuando $b < 2$, esto nos lleva a un punto crítico y negativo que debe excluirse por la restricción $y \geq 0$. Es decir, si $b < 2$, el mínimo no se presenta en un punto crítico. En efecto, cuando $b < 2$, vemos que $f'(y) > 0$ cuando $y \geq 0$, y por tanto f es estrictamente creciente para $y \geq 0$. Por consiguiente el mínimo absoluto se presenta en el extremo $y = 0$. El correspondiente mínimo d es $\sqrt{b^2} = |b|$.

Si $b \geq 2$, existe un punto crítico legítimo en $y = b - 2$. Puesto que $f''(y) = 2$ para todo y, la derivada f' es creciente, y por tanto el *mínimo absoluto* de f se presenta en este punto crítico. El mínimo d es $\sqrt{4(b-2)+4} = 2\sqrt{b-1}$. Con esto hemos demostrado que la distancia mínima es $|b|$ si $b < 2$ y es $2\sqrt{b-1}$ si $b \geq 2$. (El valor $b = 2$ es el valor particular antes citado.)

4.21 Ejercicios

1. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.
2. Un granjero tiene L metros de alambre para cercar un terreno de pasto rectangular adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones darán el área máxima al terreno cercado?
3. Un granjero quiere cercar un terreno de pasto rectangular de área A adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones exigen la mínima cantidad de alambre de cerca?
4. Dado $S > 0$. Probar que entre todos los números positivos x e y tales que $x + y = S$, la suma $x^2 + y^2$ es mínima cuando $x = y$.
5. Dado $R > 0$. Probar que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = R$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.
6. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene lados de longitud $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$.
7. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Hallar el tamaño del cuadrado de máxima área que puede circunscribirse al cuadrado dado.
8. Demostrar que entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo dado, el cuadrado tiene el área máxima.
9. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado tiene el círculo circunscrito mínimo.
10. Dada una esfera de radio R. Hallar el radio r y la altura h del cilindro circular recto de mayor superficie lateral $2\pi rh$ que puede inscribirse en la esfera
11. Entre todos los cilindros circulares rectos de área lateral dada, demostrar que la menor esfera circunscrita tiene el radio igual al radio del cilindro multiplicado por $\sqrt{2}$..
12. Dado un cono circular recto de radio R y altura H. Hallar el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede inscribirse en el cono.
13. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de radio R y altura H.
14. Dada una esfera de radio R. Calcular, en función de R, el radio r y la altura h del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en esa esfera.
15. Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.
16. Hallar el trapecio de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.
17. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10; b) 12 y 18.
18. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, hallar el mayor valor de $2a + b$.
19. Un camión ha de recorrer 300 km en una carretera llana a velocidad constante de x km por hora. Las leyes de circulación prescriben $35 \leq x \leq 55$. Se supone que el carburante

cuesta a 3 ptas. litro y que el consumo es de $10 + x^2/120$ litros por hora. Si el conductor cobra P pesetas por hora y si obedece todas las leyes de tráfico, determinar cuál es la velocidad más económica y el coste del viaje si $P = 0$, $P = 20$, $P = 40$ y $P = 60$.

20. Un cilindro se ha obtenido haciendo girar un rectángulo alrededor del eje x, tal que su base está en el eje x, y todo el rectángulo está contenido en la región comprendida entre la curva $y = x/(x^2 + 1)$ y el eje x. Hallar el cilindro de volumen lo mayor posible.
21. Se dobla una página de manera que la esquina derecha inferior llegue a coincidir con el lado izquierdo de la misma (véase fig. 4.17). Si la anchura de la página es 15,24 cm, hallar la longitud mínima del pliegue. ¿Cuál es el ángulo que forma este pliegue mínimo con el lado derecho de la página? Se supone la página suficientemente larga para evitar que el pliego alcance la cabecera de la página.

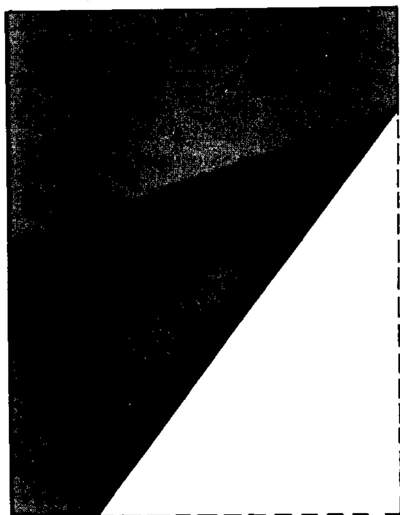


FIGURA 4.17 *Ejercicio* 21.

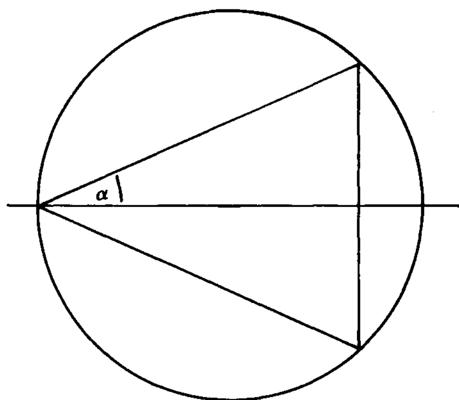


FIGURA 4.18 *Ejercicio* 22.

22. (a) Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio r como se indica en la figura 4.18. Suponiendo el ángulo 2α en el vértice, comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$, hallar el valor medio y el valor menor del perímetro del triángulo. Dar todos los detalles del razonamiento seguido.
(b) ¿Cuál es el radio del menor disco circular suficientemente grande para cubrir *todo* triángulo isósceles de perímetro dado L? Dar todos los detalles del razonamiento.
23. Una ventana tiene forma de rectángulo terminado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. La porción rectangular ha de ser de cristal transparente y la parte circular ha de ser de cristales de color que admite sólo la mitad de luz por metro cuadrado que el cristal transparente. El perímetro total de la ventana ha de tener longitud fija P. Hallar, en función de P, las dimensiones de la ventana que deja pasar la mayor cantidad posible de luz.
24. Un trozo de madera de 12 dm de largo tiene forma de un tronco de cono circular recto de diámetros 4 dm y $(4 + h)$ dm en sus bases, donde $h \geq 0$. Determinar en función de h el volumen del mayor cilindro circular recto que se puede cortar de este trozo de madera, de manera que su eje coincida con el del tronco de cono.

25. Dados n números reales $a_1, \ldots, a_n$. Demostrar que la suma $\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ es mínima cuando x es la media aritmética de $a_1, \ldots, a_n$.
26. Si $x > 0$, sea $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$, siendo A una constante positiva. Hallar el menor valor de A tal que $f(x) \geq 24$ para todo $x > 0$.
27. Para cada t real, sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2x$, y designemos con $m(t)$ el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Determinar el valor de $m(t)$ para cada t del intervalo $-1 \leq t \leq 1$. Recuérdese que para algunos valores de t el mínimo de $f(x)$ puede presentarse en los extremos del intervalo $0 \leq x \leq 1$.
28. Sabemos que un número x está en un intervalo $a \leq x \leq b$, siendo $a > 0$. Queremos aproximar x por medio de otro número t en $[a, b]$ de manera que el error relativo, $|t - x|/x$, sea lo menor posible. Designemos por $M(t)$ el máximo valor de $|t - x|/x$ cuando x varía de a a b. a) Demostrar que ese máximo se presenta en uno de los extremos $x = a$ o $x = b$. b) Demostrar que $M(t)$ es mínimo cuando t es la media armónica de a y b, esto es, cuando $1/t = \frac{1}{2}(1/a + 1/b)$.

*4.22 Derivadas parciales

En esta Sección se expone el concepto de derivada parcial y se inicia al lector en su notación y su terminología. No utilizaremos los resultados de esta Sección en ninguna otra parte de este Volumen I, con lo que este tema puede omitirse o posponerse sin pérdida de continuidad.

En el capítulo 1 se definió una función como una correspondencia que asocia a cada objeto de un conjunto X un objeto y sólo uno de otro conjunto Y, denominándose al conjunto x *dominio* de la función. Hasta ahora se han considerado funciones cuyo dominio era un conjunto de puntos del eje de las x. Estas funciones son las llamadas comúnmente *funciones de una variable real.* No es difícil extender muchas de las ideas del Cálculo a funciones de dos o más variables reales.

Una *función real de dos variables reales* es una función cuyo dominio X es un conjunto de puntos del plano xy. Si se indica por f dicha función, su valor en el punto (x, y) es un número real que se designa por $f(x, y)$. Es fácil imaginar cómo una función de esta clase puede presentarse en un problema físico ficticio. Por ejemplo, sea una placa de metal lisa en forma de disco circular de radio 4 cm que esté situada en el plano xy con el centro en el origen, y que se caliente de tal manera que la temperatura en cada uno de sus puntos (x, y) es $16 - x^2 - y^2$ grados centígrados. Si se indica por $f(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y), entonces f es una función de dos variables definida por

$$f(x, y) = 16 - x^2 - y^2. \tag{4.27}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los puntos (x, y) cuya distancia al origen no es superior a 4. Del teorema de Pitágoras se deduce que

todos los puntos (x, y) situados a distancia r del origen, satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4.28}$$

Por tanto, el dominio de la función estará formado por todos los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 16$. Obsérvese que en la circunferencia (4.28) la temperatura será $f(x, y) = 16 - r^2$. Es decir, la función f es constante en cada circunferencia con centro en el origen (véase figura 4.19).

Hay dos métodos útiles para obtener una representación geométrica de una función de dos variables. Uno es por medio de una *superficie* en el espacio. Para construir esta superficie se introduce un tercer eje coordenado (llamado eje z), que pasa por el origen y es perpendicular al plano xy. En la paralela al eje z que pasa por el punto xy, y a partir de este punto, se toma una coor-

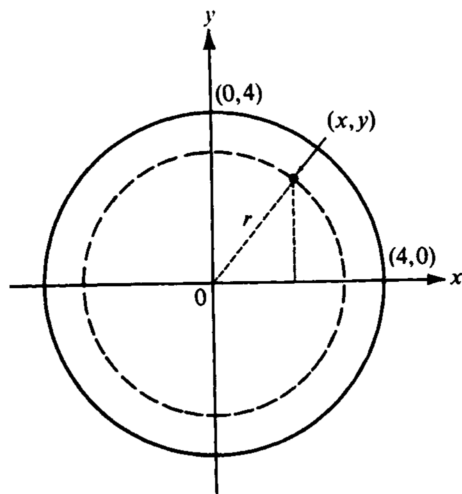


FIGURA 4.19 *La temperatura es constante en cada circunferencia con centro en el origen.*

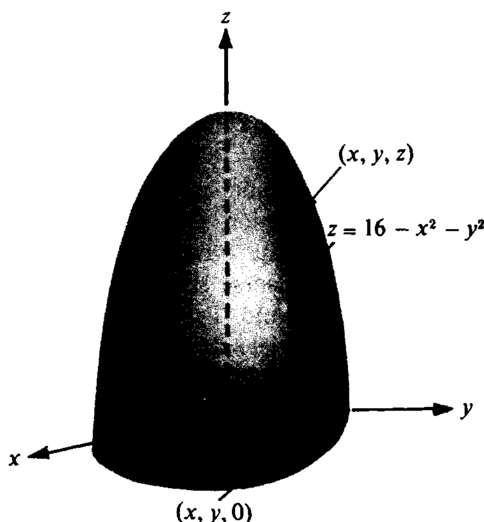


FIGURA 4.20 *Superficie representada por la ecuación* $z = 16 - x^2 - y^2$

denada z, igual a la que da la ecuación $z = f(x, y)$, obteniéndose el punto (x, y, z). El lugar de todos estos puntos es la superficie que representa la función.

La superficie correspondiente al ejemplo anteriormente expuesto está dibujada en la figura 4.20. Si se sitúa un termómetro en un punto (x, y) de la placa, el tope de la columna de mercurio tocaría a la superficie precisamente en el punto (x, y, z) donde $z = f(x, y)$, una vez elegida la unidad sobre el eje z adecuadamente.

Otro tipo de imagen geométrica de una función de dos variables se puede dibujar completamente en el plano xy. Es el método de las *líneas de nivel* que

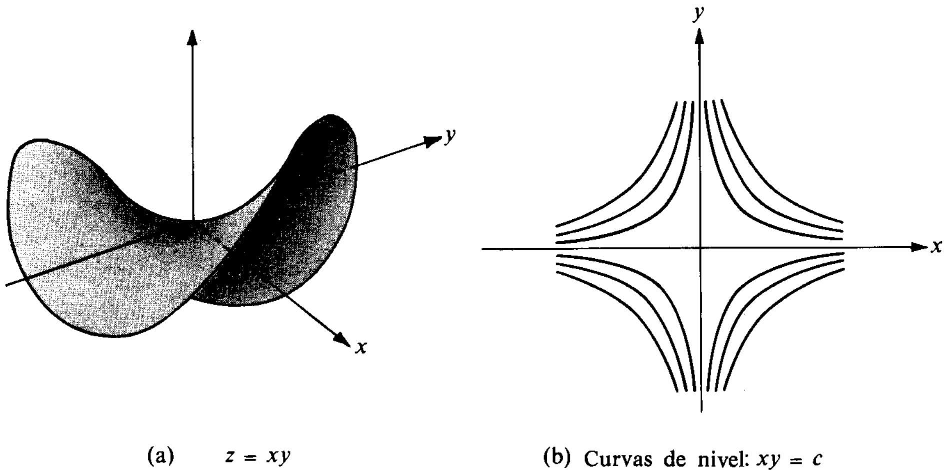


FIGURA 4.21 (a) *Superficie cuya ecuación es* $z = xy$. (b) *Curvas de nivel correspondientes a* $xy = constante$.

se usa en la confección de mapas para representar un terreno tridimensional en un dibujo bidimensional. Se supone que la superficie antes definida se ha cortado por varios planos horizontales (paralelos al plano xy), por lo que las intersecciones con la superficie serán unas curvas formadas por aquellos puntos (x, y, z) cuya altura z es constante. Proyectando estas curvas en el plano xy se obtiene una familia de *curvas de nivel.* Cada curva de nivel está formada por todos y sólo los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $f(x, y) = c$; donde c es la altura constante para aquella curva particular. En el ejemplo antes mencionado, las líneas de nivel son circunferencias concéntricas que representan las curvas de temperatura constante, o *isotermas,* como se dibujan en un mapa meteorológico. Otro ejemplo de una superficie y sus curvas de nivel se presenta en la figura 4.21. La ecuación en este caso es $z = xy$. La superficie de forma de «silla de montar» se conoce con el nombre de *paraboloide hiperbólico.*

Las líneas de nivel en los mapas topográficos se dibujan frecuentemente para cada 25 m de altura. Cuando están dibujadas muy juntas, la altura cambia rápidamente al pasar de una línea de nivel a la siguiente; esto ocurre en la proximidad de un monte escarpado. Cuando las líneas de nivel están bastante distanciadas la altura varía despacio. Se puede tener una idea de lo escarpado de un terreno considerando lo espaciadas que se presentan sus líneas de nivel. Sin embargo, para lograr una información precisa sobre el coeficiente de variación de la altura, se ha de definir la superficie por medio de una función a la que se le puedan aplicar los conceptos del Cálculo diferencial.

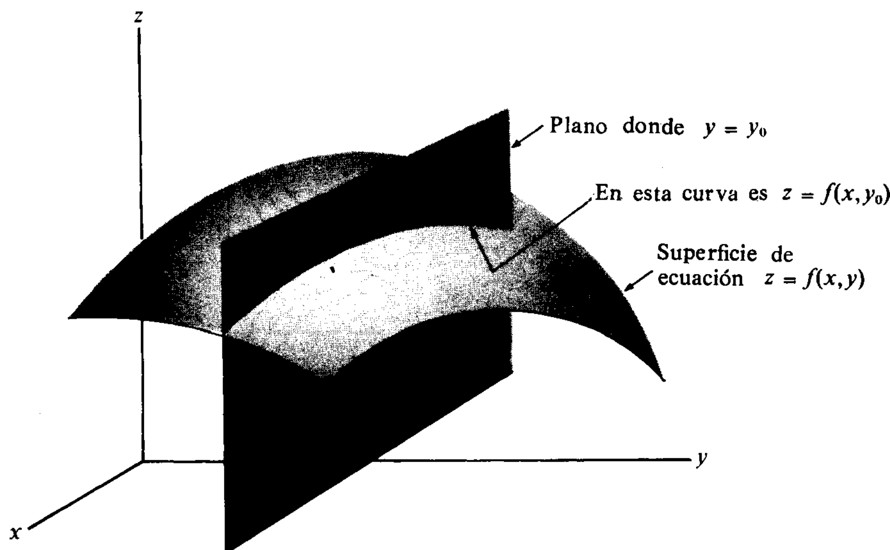


FIGURA 4.22 *Curva de intersección de una superficie* $z = f(x,y)$ *y un plano* $y = y_0$.

La razón con que varía la altura en un punto (x_0, y_0) depende de la dirección del movimiento a partir de este punto. Para mayor simplicidad se considerarán ahora precisamente las dos direcciones paralelas a los ejes x e y. Supóngase que se trata de una superficie definida por una ecuación de la forma $z = f(x, y)$ y se corta esta superficie por un plano perpendicular al eje y tal como se indica en la figura 4.22. Este plano está formado por todos los puntos (x, y, z) del espacio para los cuales la coordenada y es constante, $y = y_0$. (La ecuación $y = y_0$ se denomina ecuación del plano). La intersección de este plano con la superficie es una curva plana, cuyos puntos satisfacen la ecuación $z = f(x, y_0)$. En esta curva, la altura $z = f(x, y_0)$ es función sólo de x.

Supóngase ahora que se pasa del punto $(x_0\, y_0)$ al punto $(x_0 + h, y_0)$. El cambio de altura correspondiente es $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$. Esto sugiere la formación del cociente de diferencias.

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{4.29}$$

para después hacer tender $h \to 0$. Si este cociente tiende a un límite definido cuando $h \to 0$, este límite se denomina *la derivada parcial de f con respecto a x en el punto* (x_0, y_0). Para designar la derivada parcial, hay varios símbolos siendo algunos de los más corrientes:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad f_1(x_0, y_0), \quad D_1 f(x_0, y_0).$$

El subíndice 1 en las dos últimas notaciones se refiere al hecho de que sólo la primera coordenada varía cuando se forma el cociente de diferencias en (4.29). Así se tiene

$$f_1(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} .$$

Análogamente, se define la *derivada parcial respecto a y* en (x_0, y_0) por

$$f_2(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} ,$$

siendo las notaciones correspondientes

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad f'_y(x_0, y_0), \qquad f_y(x_0, y_0), \qquad D_2 f(x_0, y_0) .$$

Si se escribe $z = f(x, y)$, también se usan los símbolos $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para designar las derivadas parciales.

La derivación parcial no es un concepto nuevo. Si se considera otra función g de una variable definida por la ecuación

$$g(x) = f(x, y_0) ,$$

entonces la derivada ordinaria $g'(x_0)$ es exactamente lo mismo que la derivada parcial $f_1(x_0, y_0)$. Geométricamente, la derivada parcial $f_1(x, y_0)$ representa la pendiente de la tangente en un punto de la curva señalada en la figura 4.22. De la misma manera, cuando x es constante, es decir $x = x_0$, la ecuación $z = f(x_0, y)$ define la curva intersección de la superficie con el plano cuya ecuación es $x = x_0$. La derivada parcial $f_2(x_0, y)$ da la pendiente de la tangente a dicha curva. De estas consideraciones se deduce que para calcular la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto a x, se puede considerar y como si fuera constante y aplicar las reglas ordinarias del Cálculo diferencial. Así, por ejemplo, si $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ se tiene $f_1(x, y) = -2x$. Análogamente, si se supone x fijo se encuentra $f_2(x, y) = -2y$.

Otro ejemplo es la función dada por:

$$f(x, y) = x \operatorname{sen} y + y^2 \cos xy \tag{4.30}$$

Sus derivadas parciales son:

$$f_1(x, y) = \operatorname{sen} y - y^3 \operatorname{sen} xy , \qquad f_2(x, y) = x \cos y - xy^2 \operatorname{sen} xy + 2y \cos xy .$$

La derivación parcial es un proceso que da lugar a nuevas funciones $f_1 = \partial f/\partial x$ y $f_2 = \partial f/\partial y$ a partir de una función dada. Puesto que f_1 y f_2 son a su vez funciones de dos variables, se pueden considerar *sus* derivadas parciales. Éstas se denominan derivadas parciales de *segundo orden* de f y se indican como sigue:

$$f_{1,1} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{1,2} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \quad f_{2,1} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad f_{2,2} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Obsérvese que $f_{1,2}$ significa $(f_1)_2$, o sea la derivada parcial de f_1 con respecto a y. En la ∂-notación se indica el orden de derivación escribiendo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Esta derivada no siempre coincide con la derivada parcial que resulta al invertir el orden de derivación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Sin embargo, la igualdad de estas dos derivadas parciales tiene lugar en ciertas condiciones que se verifican por la mayoría de funciones que aparecen en la práctica. En el Volumen II se discutirán estas condiciones.

Haciendo referencia al ejemplo (4.27) se ve que sus derivadas parciales de segundo orden están dadas por las fórmulas siguientes:

$$f_{1,1}(x, y) = -2, \qquad f_{1,2}(x, y) = f_{2,1}(x, y) = 0, \qquad f_{2,2}(x, y) = -2\,.$$

Para el ejemplo (4.30) se obtiene:

$$\begin{aligned}
f_{1,1}(x, y) &= -y^4 \cos xy\,,\\
f_{1,2}(x, y) &= \cos y - xy^3 \cos xy - 3y^2 \operatorname{sen} xy\,,\\
f_{2,1}(x, y) &= \cos y - xy^3 \cos xy - y^2 \operatorname{sen} xy - 2y^2 \operatorname{sen} xy = f_{1,2}(x, y)\,,\\
f_{2,2}(x, y) &= -x \operatorname{sen} y - x^2y^2 \cos xy - 2xy \operatorname{sen} xy - 2xy \operatorname{sen} xy + 2 \cos xy\\
&= -x \operatorname{sen} y - x^2y^2 \cos xy - 4xy \operatorname{sen} xy + 2 \cos xy\,.
\end{aligned}$$

Un estudio más detallado de las derivadas parciales se verá en el Volumen II.

*4.23 Ejercicios

En los Ejercicios 1 al 8, calcular todas las derivadas parciales de primero y segundo orden. Comprobar en cada caso que las derivadas parciales $f_{1,2}(x, y)$ y $f_{2,1}(x, y)$ son iguales.

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2.$
2. $f(x, y) = x \operatorname{sen}(x + y).$
3. $f(x, y) = xy + \dfrac{x}{y} \quad (y \neq 0).$
4. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$
5. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2y^3).$
6. $f(x, y) = \operatorname{sen}[\cos(2x - 3y)].$
7. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y} \quad (x \neq y).$
8. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x, y) \neq (0, 0).$
9. Demostrar que $x(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 2z$ si (a) $z = (x - 2y)^2$, (b) $z = (x^4 + y^4)^{1/2}$.
10. Si $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)^2$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, demostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

5

RELACIÓN ENTRE INTEGRACIÓN Y DERIVACIÓN

5.1 La derivada de una integral indefinida. Primer teorema fundamental del cálculo

En esta Sección se estudiará la importante conexión existente entre integración y diferenciación. El tipo de relación entre estos dos procesos es en cierta forma semejante al que hay entre «elevar al cuadrado» y «extraer la raíz cuadrada». Si se eleva al cuadrado un número positivo y luego se busca la raíz cuadrada positiva del resultado, se vuelve al número original. Análogamente, si se calcula la integral de una función continua f se obtiene una nueva función (la integral indefinida de f) que después de derivada reproduce la función original f. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, una integral indefinida A de f queda definida por:

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{c^3}{3},$$

donde c es una constante. Derivando se tiene: $A'(x) = x^2 = f(x)$. Este ejemplo ilustra un resultado general llamado el primer teorema fundamental del Cálculo que se puede enunciar como sigue:

TEOREMA 5.1. PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. *Sea f una función integrable en $[a, x]$ para cada x de $[a, b]$. Sea c tal que $a \leq c \leq b$ y definamos una nueva función A del siguiente modo:*

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad si \qquad a \leq x \leq b\,.$$

Existe entonces la derivada $A'(x)$ en cada punto x del intervalo abierto (a, b) en el que f es continua, y para tal x tenemos

$$A'(x) = f(x)\,. \tag{5.1}$$

Damos primero una justificación geométrica que sugiere el porqué el teorema debe ser cierto; luego damos una demostración analítica.

Interpretación geométrica. La figura 5.1 muestra la gráfica de una función f en un intervalo $[a, b]$. En la figura, h es positivo y

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = A(x+h) - A(x)\,.$$

El ejemplo es el de una función continua en todo el intervalo $[x, x+h]$. Por consiguiente, por el teorema del valor medio para integrales, tenemos

$$A(x+h) - A(x) = hf(z), \qquad \text{donde} \quad x \leq z \leq x+h\,.$$

Luego, resulta

(5.2) $$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(z)\,,$$

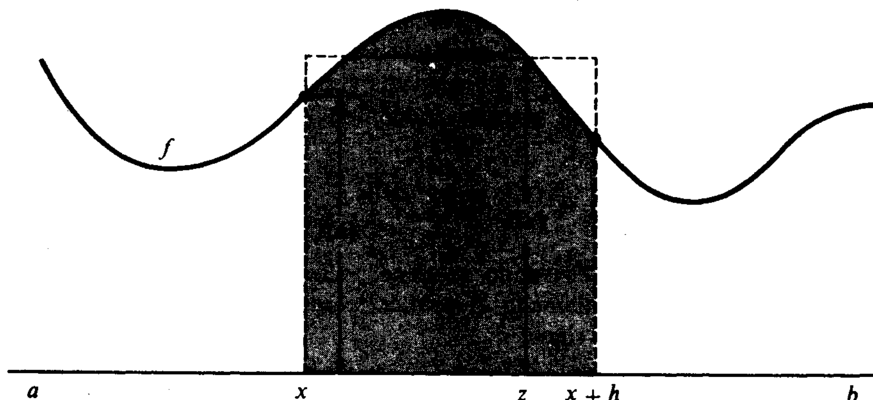


FIGURA 5.1 *Interpretación geométrica del primer teorema fundamental del Cálculo.*

y, puesto que $x \leq z \leq x + h$, encontramos que $f(z) \to f(x)$ cuando $h \to 0$ con valores positivos. Si $h \to 0$ con valores negativos, se razona en forma parecida. Por consiguiente, $A'(x)$ existe y es igual a $f(x)$.

Este razonamiento supone que la función f es continua en un cierto *entorno* del punto x. No obstante, la hipótesis del teorema se refiere tan sólo a la continuidad de f en un *solo punto* x. Por consiguiente, para demostrar el teorema bajo esta hipótesis *más débil* utilizamos un método distinto.

Demostración analítica. Sea x un punto en el que f es continua y supuesta x fija, se forma el cociente:

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h}$$

Para demostrar el teorema se ha de probar que este cociente tiende a $f(x)$ cuando $h \to 0$. El numerador es:

$$A(x + h) - A(x) = \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Si en la última integral se escribe $f(t) = f(x) - [f(t) - f(x)]$ resulta:

$$A(x + h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dt + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt =$$

$$= hf(x) + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt\,,$$

de donde

(5.3)
$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt\,.$$

Por tanto, para completar la demostración de (5.1) es necesario demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt = 0\,.$$

En esta parte de la demostración es donde se hace uso de la continuidad de f en x.

Si se designa por $G(h)$ el último término del segundo miembro de (5.3), se trata de demostrar que $G(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Aplicando la definición de límite, se ha de probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

(5.4)
$$G(h) < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < h < \delta.$$

En virtud de la continuidad de f en x, dado un ϵ existe un número positivo δ tal que:

(5.5)
$$|f(t) - f(x)| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

siempre que:

$$x - \delta < t < x + \delta \,. \tag{5.6}$$

Si se elige h de manera que $0 < h < \delta$, entonces cada t en el intervalo $[x, x + h]$ satisface (5.6) y por tanto (5.5) se verifica para cada t de este intervalo. Aplicando la propiedad $|\int_x^{x+h} g(t)\, dt| \le \int_x^{x+h} |g(t)|\, dt$, cuando $g(t) = f(t) - f(x)$, de la desigualdad en (5.5) se pasa a la relación:

$$\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\, dt \right| \le \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \le \int_x^{x+h} \tfrac{1}{2}\epsilon\, dt = \tfrac{1}{2}h\epsilon < h\epsilon \,.$$

Dividiendo por h se ve que (5.4) se verifica para $0 < h < \delta$. Si $h < 0$, un razonamiento análogo demuestra que (5.4) se verifica siempre que $0 < |h| < \delta$, lo que completa la demostración.

5.2 Teorema de la derivada nula

Si una función f es constante en un intervalo (a, b), su derivada es nula en todo el intervalo (a, b). Ya hemos demostrado este hecho como una consecuencia inmediata de la definición de derivada. También se demostró, como parte c) del teorema 4.7, el recíproco de esa afirmación que aquí se presenta como teorema independiente.

TEOREMA 5.2. TEOREMA DE LA DERIVADA NULA. *Si $f'(x) = 0$ para cada x en un intervalo abierto I, es f constante en I.*

Este teorema, cuando se utiliza combinado con el primer teorema fundamental del Cálculo, nos conduce al segundo teorema fundamental que se estudia en la Sección siguiente.

5.3 Funciones primitivas y segundo teorema fundamental del cálculo

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PRIMITIVA. *Una función P se llama primitiva (o antiderivada) de una función f en un intervalo abierto I si la derivada de P es f, esto es, si $P'(x) = f(x)$ para todo x en I.*

Por ejemplo, la función seno es una primitiva del coseno en todo intervalo porque la derivada del seno es el coseno. Decimos *una* primitiva y no *la* primi-

tiva, porque si P es una primitiva de f también lo es $P + k$ para cualquier constante k. Recíprocamente, dos primitivas cualesquiera P y Q de la misma función f sólo pueden diferir en una constante porque su diferencia $P - Q$ tiene la derivada

$$P'(x) - Q'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para toda x en I y por tanto, según el teorema 5.2, $P - Q$ es constante en I.

El primer teorema fundamental del Cálculo nos dice que podemos siempre construir una primitiva de una función continua por integración. Cuando combinamos esto con el hecho de que dos primitivas de la misma función tan sólo difieren en una constante, obtenemos el segundo teorema fundamental del Cálculo.

TEOREMA 5.3. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. *Supongamos f continua en un intervalo abierto I, y sea P una primitiva cualquiera de f en I. Entonces, para cada c y cada x en I, tenemos*

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\,dt\,. \tag{5.7}$$

Demostración. Pongamos $A(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Puesto que f es continua en cada x de I, el primer teorema fundamental nos dice que $A'(x) = f(x)$ para todo x de I. Es decir, A es una primitiva de f en I. Puesto que dos primitivas de f pueden diferir tan sólo en una constante, debe ser $A(x) - P(x) = k$ para una cierta constante k. Cuando $x = c$, esta fórmula implica $-P(c) = k$, ya que $A(c) = 0$. Por consiguiente, $A(x) - P(x) = -P(c)$, de lo que obtenemos (5.7).

El teorema 5.3 nos indica cómo encontrar una primitiva P de una función continua f. Integrando f desde un punto fijo c a un punto arbitrario x y sumando la constante $P(c)$ obtenemos $P(x)$. Pero la importancia real del teorema radica en que poniendo la ecuación (5.7) en la forma

$$\int_c^x f(t)\,dt = P(x) - P(c)\,. \tag{5.8}$$

se ve que podemos calcular el valor de una integral mediante una simple substracción si conocemos una primitiva P. El problema de calcular una integral se ha transformado en otro problema, el de hallar la primitiva P de f. En la práctica, el segundo problema es más fácil de abordar que el primero. Cada fórmula de derivación proporciona de manera inmediata un ejemplo de una primitiva de una cierta función f, de donde resulta una fórmula de integración para dicha función.

De las fórmulas de derivación antes estudiadas, y como consecuencia del segundo teorema fundamental, se pueden deducir las siguientes fórmulas de integración

EJEMPLO 1. *Integración de potencias racionales.* La fórmula de integración

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.9}$$

se demostró directamente en la Sección 1.23 a partir de la definición de integral. Aplicando el segundo teorema fundamental, puede hallarse de nuevo este resultado y además generalizarlo para exponentes racionales. En primer lugar se observa que la función P definida por

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{5.10}$$

tiene como derivada $P'(x) = x^n$ para cada n entero no negativo. De esta igualdad válida para todo número real x, aplicando (5.8) se tiene

$$\int_a^b x^n\,dx = P(b) - P(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

para cualquier intervalo $[a, b]$. Esta fórmula, demostrada para todo entero $n \geq 0$ conserva su validez para todo entero negativo excepto $n = -1$, que se excluye puesto que en el denominador aparece $n + 1$. Para demostrar (5.9) para n negativo, basta probar que (5.10) implica $P'(x) = x^n$ cuando n es negativo y $\neq -1$, lo cual es fácil de verificar derivando P como función racional. Hay que tener en cuenta que si n es negativo, ni $P(x)$ ni $P'(x)$ están definidas para $x = 0$, y al aplicar (5.9) para n negativo se deben excluir aquellos intervalos $[a, b]$ que contienen el punto $x = 0$.

El resultado del ejemplo 3 de la Sección 4.5, permite extender (5.9) a todos los exponentes *racionales* (excepto -1) siempre que el integrando esté definido en todos los puntos del intervalo $[a, b]$ en consideración. Por ejemplo, si $0<a<b$ y $n = -\frac{1}{2}$ se tiene:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_a^b x^{-1/2}dx = \left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})\,.$$

En el capítulo siguiente se definirá una función potencial general f tal que $f(x) = x^c$ para *cada exponente real c*. Se verá que esta función tiene por derivada $f'(x) = cx^{c-1}$ y por primitiva $P(x) = x^{c+1}/(c + 1)$ si $c \neq 1$, lo que permitirá extender la (5.9) a todo exponente real excepto -1.

Obsérvese que $P'(x) = 1/x$ no puede obtenerse por derivación de ninguna función de la forma $P(x) = x^n$. No obstante, existe una función P cuya deri-

vada es $P'(x) = 1/x$. Una tal función es evidentemente una integral indefinida de la misma; por ejemplo:

$$P(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{si} \qquad x > 0\,.$$

Esta integral existe, puesto que el integrando es monótono. La función así definida se llama *logaritmo* (más concretamente, *logaritmo natural*). Sus propiedades se desarrollarán de forma sistemática en el capítulo 6.

EJEMPLO 2. *Integración de seno y coseno.* Puesto que la derivada del seno es el coseno y la del coseno menos el seno, el segundo teorema fundamental da las fórmulas siguientes:

$$\int_a^b \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \Big|_a^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a\,,$$

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = (-\cos x) \Big|_a^b = \cos a - \cos b\,.$$

Estas fórmulas se conocían ya, pues se demostraron en el capítulo 2 a partir de la definición de integral.

Se obtienen otras fórmulas de integración a partir de los ejemplos 1 y 2 tomando sumas finitas de términos de la forma Ax^n, B sen x, C cos x, donde A, B, C son constantes.

5.4 Propiedades de una función deducidas de propiedades de su derivada

Si una función f tiene derivada continua f' en un intervalo abierto I, el segundo teorema fundamental afirma que

$$(5.11) \qquad f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\, dt$$

cualesquiera que sean x y c en I. Esta fórmula, que expresa f en función de su derivada f', nos permite deducir propiedades de una función a partir de propiedades de su derivada. Aunque las propiedades siguientes fueron ya discutidas en el capítulo 4, puede ser de interés ver que pueden deducirse como sencillas consecuencias de la igualdad (5.11).

Supongamos que f' es continua y no negativa en I. Si $x > c$, entonces $\int_c^x f'(t)\, dt \geq 0$, y por tanto $f(x) \geq f(c)$. Es decir, si la derivada es continua y no negativa en I, la función es creciente en I.

En el teorema 2.9 se demostró que la integral indefinida de una función creciente es convexa. Por consiguiente, si f' es continua y creciente en I, la igualdad (5.11) demuestra que f es convexa en I. Análogamente, f es cóncava en los intervalos en los que f' es continua y decreciente.

5.5 Ejercicios

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 10, encontrar una primitiva de f; es decir, encontrar una función P tal que $P'(x) = f(x)$ y aplicar el segundo teorema fundamental para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$.

1. $f(x) = 5x^3$.
2. $f(x) = 4x^4 - 12x$.
3. $f(x) = (x + 1)(x^3 - 2)$.
4. $f(x) = \dfrac{x^4 + x - 3}{x^3}$, $\quad x \neq 0$.
5. $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$, $\quad x > 0$.
6. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\tfrac{1}{2}x}$, $\quad x > 0$.
7. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{x}}$, $\quad x > 0$.
8. $f(x) = 2x^{1/3} - x^{-1/3}$, $\quad x > 0$.
9. $f(x) = 3\operatorname{sen} x + 2x^5$.
10. $f(x) = x^{4/3} - 5\cos x$.

11. Demostrar que no existe ningún polinomio f cuya derivada esté dada por la fórmula $f'(x) = 1/x$.
12. Demostrar que $\int_0^x |t|\,dt = \tfrac{1}{2}x|x|$ para todo número real x.
13. Demostrar que

$$\int_0^x (t + |t|)^2\,dt = \frac{2x^2}{3}(x + |x|) \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

14. Una función f es continua para cualquier x y satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\tfrac{1}{2} + x^2 + x\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

para todo x. Calcular $f(\tfrac{1}{4}\pi)$ y $f'(\tfrac{1}{4}\pi)$.

15. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_c^x f(t)\,dt = \cos x - \tfrac{1}{2} \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

16. Encontrar una función f y un valor de la constante c, tal que:

$$\int_c^x tf(t)\,dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

17. Existe una función f definida y continua para todo número real x que satisface una ecuación de la forma:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c\,,$$

donde c es una constante. Encontrar una fórmula explícita para $f(x)$ y hallar el valor de la constante c.

18. Una función f está definida para todo real x por la fórmula

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2}\,dt\,.$$

Sin intentar el cálculo de esta integral, hallar un polinomio cuadrático $p(x) = a + bx + cx^2$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, y $p''(0) = f''(0)$.

19. Dada una función g, continua para todo x, tal que $g(1) = 5$ e $\int_0^1 g(t)\,dt = 2$. Póngase $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2 g(t)\,dt$, demostrar que

$$f'(x) = x\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x tg(t)\,dt\,,$$

y calcular $f''(1)$ y $f'''(1)$.

20. Sin calcular las siguientes integrales indefinidas, hallar la derivada $f'(x)$ en cada caso si $f(x)$ es igual a

(a) $\displaystyle\int_0^x (1 + t^2)^{-3}\,dt\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^{x^2} (1 + t^2)^{-3}\,dt\,,$ (c) $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1 + t^2)^{-3}\,dt\,.$

21. Sin calcular la integral, calcular $f'(x)$ si f está definida por la fórmula

$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1 + t^4}\,dt\,.$$

22. En cada caso, calcular $f(2)$ si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x \geq 0$.

(a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1 + x)\,.$

(b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1 + x)\,.$

(c) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x^2(1 + x)\,.$

(d) $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\,dt = x\,.$

23. La base de un sólido es el conjunto de ordenadas de una función no negativa f en el intervalo $[0, a]$. Todas las secciones perpendiculares a ese intervalo son cuadrados. El volumen del sólido es

$$a^3 - 2a\cos a + (2 - a^2)\operatorname{sen} a$$

para todo $a \geq 0$. Suponiendo que f es continua en $[0, a]$, calcular $f(a)$.

24. Un mecanismo impulsa una partícula a lo largo de una recta. Está concebido de manera que la posición de la partícula en el instante t a partir del punto inicial 0 en la recta está dado por la fórmula $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t \operatorname{sen} t$. El mecanismo trabaja perfectamente hasta el instante $t = \pi$ en surge una avería inesperada. A partir de ese momento la partícula se mueve con velocidad constante (la velocidad adquirida en el instante $t = \pi$). Calcular : a) su velocidad en el instante $t = \pi$; b) su aceleración en el instante $t = \frac{1}{2}\pi$; c) su aceleración en el instante $t = \frac{3}{2}\pi$; d) su posición a partir de 0 en el instante $t = \frac{5}{2}\pi$. e) Hallar el instante $t > \pi$ en el que la partícula vuelve al punto inicial 0, o bien demostrar que nunca regresa a 0.

25. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta. Su posición en el instante t es $f(t)$. Cuando $0 \leq t \leq 1$, la posición viene dada por la integral

$$f(t) = \int_0^t \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \pi x \cos \pi x}{1 + x^2}\, dx .$$

(No intentar el cálculo de esta integral.) Para $t \geq 1$, la partícula se mueve con aceleración constante (la aceleración adquirida en el instante $t = 1$). Calcular: a) su aceleración en el instante $t = 2$; b) su velocidad cuando $t = 1$; c) su velocidad cuando $t > 1$; d) la diferencia $f(t) - f(1)$ cuando $t > 1$.

26. En cada uno de los casos siguientes encontrar una función f (con segunda derivada f'' continua) que satisfaga a todas las condiciones indicadas, o bien explicar por qué no es posible encontrar una tal función.
(a) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$.
(b) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 3$.
(c) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f(x) \leq 100$ para cada positivo x.
(d) $f''(x) > 0$ para cada x, $f'(0) = 1$, $f(x) \leq 100$ para cada negativo x.

27. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, siendo su posición en el instante t, $f(t)$. Parte con una velocidad inicial $f'(0) = 0$ y tiene una aceleración continua $f''(t) \geq 6$ para todo t en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Demostrar que la velocidad es $f'(t) \geq 3$ para todo t en un cierto intervalo $[a, b]$, donde $0 \leq a < b \leq 1$, siendo $b - a = \frac{1}{2}$.

28. Dada una función f tal que la integral $A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ exista para cada x en un intervalo $[a, b]$. Sea c un punto del intervalo abierto (a, b). Considerar las siguientes afirmaciones relativas a f y A:

a) f es continua en c.
b) f es discontinua en c.
c) f es creciente en (a, b).
d) $f'(c)$ existe.
e) f' es continua en c.

α) A es continua en c.
β) A es discontinua en c.
γ) A es convexa en (a, b).
δ) $A'(c)$ existe.
ϵ) A' es continua en c.

En una tabla como la dibujada aquí, poner una *T* en el cuadrado correspondiente si la afirmación señalada con letra latina implica siempre la señalada con letra griega. Dejar los demás cuadrados en blanco. Por ejemplo, si *a*) implica α), marcaremos con una *T* el cuadrado de la esquina superior izquierda, etc. ...

	α	β	γ	δ	ϵ
a					
b					
c					
d					
e					

5.6 La notación de Leibniz para las primitivas

Volvamos ahora a estudiar la relación entre integración y derivación. Primero comentemos un poco la notación introducida por Leibniz.

Hemos definido una primitiva P de una función f como cualquier función para la que $P'(x) = f(x)$. Si f es continua en un intervalo, una primitiva viene dada por una fórmula de la forma

$$P(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,,$$

y todas las demás primitivas pueden diferir de esa tan sólo en un constante. Leibniz usó el símbolo $\int f(x)\,dx$ para designar una primitiva general de f. Con esta notación, una igualdad como

$$\int f(x)\,dx = P(x) + C \tag{5.12}$$

se considera como otra forma de escribir $P'(x) = f(x)$. Por ejemplo, ya que la derivada del seno es el coseno, podemos escribir

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C\,. \tag{5.13}$$

Análogamente, ya que la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n, podemos escribir

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,, \tag{5.14}$$

para cualquier potencia racional con tal que $n \neq -1$. El símbolo C representa una constante arbitraria de modo que cada una de las igualdades (5.13) y (5.14) es en realidad una afirmación en torno a un conjunto completo de funciones.

A pesar de la semejanza aparente, el símbolo $\int f(x)\,dx$ es conceptualmente distinto del símbolo de integración $\int_a^b f(x)\,dx$. Los dos han sido originados por procesos completamente distintos: la diferenciación y la integración. Sin embargo, como estos procesos están relacionados por los teoremas fundamentales del Cálculo, hay relaciones entre ambos símbolos.

El primer teorema fundamental indica que cada integral indefinida de f es también una primitiva de f. Por lo cual, en (5.12) se puede sustituir $P(x)$ por $\int_c^x f(t)\,dt$ donde c es un cierto límite inferior y resulta:

$$\int f(x)\,dx = \int_c^x f(t)\,dt + C\,. \tag{5.15}$$

Esto indica que se puede considerar el símbolo $\int f(x)\,dx$ como representante de una integral indefinida de f, más una constante.

El segundo teorema fundamental, expresa que para cada primitiva P de f y cada constante C, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [P(x) + C]\Big|_a^b\,.$$

Si se sustituye $P(x) + C$ por $\int f(x)\,dx$, esta fórmula se puede escribir en la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b\,. \tag{5.16}$$

Las dos fórmulas (5.15) y (5.16) pueden considerarse como una expresión simbólica de los teoremas primero y segundo fundamentales del Cálculo.

Debido a una larga tradición, muchos tratados de Cálculo consideran el símbolo $\int f(x)\,dx$ como representante de una "integral indefinida" y no de una función primitiva o antiderivada. Esto está justificado, en parte, por la ecuación (5.15) que dice que el símbolo $\int f(x)\,dx$ es, además de una constante aditiva C, una integral indefinida de f. Por la misma razón, muchos formularios de Matemática contienen extensas listas de fórmulas llamadas «tablas de integrales indefinidas» siendo en realidad tablas de funciones primitivas. Para distinguir el símbolo $\int f(x)\,dx$ de $\int_a^b f(x)\,dx$ el último se denomina integral *definida*. Puesto que el segundo teorema fundamental reduce el problema de la integración al de buscar primitivas, la expresión «técnica de integración» se refiere al estudio de un método sistemático para hallar primitivas. Esta terminología se encuentra muchísimo en la literatura matemática y se adoptará también en este libro. Así,

por ejemplo, cuando se pide la «integral» $\int f(x)\,dx$ se ha de entender que lo que se desea es la primitiva más general de f.

Principalmente se siguen tres técnicas en la construcción de tablas de integrales indefinidas, que ha de conocer todo el que desee manejar ágilmente el instrumento del Cálculo. Son 1) *integración por sustitución* (que se expondrá en el apartado que sigue), método basado en la regla de la cadena; 2) *integración por partes,* método basado en la fórmula de diferenciación de un producto (que se expondrá en el apartado 5.9); y 3) integración por *descomposición en fracciones simples,* que es una técnica algebraica que se discutirá al final del capítulo 6. Estas técnicas no sólo explican cómo se han construido las tablas de integrales indefinidas, sino que también enseñan a transformar ciertas integrales, reduciéndolas a otras básicas que se encuentran en las tablas.

5.7 Integración por sustitucion

Sea Q la composición de dos funciones P y g, es decir $Q(x) = P[g(x)]$ para todo x en un cierto intervalo I. Si conocemos la derivada de P, sea $P'(x) = f(x)$, la regla de la cadena nos dice que la derivada de Q viene dada por la fórmula $Q'(x) = P'[g(x)]g'(x)$. Puesto que $P' = f$, esto nos asegura que $Q'(x) = f[g(x)]g'(x)$. En otras palabras

(5.17) $$P'(x) = f(x) \quad \text{implica} \quad Q'(x) = f[g(x)]g'(x)\,.$$

Con la notación de Leibniz, esta afirmación puede escribirse del modo siguiente:

Si tenemos la fórmula de integración

(5.18) $$\int f(x)\,dx = P(x) + C\,,$$

tenemos también la fórmula más general

(5.19) $$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = P[g(x)] + C\,.$$

Por ejemplo, si $f(x) = \cos x$, en la (5.18) deberá ponerse $P(x) = \operatorname{sen} x$, de modo que (5.19) se convierte en

(5.20) $$\int \cos g(x) \cdot g'(x)\,dx = \operatorname{sen} g(x) + C\,.$$

En particular, si $g(x) = x^3$, se obtiene

$$\int \cos x^3 \cdot 3x^2\,dx = \operatorname{sen} x^3 + C\,,$$

resultado que se comprueba directamente y con facilidad puesto que la derivada de $\operatorname{sen} x^3$ es $3x^2 \cos x^3$.

Observemos ahora que la fórmula general (5.19) está relacionada a la (5.18) por un sencillo proceso mecánico. Supongamos que en (5.19) sustituimos $g(x)$ por un nuevo símbolo u y reemplacemos $g'(x)$ por du/dx, según la notación de Leibniz para las derivadas. Entonces la (5.19) se transforma en

$$\int f(u) \frac{du}{dx}\, dx = P(u) + C .$$

Al llegar aquí uno está fuertemente tentado de reemplazar la combinación $\dfrac{du}{dx}\, dx$ por du. Si lo hacemos, la última fórmula toma el aspecto

$$(5.21) \qquad \int f(u)\, du = P(u) + C .$$

Obsérvese que esta fórmula tiene exactamente la misma forma que (5.18), salvo que en todas partes en vez del símbolo x aparece el símbolo u. Es decir, cada fórmula de integración tal como (5.18) puede dar lugar a otra más general sin más que hacer una simple sustitución de símbolos. Se sustituye x en (5.18) por un nuevo símbolo u para obtener (5.21), y después se considera que u representa una nueva función de x, tal como $u = g(x)$. Reemplazamos entonces el símbolo du por la combinación $g'(x)\, dx$, y la igualdad (5.21) se reduce a la fórmula general (5.19).

Por ejemplo, si sustituimos x por u en la fórmula $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$, obtenemos

$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C .$$

En esta última fórmula, u se puede reemplazar por $g(x)$ y du por $g'(x)\, dx$, y resulta una fórmula correcta de integración (5.20).

Cuando este proceso mecánico se usa *a la inversa*, conduce al llamado método de *integración por sustitución*. El objeto de este método es transformar una integral con un integrando complicado, tal como $\int 3x^2 \cos x^3\, dx$, en una integral más sencilla, como la $\int \cos u\, du$. El método es aplicable siempre que la integral original puede escribirse en la forma

$$\int f[g(x)]g'(x)\, dx ,$$

ya que la sustitución

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)\, dx ,$$

la transforma en $\int f(u)\,du$. Si se sabe efectuar esta integración, obtenemos una primitiva, llamémosla $P(u)$, y la integral original se obtiene sustituyendo u por $g(x)$ en la fórmula de $P(u)$.

El lector puede comprobar que no hemos atribuido significado alguno a los símbolos dx y du como tales. Se utilizan como instrumentos puramente formales que nos ayudan a tratar las operaciones matemáticas en forma mecánica. Cada vez que utilizamos el método, estamos en realidad aplicando la afirmación (5.17).

El éxito de este método depende de la habilidad en determinar la parte de integrando que se ha de substituir por el símbolo u, y esta habilidad se adquiere con la experiencia que se logra resolviendo casos particulares. Los ejemplos especialmente seleccionados que se dan a continuación enseñan la manera de aplicar este método en la práctica.

EJEMPLO 1. Integrar $\int x^3 \cos x^4\,dx$.

Solución. Se trata de encontrar f y g adecuadamente para poder escribir $x^3 \cos x^4$ en la forma $f[g(x)]g'(x)$. Puesto que $\cos x^4$ es una función compuesta, se puede tomar $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x^4$, y de esta manera $\cos x^4$ se expresa en la forma $f[g(x)]$. Con esta elección de g es $g'(x) = 4x^3$ y por tanto $f[g(x)]g'(x) = (\cos x^4)(4x^3)$. El factor 4 que aparece de más, se puede introducir fácilmente multiplicando y dividiendo el integrando por 4. Así se tiene:

$$x^3 \cos x^4 = \tfrac{1}{4}(\cos x^4)(4x^3) = \tfrac{1}{4}f[g(x)]g'(x)\,.$$

Haciendo ahora la sustitución $u = g(x) = x^4$, $du = g'(x)\,dx = 4x^3\,dx$, se tiene

$$\int x^3 \cos x^4\,dx = \tfrac{1}{4}\int f(u)\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C\,.$$

Sustituyendo u por x^4 en el resultado final, se obtiene la fórmula:

$$\int x^3 \cos x^4\,dx = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} x^4 + C\,,$$

que se puede comprobar directamente por derivación.

Cuando se tiene un poco de práctica algunos de los pasos se efectúan mentalmente, y el cálculo se realiza de manera breve como sigue:

Sea $u = x^4$; entonces, $du = 4x^3\,dx$, y se obtiene:

$$\int x^3 \cos x^4\,dx = \tfrac{1}{4}\int (\cos x^4)(4x^3\,dx) = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} x^4 + C\,.$$

Obsérvese que el método se puede aplicar en este ejemplo, porque el exponente del factor x^3 es el de x en $\cos x^4$ disminuido en una unidad.

EJEMPLO 2. Integral $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución. Sea $u = \cos x$. entonces $du = -\operatorname{sen} x \, dx$, y se tiene

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = -\int (\cos x)^2(-\operatorname{sen} x \, dx) = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

También aquí se comprueba fácilmente el resultado final por derivación.

EJEMPLO 3. Integrar $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$.

Solución. Sea $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$, entonces $du = \frac{1}{2}x^{-1/2} \, dx$ o sea $dx/\sqrt{x} = 2 \, du$. Por tanto,

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = 2\int \operatorname{sen} u \, du = -2 \cos u + C = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

EJEMPLO 4. Integrar $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Solución. Sea $u = 1 + x^2$, entonces $du = 2x \, dx$, es decir $x \, dx = \frac{1}{2} \, du$, y se obtiene:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2} \, du = u^{1/2} + C = \sqrt{1 + x^2} + C.$$

El método de sustitución es igualmente aplicable a las integrales definidas. Por ejemplo, para calcular la integral definida $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$ se determina primero la integral indefinida, como se hizo en el ejemplo 2, y luego haciendo uso del segundo teorema fundamental se puede escribir:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\left(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \frac{1}{3}.$$

Algunas veces interesa aplicar el segundo teorema fundamental a la integral expresada en función de u; sin embargo, en este caso se han de introducir pre-

cisamente unos nuevos límites de integración. En primer lugar se presentará un ejemplo en el que se ponga de manifiesto el método que se sigue, y después se justificará el proceso con un teorema general.

EJEMPLO 5. Calcular $\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Solución. Sea $u = x^2 + 2x + 3$. Entonces $du = (2x+2)\,dx$ y por tanto,

$$\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Para obtener los nuevos límites de integración se tiene en cuenta que $u = 11$ si $x = 2$ y que $u = 18$ si $x = 3$, y en consecuencia es:

$$\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2}\int_{11}^{18} u^{-1/2}\,du = \sqrt{u}\,\Big|_{11}^{18} = \sqrt{18} - \sqrt{11}.$$

Al mismo resultado se llega cuando se expresa todo en función de x.

$$\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \sqrt{x^2+2x+3}\,\Big|_2^3 = \sqrt{18} - \sqrt{11}.$$

Demostramos ahora un teorema general que justifica el proceso seguido en el ejemplo 5.

TEOREMA 5.4. TEOREMA DE SUSTITUCIÓN PARA INTEGRALES. *Supongamos que g tiene una derivada continua g' en un intervalo abierto I. Sea J el conjunto de valores que toma g en I y supongamos que f es continua en J. Entonces para cada x y cada c en I, tenemos*

$$\int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)\,du. \tag{5.22}$$

Demostración. Sea $a = g(c)$ y definamos dos nuevas funciones P y Q del siguiente modo:

$$P(x) = \int_a^x f(u)\,du \quad \text{si} \quad x \in J, \qquad Q(x) = \int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \in I.$$

Puesto que P y Q son integrales indefinidas de funciones continuas, tienen derivadas dadas por las fórmulas

$$P'(x) = f(x), \qquad Q'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

Llamemos ahora R a la función compuesta, $R(x) = P[g(x)]$. Con la regla de la cadena, encontramos

$$R'(x) = P'[g(x)]g'(x) = f[g(x)]g'(x) = Q'(x).$$

Aplicando dos veces el segundo teorema fundamental, obtenemos

$$\int_{g(c)}^{g(x)} f(u)\,du = \int_{g(c)}^{g(x)} P'(u)\,du = P[g(x)] - P[g(c)] = R(x) - R(c),$$

y

$$\int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt = \int_c^x Q'(t)\,dt = \int_c^x R'(t)\,dt = R(x) - R(c).$$

Esto demuestra que las dos integrales (5.22) son iguales.

5.8 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 20, aplicar el método de sustitución para calcular las integrales.

1. $\int \sqrt{2x+1}\,dx.$
2. $\int x\sqrt{1+3x}\,dx.$
3. $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx.$
4. $\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x}}.$
5. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}.$
6. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx.$
7. $\int z(z-1)^{1/3}\,dz.$
8. $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x}.$
9. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\sqrt{4 - \operatorname{sen} 2x}\,dx.$
10. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(3+\cos x)^2}.$
11. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{\cos^3 x}}.$
12. $\int_3^8 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}}.$
13. $\int x^{n-1}\operatorname{sen} x^n\,dx, \qquad n \neq 0.$
14. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^6}}.$
15. $\int t(1+t)^{1/4}\,dt.$
16. $\int (x^2+1)^{-3/2}\,dx.$

17. $\int x^2(8x^3 + 27)^{2/3}\, dx.$

18. $\int \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^{1/3}}.$

19. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}.$

20. $\int \frac{(x^2 + 1 - 2x)^{1/5}\, dx}{1 - x}.$

21. Deducir las fórmulas de los teoremas 1.18 y 1.19 por medio del método de sustitución.

22. Sea

$$F(x, a) = \int_0^x \frac{t^p}{(t^2 + a^2)^q}\, dt,$$

donde $a > 0$ y p y q son enteros positivos. Demostrar que $F(x, a) = a^{p+1-2q}F(x/a, 1)$.

23. Demostrar que

$$\int_x^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1 + t^2} \qquad \text{si} \quad x > 0.$$

24. Demostrar que

$$\int_0^1 x^m(1 - x)^n\, dx = \int_0^1 x^n(1 - x)^m\, dx.$$

si m y n son enteros positivos

25. Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \operatorname{sen}^m x\, dx = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x\, dx.$$

si m es un entero positivo.

26. (a) Demostrar que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx. \qquad [\textit{Indicación: } u = \pi - x].$$

(b) Aplicar (a) para deducir la fórmula:

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

27. Demostrar que $\int_0^1 (1 - x^2)^{n-1/2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u\, du$ si n es un entero positivo. [*Indicación:* $x = \operatorname{sen} u$.] La integral del segundo miembro se puede calcular por el método de integración por partes que se expondrá en la Sección siguiente.

5.9 Integración por partes

Se demostró en el capítulo 4 que la derivada de un producto de dos funciones f y g está dada por la fórmula:

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

donde $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Traduciendo esto a la notación de Leibniz para primitivas se tiene $\int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) + C$, que se escribe usualmente en la forma

(5.23) $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C.$$

Esta igualdad, conocida por fórmula de *integración por partes,* da lugar a una nueva técnica de integración.

Para calcular una integral, por ejemplo $\int k(x)\,dx$, aplicando (5.23), se han de encontrar dos funciones f y g de manera que $k(x)$ se pueda escribir en la forma $f(x)g'(x)$. Si esto es posible, aplicando (5.23) se tendrá:

$$\int k(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx + C,$$

reduciéndose el cálculo de la integral dada al de la $\int g(x)f'(x)\,dx$. Para que el método sea eficaz se han de elegir f y g adecuadamente, de manera que esta última integral pueda calcularse con más facilidad que la original. Algunas veces, reiterando la aplicación de (5.23) se llega a una integral de más fácil cálculo o que se encuentra en la tabla. Los ejemplos resueltos a continuación ponen de manifiesto las ventajas de este método. En el caso de integrales definidas, la fórmula (5.23) se transforma en

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Poniendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$ se tiene $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$ y la fórmula de integración por partes toma una forma abreviada que parece más fácil de recordar:

(5.24) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C.$$

EJEMPLO 1. Integrar $\int x \cos x \, dx$.

Solución. Se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, de donde $f'(x) = 1$ y $g(x) = $ $= \operatorname{sen} x$ y en virtud de (5.20) se tiene:

$$(5.25) \qquad \int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C .$$

Obsérvese que en este caso, la segunda integral ya es conocida.

Para efectuar el mismo cálculo utilizando la notación abreviada de (5.24) se escribe:

$$u = x, \qquad dv = \cos x \, dx ,$$

$$du = dx, \qquad v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x ,$$

$$\int x \cos x \, dx = uv - \int v \, du = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C .$$

Si se hubiera elegido $u = \cos x$ y $dv = x \, dx$, de donde $du = -\operatorname{sen} x \, dx$ y $v = \frac{1}{2} x^2$, y (5.24), resultaría:

$$\int x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} x^2 \cos x - \tfrac{1}{2} \int x^2 (-\operatorname{sen} x) \, dx + C = \tfrac{1}{2} x^2 \cos x + \tfrac{1}{2} \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx + C .$$

Como la última integral que aparece no ha sido todavía calculada, esta elección de u, v no es útil para el cálculo de la integral dada. Obsérvese, sin embargo, que esta última ecuación podría resolverse respecto a $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ y aplicar (5.25) con lo cual se obtendría:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x - x^2 \cos x + C .$$

EJEMPLO 2. Integrar $\int x^2 \cos x \, dx$.

Solución. Sea $u = x^2$ y $dv = \cos x \, dx$, entonces $du = 2x dx$ y $v = $ $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$, con lo cual se tiene:

$$(5.26) \quad \int x^2 \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du + C = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx + C .$$

Esta última integral se puede calcular aplicando de nuevo el método de integración por partes. Puesto que es análogo al ejemplo 1, se puede escribir directamente el resultado

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C .$$

Sustituyendo en (5.26) y agrupando las dos constantes arbitrarias en una, se tiene:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C .$$

EJEMPLO 3. Algunas veces el método falla porque conduce de nuevo a la integral original. Por ejemplo, al intentar calcular por partes la integral $\int x^{-1}\, dx$. Si se hace $u = x$ y $dv = x^{-2} dx$, entonces $\int x^{-1}\, dx = \int u\, dv$. Con esta elección de u y v se tiene $du = dx$ y $v = -x^{-1}$ de manera que (5.24) da:

$$(5.27) \qquad \int x^{-1}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du + C = -1 + \int x^{-1}\, dx + C ,$$

y se vuelve al punto de partida. Por otra parte, la situación no mejora si se intenta $u = x^n$ y $dv = x^{-n-1}\, dx$.

Este ejemplo se usa con frecuencia para evidenciar la importancia de no olvidar la constante arbitraria C. Si en la fórmula (5.27) no se hubiera escrito la C, se hubiera llegado a la ecuación $\int x^{-1}\, dx = -1 + \int x^{-1}\, dx$ que se utiliza algunas veces para dar una aparente demostración de que $0 = -1$.

Como aplicación del método de integración por partes, se obtiene otra versión del teorema del valor medio ponderado para integrales (teorema 3.16).

TEOREMA 5.5. SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES. *Supongamos que g es continua en $[a, b]$, y que f tiene derivada continua y que nunca cambia de signo en $[a, b]$. Entonces, para un cierto c de $[a, b]$, tenemos*

$$(5.28) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int_a^c g(x)\, dx + f(b) \int_c^b g(x)\, dx .$$

Demostración. Sea $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$. Como que g es continua, tenemos $G'(x) = g(x)$. Por consiguiente, la integración por partes nos da

$$(5.29) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = \int_a^b f(x)G'(x)\, dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\, dx ,$$

puesto que $G(a) = 0$. Según el teorema del valor medio ponderado, se tiene

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(c)\int_a^b f'(x)\,dx = G(c)[f(b) - f(a)]$$

para un cierto c en $[a, b]$. Por consiguiente (5,29), se convierte en

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)G(b) - G(c)[f(b) - f(a)] = f(a)G(c) + f(b)[G(b) - G(c)]\,.$$

Esto demuestra (5.28) ya que $G(c) = \int_a^c g(x)\,dx$ y $G(b) - G(c) = \int_c^b g(x)\,dx$.

5.10 Ejercicios

Con el método de integración por partes calcular las integrales de los Ejercicios 1 al 6.

1. $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.
2. $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.
3. $\int x^3 \cos x\,dx$.
4. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.
5. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$.
6. $\int x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$.

7. Con la integración por partes deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\,dx\,.$$

En la segunda integral, poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y así deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\,.$$

8. Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx\,.$$

En la segunda integral, poner $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y con eso deducir la fórmula recurrente

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx\,.$$

9. Con los resultados de los Ejercicios 7 y 8 demostrar que

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$.

(b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{3\pi}{16}$.

(c) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{5\pi}{32}$.

10. Con los resultados de los Ejercicios 7 y 8 deducir las siguientes fórmulas.

(a) $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$.

(b) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x$.

(c) $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{1}{80}\cos 5x$.

11. Con la integración por partes y los resultados de los Ejercicios 7 y 10 deducir las siguientes fórmulas.

(a) $\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$.

(b) $\int x\operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{36}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{4}x\cos x + \frac{1}{12}x\cos 3x$.

(c) $\int x^2\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{6}x^3 + (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}x^2)\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$.

12. Integrando por partes deducir la fórmula recurrente

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx .$$

13. Utilizar el resultado del Ejercicio 12 para obtener la fórmula siguiente.

(a) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.

(b) $\int \cos^3 x\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 3x$.

(c) $\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x$.

14. Integrando por partes demostrar que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Poner $x^2 = x^2 - 1 + 1$ en la segunda integral y deducir la fórmula

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

15. a) Usar la integración por partes para deducir la fórmula

$$\int (a^2 - x^2)^n \, dx = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1} \int (a^2 - x^2)^{n-1} \, dx + C .$$

b) Utilizar la parte a) para calcular $\int_0^a (a^2 - x^2)^{5/2} \, dx$.

16. (a) Si $I_n(x) = \int_0^x t^n (t^2 + a^2)^{-1/2} \, dt$, aplicar el método de integración por partes para demostrar que

$$nI_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}(x) \qquad \text{si} \quad n \geq 2 .$$

(b) Aplicando (a) demostrar que $\int_0^2 x^5 (x^2 + 5)^{-1/2} \, dx = 168/5 - 40\sqrt{5}/3$.

17. Calcular la integral $\int_{-1}^3 t^3 (4 + t^3)^{-1/2} \, dt$, sabiendo que $\int_{-1}^3 (4 + t^3)^{1/2} \, dt = 11{,}35$. Dejar el resultado en función de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{31}$.

18. Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x} \, dx = \frac{1}{m} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m} \int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} \, dx .$$

Aplicar la fórmula para integrar $\int \tan^2 x \, dx$ y $\int \tan^4 x \, dx$.

19. Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x} \, dx = -\frac{1}{n} \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n} \int \frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} \, dx .$$

Utilizar la fórmula para integrar $\int \cot^2 x \, dx$ y $\int \cot^4 x \, dx$.

20. a) Hallar un entero n tal que $n \int_0^1 x f''(2x) \, dx = \int_0^2 t f''(t) \, dt$.
b) Calcular $\int_0^1 x f''(2x) \, dx$, sabiendo que $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, y $f'(2) = 5$.

21. a) Si ϕ'' es continua y no nula en $[a, b]$, y si existe una constante $m > 0$ tal que $\phi'(t) \geq m$ para todo t en $[a, b]$, usar el teorema 5.5 para demostrar que

$$\left| \int_a^b \operatorname{sen} \phi(t) \, dt \right| \leq \frac{4}{m} .$$

[*Indicación:* Multiplicar y dividir el integrando por $\phi'(t)$.]

b) Si $a > 0$, demostrar que $|\int_a^x \operatorname{sen}(t^2) \, dt| \leq 2/a$ para todo $x > a$.

*5.11 Ejercicios de repaso

1. Sea f un polinomio tal que $f(0) = 1$ y sea $g(x) = x^n f(x)$. Calcular $g(0), g'(0), \dots, g^{(n)}(0)$.
2. Hallar un polinomio P de grado ≤ 5 tal que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P'(0) = P''(0) = P'(1) = P''(1) = 0$.
3. Si $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, demostrar que

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi) \qquad \text{y} \qquad g^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2}n\pi).$$

4. Si $h(x) = f(x)g(x)$, demostrar que la derivada n-ésima de h viene dada por la fórmula

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

en donde $\binom{n}{k}$ representa el coeficiente binomial. Esta es la llamada *fórmula de Leibniz.*

5. Dadas dos funciones f y g cuyas derivadas f' y g' satisfacen las ecuaciones

$$(5.30) \qquad f'(x) = g(x), \quad g'(x) = -f(x), \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1,$$

para todo x en un cierto intervalo abierto J que contiene el 0. Por ejemplo, esas ecuaciones se satisfacen cuando $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.
a) Demostrar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo x de J.
b) Sean F y G otro par de funciones que satisfagan (5.30). Demostrar que $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$, para todo x de J.
[*Indicación:* Considerar $h(x) = [F(x) - f(x)]^2 + [G(x) - g(x)]^2$.]
c) ¿Qué más se puede decir acerca de las funciones f y g que satisfacen (5.30)?

6. Una función f, definida para todo número real positivo, satisface la ecuación $f(x^2) = x^3$ para cada $x > 0$. Determinar $f'(4)$.
7. Una función g definida para todo número real positivo satisface las dos condiciones siguientes: $g(1) = 1$ y $g'(x^2) = x^3$ para todo $x > 0$. Calcular $g(4)$.
8. Demostrar que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t+1}\, dt \geq 0 \qquad \text{para todo } x \geq 0.$$

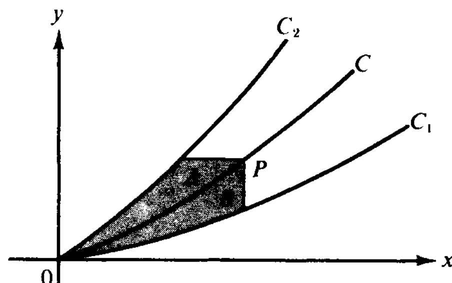


FIGURA 5.2 *Ejercicio* 9.

9. Sean C_1 y C_2 dos curvas que pasan por el origen tal como se indica en la figura 5.2. Una curva C se dice que «biseca en área» la región entre C_1 y C_2, si para cada punto P de C las dos regiones A y B sombreadas en la figura, tienen la misma área. Determinar la curva superior C_2, sabiendo que la curva bisectriz C tiene de ecuación $y = x^2$ y que la curva inferior C_1 tiene de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$.

10. Una función f está definida para todo x como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Póngase $Q(h) = f(h)/h$ si $h \neq 0$. a) Demostrar que $Q(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. b) Demostrar que f tiene derivada en 0, y calcular $f'(0)$.

En los ejercicios 11 al 20, calcular las integrales dadas. Intentar la simplificación de los cálculos utilizando el método de sustitución o la integración por partes cuando sea posible.

11. $\int (2 + 3x) \operatorname{sen} 5x \, dx.$
12. $\int x\sqrt{1 + x^2}\, dx.$
13. $\int_{-2}^{1} x(x^2 - 1)^9 \, dx.$
14. $\int_0^1 \frac{2x + 3}{(6x + 7)^3}\, dx.$
15. $\int x^4(1 + x^5)^5 \, dx.$
16. $\int_0^1 x^4(1 - x)^{20} \, dx.$
17. $\int_1^2 x^{-2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx.$
18. $\int \operatorname{sen} \sqrt[4]{x - 1}\, dx.$
19. $\int x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 \, dx.$
20. $\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\, \operatorname{sen} 2x \, dx.$

21. Demostrar que el valor de la integral $\int_0^2 375x^5(x^2 + 1)^{-4}\, dx$ es 2^n para un cierto entero n.
22. Determinar un par de números a y b para los cuales $\int_0^1 (ax + b)(x^2 + 3x + 2)^{-2}\, dx = 3/2$.
23. Sea $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$. Demostrar que $(2n + 1)I_n = 2n\, I_{n-1}$, y utilizar esta relación I_2, I_3, I_4, y I_5.
24. Sea $F(m, n) = \int_0^x t^m(1 + t)^n \, dt$, $m > 0$, $n > 0$. Demostrar que

$$(m + 1)F(m, n) + nF(m + 1, n - 1) = x^{m+1}(1 + x)^n.$$

Utilizar este resultado para calcular $F(10, 2)$.

25. Sea $f(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$ donde $n \geq 1$. Demostrar que

(a) $f(n + 1) < f(n)$.

(b) $f(n) + f(n-2) = \dfrac{1}{n-1}$ si $n > 2$.

(c) $\dfrac{1}{n+1} < 2f(n) < \dfrac{1}{n-1}$ si $n > 2$.

26. Calcular $f(0)$, sabiendo que $f(\pi) = 2$ y que $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \operatorname{sen} x \, dx = 5$.
27. Designar por A el valor de la integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{(x+2)^2}\, dx .$$

y calcular la siguiente integral en función de A:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x+1}\, dx .$$

Las fórmulas de los Ejercicios 28 al 33 aparecen en tablas de integrales. Comprobar cada una de ellas por cualquier otro método.

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\, dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} + C.$

29. $\displaystyle\int x^n \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{a(2n+3)}\left(x^n(ax+b)^{3/2} - nb \int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx\right) + C \quad (n \neq -\tfrac{3}{2}).$

30. $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx}}\, dx = \frac{2}{(2m+1)b}\left(x^m\sqrt{a+bx} - ma \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}}\, dx\right) + C \quad (m \neq -\tfrac{1}{2}).$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} + C \quad (n \neq 1).$

32. $\displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx + C \quad (m \neq n).$

33. $\displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^{n-2} x}\, dx + C \quad (n \neq 1).$

34. a) Encontrar un polinomio $P(x)$ tal que $P'(x) - 3P(x) = 4 - 5x + 3x^2$. Demostrar que existe una sola solución.
b) Si $Q(x)$ es un polinomio dado, demostrar que existe uno y sólo un polinomio $P(x)$ tal que $P'(x) - 3P(x) = Q(x)$.
35. Una sucesión de polinomios (llamados *polinomios de Bernoulli*) se define por inducción como sigue:

$$P_0(x) = 1; \qquad P_n'(x) = nP_{n-1}(x) \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 P_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{si} \quad n \geq 1.$$

a) Determinar fórmulas explícitas para $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_5(x)$.
b) Demostrar, por inducción, que $P_n(x)$ es un polinomio en x de grado n, siendo el término de mayor grado x^n.
c) Demostrar que $P_n(0) = P_n(1)$ si $n \geq 2$.
d) Demostrar que $P_n(x + 1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ si $n \geq 1$.
e) Demostrar que para $n \leq 2$ tenemos

$$\sum_{r=1}^{k-1} r^n = \int_0^k P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

f) Demostrar que $P_n(1 - x) = (-1)^n P_n(x)$ si $n \geq 1$.

g) Demostrar que $P_{2n+1}(0) = 0$ y $P_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$ si $n \geq 1$.

36. Suponiendo que $|f''(x)| \leq m$ para cada x en el intervalo $[0, a]$, y que f toma su mayor valor en un punto interior de este intervalo, demostrar que $|f'(0)| + f'(a)| \leq am$. Puede suponerse que f'' sea continua en $[0, a]$.

6

FUNCIÓN LOGARITMO, FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

6.1 Introducción

Quien fije su atención en relaciones cuantitativas, o estudia propiedades de funciones conocidas, o trata de descubrir propiedades de una función desconocida. El concepto de función es tan extenso y tan general que no es sorprendente encontrar una inmensa variedad de funciones que se presentan en la naturaleza. Lo que *sí es* sorprendente es que un corto número de funciones especiales rijan una multitud de fenómenos naturales totalmente diferentes. En este capítulo se estudiarán algunas de estas funciones, en primer lugar la función logarítmica y su inversa (la función exponencial) y luego las funciones inversas de las funciones trigonométricas. Todo aquel que estudie Matemática, ya sea como una disciplina abstracta, o como instrumento en otros dominios científicos, encontrará indispensable un conocimiento teórico y práctico de estas funciones y sus propiedades.

Probablemente el lector habrá tenido ocasión de trabajar con logaritmos de base 10 en Álgebra elemental o Trigonometría. La definición dada corrientemente en Álgebra elemental es la siguiente. Si $x > 0$, el logaritmo de x en base 10, indicado por $\log_{10} x$ es un un número real u tal que $10^u = x$. Si $x = 10^u$ e $y = 10^v$, se tiene: $xy = 10^{u+v}$, igualdad que por medio de logaritmos se expresa de la forma siguiente:

$$\log_{10}(xy) = \log_{10} x + \log_{10} y\,. \tag{6.1}$$

Esta propiedad fundamental, hace que los logaritmos sean particularmente aplicables a los cálculos que contienen multiplicaciones. Es práctico usar el número 10 como base ya que los números reales se escriben cómodamente en el sistema decimal, y algunos números importantes tales como 0,01, 0,1, 1, 10, 100, 1000, . . . tienen por logaritmos los enteros -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . . , respectivamente.

Sin embargo, no es preciso tomar como base el número 10; cualquier otro entero y positivo $b \neq 1$ también puede tomarse como base; así:

(6.2) $$u = \log_b x \quad \text{significa} \quad x = b^u\,,$$

y la propiedad fundamental (6.1) se expresa aquí:

(6.3) $$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y\,.$$

Examinando la definición (6.2) desde un punto de vista crítico, se le encuentran algunos fallos lógicos. En primer lugar, para entender (6.2) es preciso saber qué significa b^u. Cuando u es un *entero* o un *número racional* (cociente de dos enteros) es fácil de definir, pero no ocurre lo mismo cuando u es *irracional.* Por ejemplo, ¿cómo se definirá $10^{\sqrt{2}}$? Aunque se llegue a obtener una definición satisfactoria para b^u, se presentan otras dificultades hasta poder llegar a considerar (6.2) como una buena definición de logaritmo: se habrá de demostrar que para cada $x > 0$, existe un u tal que $x = b^u$; y además que la ley de los exponente $b^u b^v = b^{u+v}$, se verifica para todos los exponentes reales u y v.

Se pueden vencer todas estas dificultades y llegar a una definición satisfactoria de logaritmo por este método pero el proceso es largo y pesado. Afortunadamente, el estudio de los logaritmos se puede llevar a cabo por un camino completamente distinto que es mucho más simple y muestra el poder y la elegancia de los métodos de cálculo: *primero* se introduce el logaritmo, y luego se usan los logaritmos para definir b^u.

6.2 Definición del logaritmo natural como integral

El logaritmo es un ejemplo de un concepto matemático que puede ser definido por muchos caminos distintos. Cuando un matemático intenta formular una definición de un concepto, en general tiene en su pensamiento una serie de propiedades que él desea que tenga este concepto. Examinando estas propiedades es conducido frecuentemente a una fórmula o proceso simple que sirve como definición y de la cual surgen estas propiedades como deducciones lógicas. Se verá a continuación cómo mediante este proceso se puede llegar a la definición de logaritmo.

Una de las propiedades que se desea que tenga el logaritmo es que el logaritmo de un producto sea igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los factores. Esta propiedad se considerará en sí misma y se verá a dónde se puede llegar a partir de ella. Si se supone el logaritmo como una función f, se desea que esta función tenga la propiedad expresada por la fórmula

(6.4) $$f(xy) = f(x) + f(y)$$

donde x, y, xy pertenecen al dominio de la función f.

Una ecuación tal como (6.4) que expresa una relación entre los valores de una función en dos o más puntos, se denomina una *ecuación funcional*. Muchos problemas matemáticos se reducen a resolver una ecuación funcional en la que una solución es una función que la satisfaga. Ordinariamente una ecuación de esta clase tiene muchas soluciones distintas y en general es muy difícil encontrarlas todas. Es más fácil buscar sólo aquellas soluciones que tienen alguna otra propiedad, tal como continuidad o diferenciabilidad, y generalmente éstas son las únicas soluciones que interesan. Este criterio es el que se adoptará en la resolución de (6.4) buscándose solamente las soluciones diferenciables. Sin embargo es interesante ver qué consecuencias se pueden deducir de (6.4) sin imponer a f ninguna otra restricción.

Una solución de (6.4) es la función que es cero en todo el eje real; y además, es la única solución de (6.4) que está definida para todos los números reales. En efecto: sea f una función que satisfaga (6.4), si 0 pertenece al dominio de f se puede poner $y = 0$ en (6.4) obteniéndose $f(0) = f(x) + f(0)$ lo que implica que $f(x) = 0$ para cada x en el dominio de f. Dicho de otra forma, si 0 pertenece al dominio de f, f ha de ser idénticamente nula. Por tanto, una solución de (6.4) no idénticamente nula no puede estar definida en 0.

Si f es una solución de (6.4) y el dominio de f contiene el punto 1, se puede poner $x = y = 1$ en (6.4) y se obtiene $f(1) = 2f(1)$, de donde

$$f(1) = 0 .$$

Si ambos 1 y -1 pertenecen al dominio de f se puede tomar $x = -1$ e $y = -1$ de donde se deduce $f(1) = 2f(-1)$ es decir $f(-1) = 0$. Si ahora, x, $-x$, 1 y -1 pertenecen al dominio de f, se puede poner $y = -1$ en (6.4) obteniéndose $f(-x) = f(-1) + f(x)$, y puesto que $f(-1) = 0$ se tiene

$$f(-x) = f(x) .$$

es decir, toda solución de (6.4) es necesariamente una función *par*.

Supóngase ahora, que f tiene una derivada $f'(x)$ en cada $x \neq 0$. Dejando y fijo en (6.4) y derivando respecto a x (aplicando en el primer miembro la regla de la cadena) se tiene:

$$yf'(xy) = f'(x) .$$

Si $x = 1$, de esta ecuación se deduce $yf'(y) = f'(1)$ y, por tanto, se tiene:

$$f'(y) = \frac{f'(1)}{y} \quad \text{para cada} \quad y \neq 0 .$$

En esta ecuación se ve que la derivada f' es monótona y por tanto integrable en cada intervalo cerrado que no contenga el origen. Además, f' es continua en cada uno de estos intervalos y se puede aplicar el segundo teorema fundamental del Cálculo escribiendo

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\, dt = f'(1) \int_c^x \frac{1}{t}\, dt\,.$$

Si $x > 0$, esta ecuación es válida para cada positivo $c > 0$, y si es $x < 0$ es válida para cada c negativo. Puesto que $f(1) = 0$, eligiendo $c = 1$ se tiene

$$f(x) = f'(1) \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{si} \qquad x > 0\,.$$

Si x es negativa, $-x$ es positiva y puesto que $f(x) = f(-x)$ se tiene:

$$f(x) = f'(1) \int_1^{-x} \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{si} \qquad x < 0\,.$$

Estas dos fórmulas para $f(x)$ pueden reunirse en una que es válida tanto si x es positiva como negativa, a saber:

(6.5) $$f(x) = f'(1) \int_1^{|x|} \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{si} \quad x \neq 0\,.$$

En consecuencia, si existe una solución de (6.4) que tiene una derivada en cada punto $x \neq 0$ esta solución ha de venir dada necesariamente por la fórmula integral de (6.5). Si $f'(1) = 0$, entonces (6.5) implica que $f(x) = 0$ para cada $x \neq 0$ y esta solución coincide con la idénticamente nula. Por tanto, si f no es idénticamente nula ha de ser $f'(1) \neq 0$, en cuyo caso se pueden dividir ambos miembros de (6.5) por $f'(1)$ obteniéndose

(6.6) $$g(x) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{si} \quad x \neq 0\,,$$

donde $g(x) = f(x)/f'(1)$. La función g es también una solución de (6.4), puesto que si f es solución también lo es cf. Esto demuestra que si (6.4) tiene una solución que no es la idénticamente nula, y si esta función es derivable en todos los puntos, excepto en el origen, entonces la función g dada por (6.6) es una solución, y *todas* las soluciones pueden obtenerse de ésta multiplicando g por una constante conveniente.

Se ha de observar que este razonamiento no demuestra todavía que la función g de (6.6) *sea* una solución, puesto que se ha deducido (6.6) en la hipótesis de que existía por lo menos una solución no idénticamente nula. La fórmula (6.6) sugiere un camino para construir una tal solución, que se obtiene operando en sentido contrario. Es decir, mediante (6.6) se define la función g y luego se comprueba que esta función satisface (6.4). Este razonamiento induciría a tomar como definición de logaritmo, la función g dada en (6.6), y entonces dos números distintos tendrían un mismo logaritmo, puesto que la función g tendría la propiedad: $g(x) = g(-x)$. En atención a consideraciones que posteriormente se harán, es preferible definir el logaritmo de manera que dos números distintos no tengan el mismo logaritmo, lo cual se logra definiendo el logaritmo sólo para los números positivos. Por tanto, se tomará la siguiente definición.

6.3 Definición de logaritmo. Propiedades fundamentales

DEFINICIÓN. *Si x es un número real positivo, definimos el logaritmo natural de x, designado provisionalmente por $L(x)$, como la integral*

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,. \tag{6.7}$$

Cuando $x > 1$, $L(x)$ puede interpretarse geométricamente como el área de la región sombreada de la figura 6.1.

TEOREMA 6.1. *La función logaritmo tiene las propiedades siguientes:*

a) $L(1) = 0.$

b) $L'(x) = \dfrac{1}{x}$ *para todo* $x > 0.$

c) $L(ab) = L(a) + L(b)$ *para todo* $a > 0, b > 0.$

Demostración. La parte a) se deduce inmediatamente de la definición. Para demostrar b), observemos simplemente que L es una integral indefinida de una función continua y apliquemos el primer teorema fundamental del Cálculo. La propiedad c) es consecuencia de la propiedad aditiva de la integral. Escribamos

$$L(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = L(a) + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}\,.$$

En la última integral hemos hecho la sustitución $u = t/a$, $du = dt/a$, y encontramos que la integral se reduce a $L(b)$, lo que demuestra c).

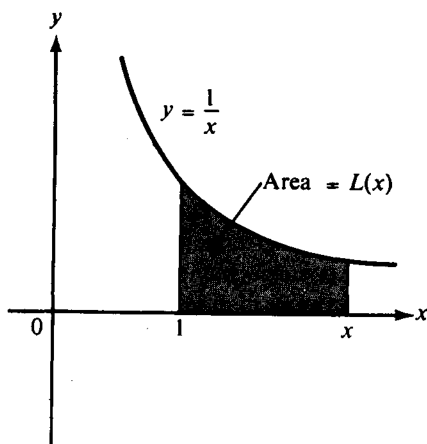


FIGURA 6.1 *Interpretación del logaritmo como un área.*

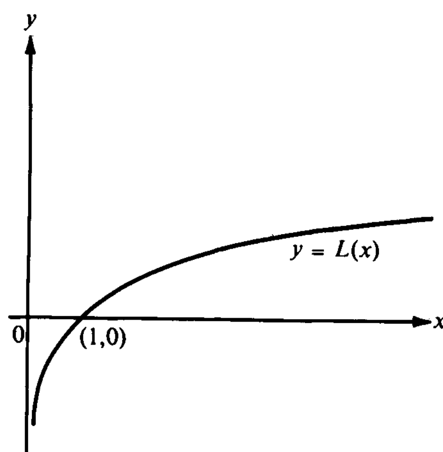


FIGURA 6.2 *Gráfica del logaritmo natural.*

6.4 Gráfica del logaritmo natural

La gráfica de la función logaritmo tiene el aspecto que se aprecia en la figura 6.2. Muchas propiedades de esta curva pueden obtenerse, sin efectuar ningún cálculo, simplemente refiriéndose a las propiedades del teorema 6.1. Por ejemplo, a partir de b) vemos que L tiene derivada positiva siempre de modo que es estrictamente creciente en todo intervalo. Puesto que $L(1) = 0$, la gráfica está situada por encima del eje x si $x > 1$ y por debajo si $0 < x < 1$. La curva tiene pendiente 1 cuando $x = 1$. Para $x > 1$, la pendiente decrece gradualmente hacia cero cuando x crece indefinidamente. Para valores pequeños de x, la pendiente es grande y, además, tiende hacia infinito cuando x decrece hacia cero. La derivada segunda es $L''(x) = -1/x^2$ que es negativa para todo x, por lo que L es una función cóncava.

6.5 Consecuencias de la ecuación funcional $L(ab) = L(a) + L(b)$

Como la gráfica del logaritmo va ascendiendo cuando x tiende a infinito, se puede sospechar que los valores de L no tienen cota superior. En efecto, la función no está acotada superiormente; esto es, para todo número positivo M (por grande que sea) existen valores de x tales que

$$L(x) > M. \tag{6.8}$$

Esto podemos deducirlo de la ecuación funcional. Cuando $a = b$, tenemos $L(a^2) = 2L(a)$. Utilizando la ecuación funcional una vez más poniendo $b = a^2$, obtenemos $L(a^3) = 3L(a)$. Por inducción encontramos la fórmula general

$$L(a^n) = nL(a)$$

para cualquier entero $n \geq 1$. Cuando $a = 2$, se obtiene $L(2^n) = nL(2)$, y por tanto resulta

(6.9) $$L(2^n) > M \quad \text{cuando} \quad n > \frac{M}{L(2)}$$

Esto demuestra la afirmación (6.8). Tomando $b = 1/a$ en la ecuación funcional, encontramos $L(1/a) = -L(a)$. En particular, cuando $a = 2^n$, habiendo elegido n como en (6,9), se tiene

$$L\left(\frac{1}{2^n}\right) = -L(2^n) < -M\,,$$

lo que indica que tampoco existe cota inferior para los valores de la función.

Finalmente observamos que la gráfica corta a cada recta horizontal sólo una vez. Es decir, dado un número real *arbitrario* b (positivo, negativo o nulo), existe *uno y sólo un* $a > 0$ tal que

(6.10) $$L(a) = b\,.$$

Para demostrarlo se puede razonar como sigue: Si $b > 0$, elegimos un entero cualquiera $n > b/L(2)$. Entonces, en virtud de (6.9), $L(2^n) > b$. Seguidamente examinamos la función L en el intervalo cerrado $[1, 2^n]$. Su valor en el extremo izquierdo es $L(1) = 0$, y en el extremo derecho es $L(2^n)$. Puesto que $0 < b < L(2^n)$, el teorema del valor intermedio para funciones continuas (teorema 3.8 de la Sección 3.10) asegura la existencia por lo menos de un a tal que $L(a) = b$. No puede existir otro valor a' tal que $L(a') = b$ porque esto significaría $L(a) = L(a')$ para $a \neq a'$, y esto contradice la propiedad de crecimiento del logaritmo. Por consiguiente la proposición (6.10) ha sido demostrada para $b > 0$. La demostración para b negativo es consecuencia de ésa si utilizamos la igualdad $L(1/a) = -L(a)$. Es decir, hemos demostrado el siguiente

TEOREMA 6.2. *Para cada número real b existe exactamente un número real positivo x cuyo logaritmo, $L(a)$, es igual a b.*

En particular, existe un único número cuyo logaritmo natural es igual a 1. Este número, al igual que π, se encuentra tan repetidamente en fórmulas mate-

máticas que es inevitable el adoptar para él un símbolo especial. Leonardo Euler (1707-1783), parece que fue el primero que reconoció la importancia de este número y modestamente lo designó por e, notación que en seguida se hizo usual.

DEFINICIÓN. *Designamos por e el número para el que*

$$L(e) = 1 . \tag{6.11}$$

En el capítulo 7 obtendremos fórmulas explícitas que permiten calcular la expresión decimal de e con el grado de aproximación que se desee. Su valor correcto con diez cifras decimales es 2,7182818285. Asimismo en el capítulo 7 se demostrará que e es irracional.

Los logaritmos naturales se denominan también *logaritmos neperianos* en honor a su inventor, Juan Neper (1550-1617). Es frecuente en la práctica utilizar los símbolos $\ln x$ o $\log x$ en vez de $L(x)$ para designar el logaritmo de x.

6.6 Logaritmos referidos a una base positiva $b \neq 1$

En la Sección 6.2 se ha visto que la función f más general derivable en el eje real, que satisface la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$ está dada por la fórmula:

$$f(x) = c \log x , \tag{6.12}$$

donde c es una constante. Para cada c esta $f(x)$ se denominará el logaritmo de x asociado a c, y como es evidente, su valor no será necesariamente el mismo que el logaritmo natural de x. Si $c = 0$, f es idénticamente nulo y este caso carece de interés. Si $c \neq 0$ se indicará de otra forma la dependencia de f y c introduciendo el concepto de *base* de logaritmos.

De (6.12) se deduce que cuando $c \neq 0$ existe un número real único $b > 0$ tal que $f(b) = 1$. Esta b está relacionada con c por medio de la igualdad $c \log b = 1$; como $b \neq 1$ es $c = 1/\log b$, y (6.12) se expresa en la forma

$$f(x) = \frac{\log x}{\log b} .$$

Para esta elección de c se dice que $f(x)$ es el *logaritmo de x en base b* y se escribe $\log_b x$ en vez de $f(x)$.

DEFINICIÓN. *Si $b > 0$, $b \neq 1$, y si $x > 0$, el logaritmo de x en base b es el número*

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b},$$

donde los logaritmos del segundo miembro son logaritmos naturales.

Obsérvese que $\log_b b = 1$. Si $b = e$ se tiene $\log_e x = \log x$, es decir, los logaritmos naturales son los que tienen de base e. Puesto que los logaritmos de base e son los más frecuentemente usados en Matemática, la palabra logaritmo indica casi siempre el logaritmo *natural.* Más tarde, en la Sección 6.15 se definirá b^u de tal manera que la ecuación $b^u = x$ significará exactamente lo mismo que la $u = \log_b x$.

Puesto que los logaritmos de base b se obtienen de los logaritmos naturales multiplicando por la constante $1/\log b$, la gráfica de la ecuación $y = \log_b x$ se puede obtener de la de $y = \log x$ multiplicando todas sus ordenadas por un mismo factor. Si $b > 1$ este factor es positivo y si $b < 1$ es negativo. En la

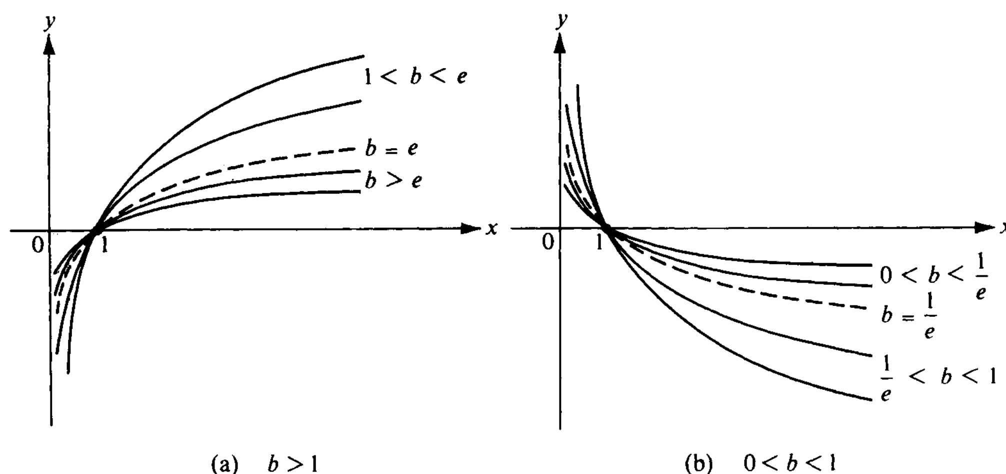


FIGURA 6.3 *Gráfica de $y = \log_b x$ para varios valores de b.*

figura 6.3(a) se ven ejemplos con $b > 1$. Si $b < 1$ se observa que $1/b > 1$ y $\log b = -\log(1/b)$, de manera que la gráfica de $y = \log_b x$ se puede obtener de la de $y = \log_{1/b} x$ por simetría respecto al eje x. Los ejemplos de la figura 6.3(b) se han obtenido de esta forma a partir de los de la figura 6.3(a).

6.7 Fórmulas de derivación e integración en las que intervienen logaritmos

Puesto que la derivada del logaritmo viene dada por la fórmula $D \log x = 1/x$ para $x > 0$, se tiene la fórmula de integración

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x + C .$$

Aún más general, si $u = f(x)$, siendo f una función con derivada continua, se tiene

$$(6.13) \qquad \int \frac{du}{u} = \log u + C \qquad \text{o} \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log f(x) + C .$$

Hay que tener cuidado al utilizar (6.13) ya que el logaritmo no está definido para números negativos. Por tanto, las fórmulas de integración (6.13) son válidas tan sólo si u, o $f(x)$ es positiva.

Afortunadamente, es fácil extender el campo de validez de estas fórmulas de manera que pueden aplicarse para funciones que sean positivas o negativas (pero *no cero*). Se introduce simplemente una nueva función L_0 definida para todos los números reales $x \neq 0$ por la ecuación:

$$(6.14) \qquad L_0(x) = \log |x| = \int_1^{|x|} \frac{1}{t}\, dt ,$$

definición sugerida por la ecuación (6.6) de la Sección 6.2. La gráfica de L_0 es simétrica respecto al eje y tal como se ve en la figura 6.4. La parte a la derecha del eje y es exactamente la misma que la curva logarítmica de la figura 6.2.

Puesto que $\log |xy| = \log (|x|\,|y|) = \log |x| + \log |y|$, la función L_0 satisface también la ecuación funcional básica (6.4); es decir, se tiene:

$$L_0(xy) = L_0(x) + L_0(y)$$

para x e y reales cualesquiera distintos de cero. Para $x > 0$ se tiene $L_0'(x) = 1/x$ ya que $L_0(x)$ para x positivo es lo mismo que $\log x$. La fórmula de la derivada vale también para $x < 0$ puesto que en este caso $L_0(x) = L(-x)$ y por tanto $L_0(x) = -L'(-x) = -1/(-x) = 1/x$. De aquí resulta

$$(6.15) \qquad L_0'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{para todo valor real } x \neq 0 .$$

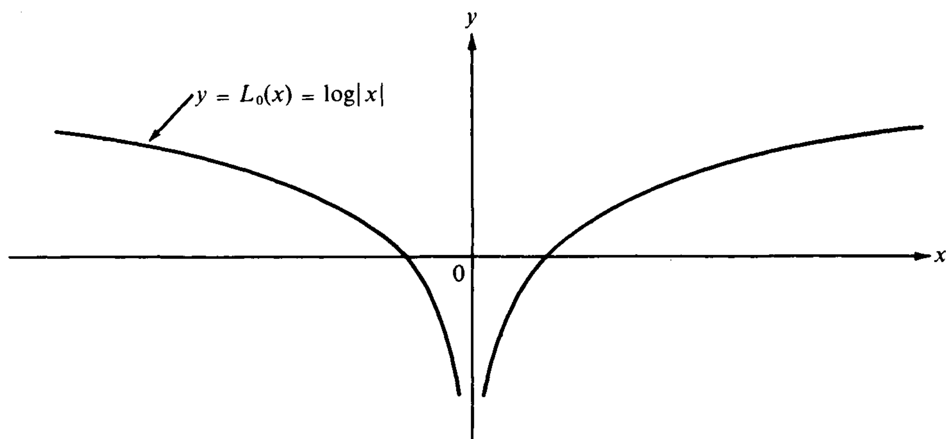


FIGURA 6.4 *Gráfica de la función* L_0.

Por tanto, si en las fórmulas de integración precedentes se pone L_0 en vez de L, se puede extender su alcance a funciones que toman valores tanto negativos como positivos. Por ejemplo (6.13) se puede generalizar como sigue:

(6.16) $$\int \frac{du}{u} = \log |u| + C\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log |f(x)| + C\,.$$

Evidentemente, cuando se aplique (6.16) junto con el segundo teorema fundamental del Cálculo para calcular una integral indefinida no se pueden tomar intervalos que incluyan puntos en los que u o $f(x)$ sean cero.

EJEMPLO 1. Integrar $\int \tan x\,dx$.

Solución. La integral tiene la forma $-\int du/u$, siendo $u = \cos x$, $du =$ $= -\operatorname{sen} x\,dx$. Por consiguiente se tiene

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\log |u| + C = -\log |\cos x| + C\,,$$

fórmula que es válida en cualquier intervalo en el que $\cos x \neq 0$.

Los dos ejemplos que siguen son aplicación del método de integración por partes.

EJEMPLO 2. Integrar $\int \log x\,dx$.

Solución. Sea $u = \log x$, $dv = dx$. Entonces $du = dx/x$, $v = x$, y obtenemos

$$\int \log x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + C .$$

EJEMPLO 3. Integrar $\int \operatorname{sen} (\log x) \, dx$.

Solución. Sea $u = \operatorname{sen} (\log x)$, $v = x$. Entonces $du = \cos (\log x)(1/x) \, dx$, y encontramos

$$\int \operatorname{sen} (\log x) \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \operatorname{sen} (\log x) - \int \cos (\log x) \, dx .$$

En la última integral integramos por partes una vez más, obteniendo

$$\int \cos (\log x) \, dx = x \cos (\log x) + \int \operatorname{sen} (\log x) \, dx .$$

Combinando ésta con la igualdad anterior, encontramos que

$$\int \operatorname{sen} (\log x) \, dx = \tfrac{1}{2} x \operatorname{sen} (\log x) - \tfrac{1}{2} x \cos (\log x) + C ,$$

y

$$\int \cos (\log x) \, dx = \tfrac{1}{2} x \operatorname{sen} (\log x) + \tfrac{1}{2} x \cos (\log x) + C .$$

6.8 Derivación logarítmica

Ahora se expondrá una técnica conocida por *derivación logarítmica* que a menudo es un auxiliar poderoso en el cálculo de derivadas. El método fue desarrollado en 1697 por Johann Bernoulli (1667-1748) y su fundamento es una hábil aplicación de la regla de la cadena.

Supóngase que se forma la función compuesta de L_0 con una función derivable cualquiera $f(x)$; es decir,

$$g(x) = L_0[f(x)] = \log |f(x)|$$

para todo x tal que $f(x) \neq 0$. La regla de la cadena aplicada junto con (6.15) conduce a la fórmula

(6.17) $$g'(x) = L_0'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} .$$

Si la derivada $g'(x)$ se puede calcular de alguna otra forma, entonces se puede obtener $f'(x)$ a partir de (6.17) sin más que multiplicar $g'(x)$ por $f(x)$. Este método es útil en la práctica porque muchas veces $g'(x)$ es más fácil de calcular que $f'(x)$. En particular, esto es cierto cuando f es el producto o cociente de varias funciones simples. El ejemplo que sigue es típico.

EJEMPLO. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = x^2 \cos x\,(1 + x^4)^{-7}$.

Solución. Se toma el logaritmo del valor absoluto de $f(x)$ y luego se deriva. Sea pues

$$g(x) = \log|f(x)| = \log x^2 + \log|\cos x| + \log(1 + x^4)^{-7} =$$
$$= 2\log|x| + \log|\cos x| - 7\log(1 + x^4).$$

Derivando se tiene:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{28x^3}{1 + x^4}.$$

Multiplicando por $f(x)$ se obtiene:

$$f'(x) = \frac{2x\cos x}{(1 + x^4)^7} - \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^7} - \frac{28x^5\cos x}{(1 + x^4)^8}.$$

6.9 Ejercicios

1. a) Hallar todos los valores de c tales que $\log x = c + \int_e^x t^{-1}\,dt$ para todo $x > 0$.
   b) Sea $f(x) = \log[(1 + x)/(1 - x)]$ si $x > 0$. Si a y b son números dados, siendo $ab \neq -1$, hallar todos los x tales que $f(x) = f(a) + f(b)$.
2. En cada caso, hallar un x real que satisfaga la igualdad dada.
   (a) $\log(1 + x) = \log(1 - x)$.
   (b) $\log(1 + x) = 1 + \log(1 - x)$.
   (c) $2\log x = x\log 2$, $x \neq 2$.
   (d) $\log(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}) = 1$.
3. Sea $f(x) = (\log x)/x$ si $x > 0$. Describir los intervalos en los que f es creciente, decreciente, convexa y cóncava. Esbozar la gráfica de f.

En los Ejercicios 4 al 15, hallar la derivada $f'(x)$. En cada caso, la función f se supone definida para todo x real para los que la fórmula dada para $f(x)$ tiene sentido.

4. $f(x) = \log(1 + x^2)$.
5. $f(x) = \log\sqrt{1 + x^2}$.
6. $f(x) = \log\sqrt{4 - x^2}$.
7. $f(x) = \log(\log x)$.
8. $f(x) = \log(x^2\log x)$.
9. $f(x) = \frac{1}{4}\log\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

10. $f(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})^n$
11. $f(x) = \sqrt{x + 1} - \log(1 + \sqrt{x + 1})$.
12. $f(x) = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$.
13. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \log \dfrac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$.
14. $f(x) = x[\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)]$.
15. $f(x) = \log_x e$.

En los Ejercicios 16 al 26, calcular las integrales.

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 3x}$.
17. $\int \log^2 x\, dx$.
18. $\int x \log x\, dx$.
19. $\int x \log^2 x\, dx$.
20. $\displaystyle\int_0^{e^3-1} \frac{dt}{1 + t}$.
21. $\int \cot x\, dx$.
22. $\int x^n \log(ax)\, dx$.
23. $\int x^2 \log^2 x\, dx$.
24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \log x}$.
25. $\displaystyle\int_0^{1-e^{-2}} \frac{\log(1 - t)}{1 - t}\, dt$.
26. $\displaystyle\int \frac{\log |x|}{x\sqrt{1 + \log |x|}}\, dx$.

27. Deducir la fórmula recurrente

$$\int x^m \log^n x\, dx = \frac{x^{m+1} \log^n x}{m + 1} - \frac{n}{m + 1} \int x^m \log^{n-1} x\, dx$$

y utilizarla para integrar $\int x^3 \log^3 x\, dx$.

28. a) Si $x > 0$, sea $f(x) = x - 1 - \log x$, $g(x) = \log x - 1 + 1/x$. Examinar los signos de f' y g' para demostrar que las desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

son válidas para $x > 0$, $x \neq 1$. Cuando $x = 1$, se convierten en igualdades.
b) Trazar las gráficas de las funciones A y B definidas por las igualdades $A(x) = x - 1$ y $B(x) = 1 - 1/x$ para $x > 0$, e interpretar geométricamente las desigualdades de la parte a).

29. Demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$$

con los dos métodos siguientes: a) utilizando la definición de la derivada $L'(1)$; b) usando el resultado del Ejercicio 28.

30. Si $a > 0$, hacer uso de la ecuación funcional para demostrar que $\log(a^r) = r \log a$ para todo número racional r.

31. Sea $P = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una partición del intervalo $[1, x]$ donde $x > 1$.
(a) Integrando funciones escalonadas que son constantes en los subintervalos abiertos de P deducir las siguientes desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k}\right) < \log x < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}}\right).$$

(b) Interpretar geométricamente mediante áreas las desigualdades de (a).
(c) Especializar la partición para demostrar que, para cada entero $n > 1$ es:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

32. Demostrar las siguientes fórmulas de cambios de base de logaritmos.

(a) $\log_b x = \log_b a \log_a x$; (b) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

33. Sabiendo que $\log_e 10 = 2{,}302585$, con seis cifras decimales exactas, calcular $\log_{10} e$ aplicando una de las fórmulas del Ejercicio 32. ¿Cuántas cifras decimales exactas se puede asegurar que se han obtenido en el resultado?
Nota: Una tabla calculada con seis cifras decimales da el valor $\log_{10} e = 0{,}434294$.
34. Una función f, continua en el eje real positivo, tiene la propiedad de que cualesquiera que sean $x > 0$ e $y > 0$, la integral

$$\int_x^{xy} f(t)\, dt$$

es independiente de x (y por tanto depende sólo de y). Si $f(2) = 2$, calcular el valor de la integral $A(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ para todo $x > 0$.
35. Una función f, continua en el eje real positivo, tiene la propiedad de que

$$\int_1^{xy} f(t)\, dt = y\int_1^{x} f(t)\, dt + x\int_1^{y} f(t)\, dt$$

para todo $x > 0$ y todo $y > 0$. Si $f(1) = 3$, calcular $f(x)$ para cada $x > 0$.
36. La base de un sólido es el conjunto de ordenadas de una función f continua en el intervalo $[1, a]$. Todas las secciones perpendiculares al intervalo $[1, a]$ son cuadrados. El volumen del sólido es $\frac{1}{3}a^3 \log^2 a - \frac{2}{9}a^3 \log a + \frac{2}{27}a^3 - \frac{2}{27}$ para todo $a \geq 1$. Calcular $f(a)$.

6.10 Polinomios de aproximación para el logaritmo

En esta Sección demostraremos que la función logaritmo puede aproximarse por ciertos polinomios que pueden usarse para calcular logaritmos con el grado de aproximación que se desee.

Para simplificar las fórmulas resultantes, primero reemplazamos x por $1 - x$ en la integral que define el logaritmo para obtener

$$\log(1 - x) = \int_1^{1-x} \frac{dt}{t},$$

válida si $x < 1$. El cambio de variable $t = 1 - u$ transforma aquella igualdad en la siguiente

$$-\log(1 - x) = \int_0^x \frac{du}{1 - u}, \quad \text{válida para } x < 1.$$

Seguidamente aproximamos el integrando $1/(1 - u)$ para polinomios que luego integramos para obtener las correspondientes aproximaciones para el logaritmo. Como primer ejemplo mostramos una sencilla aproximación lineal para el integrando.

A partir de la identidad algebraica $1 - u^2 = (1 - u)(1 + u)$, obtenemos la fórmula

(6.18) $$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + \frac{u^2}{1 - u},$$

válida para cualquier real $u \neq 1$. Integrando ésta entre 0 y x, siendo $x < 1$, tenemos

(6.19) $$-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{u^2}{1 - u} du.$$

La gráfica del polinomio cuadrático $P(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ que aparece en el segundo miembro de (6.19) está representada en la figura 6.5 junto con la curva $y = -\log(1 - x)$. Obsérvese que para x próximo a cero el polinomio $P(x)$ es una buena aproximación de $-\log(1 - x)$. En el teorema que sigue, utilizamos un polinomio de grado $n - 1$ para aproximar $1/(1 - u)$, y con ello obtener un polinomio de grado n que aproxime $\log(1 - x)$.

TEOREMA 6.3. *Sea P_n el polinomio de grado n dado por*

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

Entonces, para todo $x < 1$ y todo $n \geq 1$, se tiene

(6.20) $$-\log(1 - x) = P_n(x) + \int_0^x \frac{u^n}{1 - u} du.$$

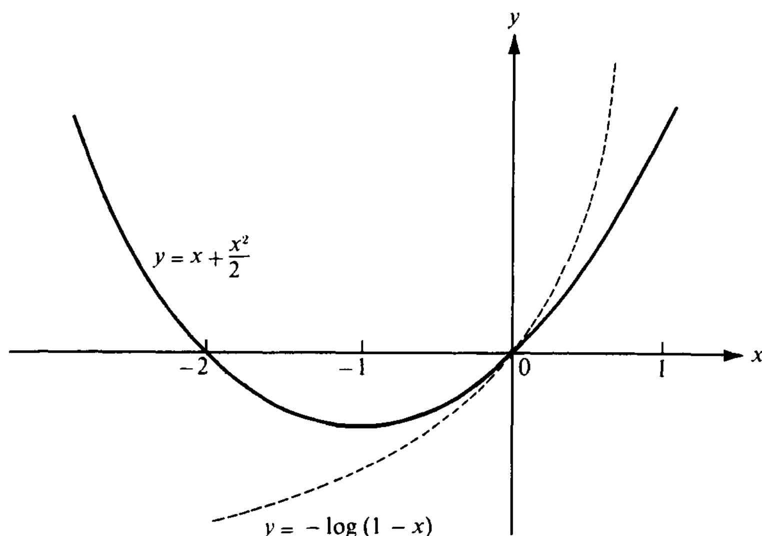


FIGURA 6.5 *Polinomio cuadrático de aproximación para la curva* $y = -\log(1 - x)$.

Demostración. A partir de la identidad algebraica

$$1 - u^n = (1 - u)(1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}),$$

obtenemos la fórmula

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} + \frac{u^n}{1 - u},$$

válida para $u \neq 1$. Integrándola entre 0 y x, siendo $x < 1$, obtenemos (6.20).

Podemos poner (6.20) en la forma

$$(6.21) \qquad -\log(1 - x) = P_n(x) + E_n(x),$$

siendo $E_n(x)$ la integral,

$$E_n(x) = \int_0^x \frac{u^n}{1 - u}\, du\,.$$

El valor de $E_n(x)$ representa el error cometido al aproximar $-\log(1 - x)$ con el polinomio $P_n(x)$. Para utilizar (6.21) en los cálculos, necesitamos conocer si el

error es positivo o negativo y lo grande que puede ser. El próximo teorema nos dice que para valores de x pequeños y positivos el error $E_n(x)$ es positivo, pero para x negativa el error tiene el mismo signo que $(-1)^{n+1}$, siendo n el grado del polinomio de aproximación. El teorema también proporciona cotas superior e inferior del error.

TEOREMA 6.4. *Si* $0 < x < 1$, *tenemos las desigualdades*

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \le E_n(x) \le \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{6.22}$$

Si $x < 0$, *el error* $E_n(x)$ *tiene el mismo signo que* $(-1)^{n+1}$, *y se tiene*

$$0 < (-1)^{n+1}E_n(x) \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1}. \tag{6.23}$$

Demostración. Supongamos que $0 < x < 1$. En la integral que define $E_n(x)$ tenemos $0 \le u \le x$, con lo que $1 - x \le 1 - u \le 1$, y por tanto el integrando satisface las desigualdades

$$u^n \le \frac{u^n}{1-u} \le \frac{u^n}{1-x}.$$

Integrando estas desigualdades, obtenemos (6.22).

Para demostrar (6.23), supongamos $x < 0$ y sea $t = -x = |x|$. De este modo $t > 0$ y tenemos

$$E_n(x) = E_n(-t) = \int_0^{-t} \frac{u^n}{1-u}\,du = -\int_0^t \frac{(-v)^n}{1+v}\,dv = (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{v^n}{1+v}\,dv.$$

Esto demuestra que $E_n(x)$ tiene el mismo signo que $(-1)^{n+1}$. Asimismo, tenemos

$$(-1)^{n+1}E_n(x) = \int_0^t \frac{v^n}{1+v}\,dv \le \int_0^t v^n\,dv = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

lo cual completa la demostración de (6.23).

El teorema que sigue nos da una fórmula muy útil para los cálculos con logaritmos.

TEOREMA 6.5. *Si* $0 < x < 1$ *y si* $m \ge 1$, *se tiene*

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right) + R_m(x),$$

en donde el término de error, $R_m(x)$, *satisface las desigualdades*

$$\frac{x^{2m+1}}{2m+1} < R_m(x) \leq \frac{2-x}{1-x}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}. \tag{6.24}$$

Demostración. La igualdad (6.21) es válida para cualquier x real tal que $x < 1$. Si reemplazamos x por $-x$ en (6.21), manteniendo $x > -1$, obtenemos la fórmula

$$-\log(1+x) = P_n(-x) + E_n(-x). \tag{6.25}$$

Si $-1 < x < 1$, son válidas (6.21) y (6.25). Restando (6.25) de (6.21), encontramos

$$\log\frac{1+x}{1-x} = P_n(x) - P_n(-x) + E_n(x) - E_n(-x). \tag{6.26}$$

En la diferencia $P_n(x) - P_n(-x)$, las potencias pares de x desaparecen y las potencias impares se duplican. Por consiguiente, si n es par, por ejemplo $n = 2m$, tenemos

$$P_{2m}(x) - P_{2m}(-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right),$$

y la igualdad (6.26) se transforma en

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right) + R_m(x),$$

en donde $R_m(x) = E_{2m}(x) - E_{2m}(-x)$. Esta fórmula es válida si x está en el intervalo abierto $-1 < x < 1$. Mantengamos ahora x en el intervalo $0 < x < 1$. Entonces la estimación del teorema 6.4 nos da

$$\frac{x^{2m+1}}{2m+1} \leq E_{2m}(x) \leq \frac{1}{1-x}\frac{x^{2m+1}}{2m+1} \qquad \text{y} \qquad 0 < -E_{2m}(-x) \leq \frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos las (6.24), ya que $1 + 1/(1-x) = (2-x)/(1-x)$.

EJEMPLO. Tomando $m = 2$ y $x = \frac{1}{3}$, tenemos $(1 + x)/(1 - x) = 2$, y resulta la fórmula

$$\log 2 = 2(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{81}) + R_2(\tfrac{1}{3}), \qquad \text{donde} \qquad \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5 < R_2(\tfrac{1}{3}) \le \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3})^5 = \tfrac{1}{486}.$$

De aquí resultan las desigualdades $0{,}6921 < \log 2 < 0{,}6935$ con muy pocos cálculos.

6.11 Ejercicios

1. Utilizar el teorema 6.5 poniendo $x = \frac{1}{3}$ y $m = 5$ para calcular aproximaciones de $\log 2$. Conservar nueve cifras decimales en los cálculos y obtener las desigualdades $0{,}6931460 < \log 2 < 0{,}6931476$.
2. Si $x = \frac{1}{5}$, será $(1 + x)/(1 - x) = \frac{3}{2}$. Así pues, el teorema 6.5 nos permite calcular $\log 3$ en función de $\log 2$. Tomar $x = \frac{1}{5}$ y $m = 5$ en el teorema 6.5 y emplear los resultados del Ejercicio 1 para obtener las desigualdades $1{,}098611 < \log 3 < 1{,}098617$.
   Nota: Puesto que $\log 2 < \log e < \log 3$, resulta que $2 < e < 3$.
3. Usar el teorema 6.5 con $x = \frac{1}{9}$ para calcular $\log 5$ en función de $\log 2$. Elegir el grado del polinomio de aproximación lo bastante elevado para obtener las desigualdades $1{,}609435 < \log 5 < 1{,}609438$.
4. Aplicar el teorema 6.5 con $x = \frac{1}{6}$ para calcular $\log 7$ en función de $\log 5$. Elegir el grado del polinomio de aproximación lo bastante elevado para obtener las desigualdades $1{,}945907 < \log 7 < 1{,}945911$.
5. Con los resultados de los Ejercicios 1 al 4 calcular una pequeña tabla en la que aparezcan $\log n$ para $n = 2, 3, \ldots, 10$. Utilizar tantas cifras decimales *correctas* cuantas sea posible a partir de las desigualdades de los Ejercicios del 1 al 4.

6.12 La función exponencial

El teorema 6.2 demuestra que para todo x real existe uno y un solo y tal que $L(y) = x$. Por consiguiente podemos aplicar el proceso de inversión para definir y como función de x. La función inversa resultante se denomina *función exponencial,* o *antilogaritmo,* y se representa por E.

DEFINICIÓN. *Para cualquier x real, definimos $E(x)$ como aquel número y cuyo logaritmo es x. Esto es, $y = E(x)$ significa $L(y) = x$.*

El dominio de E es todo el eje real; su recorrido es el conjunto de números reales positivo. La gráfica de E, que se representa en la figura 6.6, se obtiene de la gráfica del logaritmo mediante una simetría respecto a la recta $y = x$. Puesto

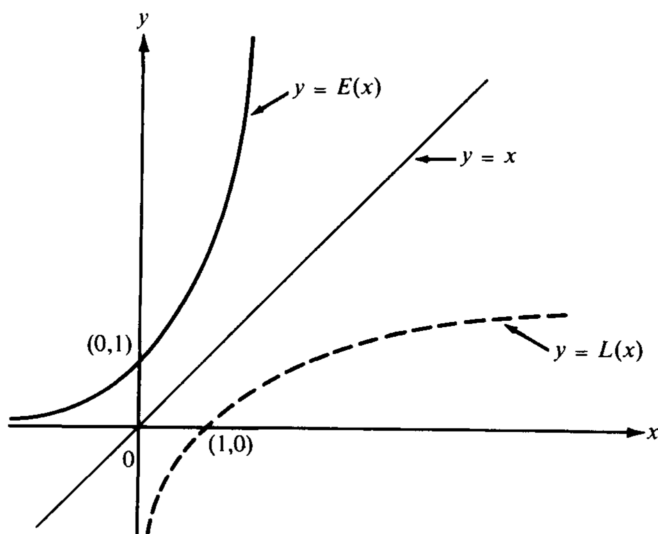


FIGURA 6.6 *La gráfica de la función exponencial se obtiene de la del logaritmo por una simetría respecto a la recta* $y = x$.

que L y E son inversas una de otra, se tiene

$$L[E(x)] = x \quad \text{para todo } x \qquad \text{y} \qquad E[L(y)] = y \qquad \text{para todo } y > 0 .$$

Cada propiedad del logaritmo puede traducirse en una propiedad de la exponencial. Por ejemplo, puesto que el logaritmo es estrictamente creciente y continuo en el eje real positivo, se deduce del teorema 3.10 que la exponencial es estrictamente creciente y continua en todo el eje real. La réplica del teorema 6.1 es el siguiente

TEOREMA 6.6. *La función exponencial tiene las propiedades siguientes:*

a) $E(0) = 1, \qquad E(1) = e.$
b) $E'(x) = E(x)$ *para todo* x.
c) $E(a + b) = E(a)E(b)$ *para todo* a *y todo* b.

Demostración. La parte a) se deduce de las igualdades $L(1) = 0$ y $L(e) = 1$. Seguidamente demostramos c), que es la ecuación funcional para la exponencial. Supongamos que a y b son dadas y pongamos

$$x = E(a), \qquad y = E(b), \qquad c = L(xy).$$

Tenemos entonces

$$L(x) = a\,, \qquad L(y) = b\,, \qquad E(c) = xy\,.$$

Pero $c = L(xy) = L(x) + L(y) = a + b$. Esto es, $c = a + b$. Por tanto, $E(c) = E(a + b)$. Por otra parte, $E(c) = xy = E(a)E(b)$, de modo que $E(a + b) = E(a)E(b)$, lo que demuestra c).

La aplicación de la ecuación funcional nos ayuda a demostrar b). El cociente de diferencias para la derivada $E'(x)$ es

$$\frac{E(x + h) - E(x)}{h} = \frac{E(x)E(h) - E(x)}{h} = E(x)\,\frac{E(h) - 1}{h}\,.$$

Por lo tanto, para probar b) hay que demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = 1\,. \tag{6.27}$$

Expresaremos el cociente (6.27) en función del logaritmo. Pongamos $k = E(h) - 1$. Entonces $k + 1 = E(h)$ con lo que $L(k + 1) = h$ y el cociente es igual a

$$\frac{E(h) - 1}{h} = \frac{k}{L(k + 1)}\,. \tag{6.28}$$

Cuando $h \to 0$ es $E(h) \to 1$, pues la función exponencial es continua en 1. Puesto que $k = E(h) - 1$, tenemos $k \to 0$ cuando $h \to 0$. Pero

$$\frac{L(k + 1)}{k} = \frac{L(k + 1) - L(1)}{k} \to L'(1) = 1 \text{ cuando } k \to 0\,.$$

Teniendo en cuenta (6.28), esto demuestra (6.27) lo cual, a su vez, demuestra b)

6.13 Exponenciales expresadas como potencias de e

La ecuación funcional $E(a + b) = E(a)E(b)$ tiene muchas consecuencias interesantes. Por ejemplo, podemos utilizarla para demostrar que

$$E(r) = e^r \tag{6.29}$$

para todo número racional r.

Tomamos primero $b = -a$ en la ecuación funcional obteniendo

$$E(a)E(-a) = E(0) = 1\,,$$

y por tanto $E(-a) = 1/E(a)$ para todo a real. Tomando $b = a$, $b = 2a, \ldots$, $b = na$ en la ecuación funcional obtenemos, sucesivamente, $E(2a) = E(a)^2$, $E(3a) = E(a)^3$, y, en general,

(6.30) $$E(na) = E(a)^n$$

para todo n entero positivo. En particular, cuando $a = 1$, obtenemos

$$E(n) = e^n ,$$

mientras que para $a = 1/n$, se obtiene $E(1) = E(1/n)^n$. Puesto que $E(1/n) > 0$, ello implica

(6.31) $$E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{1/n} .$$

Por consiguiente, si ponemos $a = 1/m$ en (6.30) y aplicamos (6.31), encontramos

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = E\left(\frac{1}{m}\right)^n = e^{n/m}$$

para m y n enteros positivos cualesquiera. Dicho de otro modo, hemos demostrado (6.29) para cada número r racional positivo. Como $E(-r) = 1/E(r) = e^{-r}$, también es válida para todo r racional negativo.

6.14 Definición de e^x para x real cualquiera

En el apartado anterior se ha *probado* que $e^x = E(x)$ cuando x es un *racional* cualquiera. Ahora se *definirá* e^x para x irracional por

(6.32) $$e^x = E(x) \quad \text{para cada } x \text{ real.}$$

La máxima justificación que se puede dar de esta definición es que con ella la ley de los exponentes

(6.33) $$e^a e^b = e^{a+b}$$

es válida para todos los números reales a y b. Cuando se toma la definición (6.32), la demostración de (6.33) es trivial puesto que (6.33) no es más que la misma afirmación de la ecuación funcional.

La notación e^x para $E(x)$ es una de las comúnmente usadas para la exponencial. En alguna ocasión se escribe $\exp(x)$ en vez de e^x principalmente cuando

aparecen expresiones complicadas en el exponente. En este capítulo se seguirá utilizando algunas veces $E(x)$, pero más tarde se usará siempre e^x.

Se ha definido la función exponencial de manera que las dos ecuaciones

$$y = e^x \qquad \text{y} \qquad x = \log y$$

signifiquen exactamente lo mismo. En el próximo apartado se definirán potencias más generales de manera que las dos ecuaciones $y = a^x$ y $x = \log_a y$ sean equivalentes.

6.15 Definición de a^x para $a > 0$ y x real

Después de haber definido e^x para x real cualquiera, no hay ninguna dificultad para dar una definición de a^x para cada $a > 0$. Un método es definir a^x como el número y tal que $\log_a y = x$; claro que este método no sirve para $a = 1$ puesto que el logaritmo de base 1 no está definido. Otro modo es definir a^x por la fórmula:

(6.34) $$a^x = e^{x \log a} .$$

El segundo método es preferible, porque en primer lugar es válido para todo positivo a (incluido $a = 1$), y en segundo lugar porque con ello es más fácil probar las siguientes propiedades de exponenciales:

$$\log a^x = x \log a . \qquad (ab)^x = a^x b^x .$$

$$a^x a^y = a^{x+y} . \qquad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy} .$$

Si $a \neq 1$, *entonces* $y = a^x$ *si y sólo si* $x = \log_a y$.

Las demostraciones de estas propiedades se dejan como ejercicio al lector.

De la misma manera que la gráfica de la función exponencial se obtiene de la del logaritmo por simetría respecto a la recta $x = y$, la gráfica de $y = a^x$ se puede obtener de la de $y = \log_a x$ por simetría respecto a la misma recta; en la figura 6.7 se dan ejemplos de ello. Las curvas en las figuras 6.7 (a) y (b) se han obtenido de las de 6.3 (a) y (b) respectivamente por simetría. La gráfica correspondiente a $a = 1$ es naturalmente la horizontal $y = 1$.

6.16 Fórmulas de derivación e integración en las que intervienen exponenciales

Una de las propiedades más notables de la función exponencial es la fórmula

(6.35) $$E'(x) = E(x) .$$

que nos dice que esta función es su propia derivada. Si la aplicamos junto con la regla de la cadena, podemos obtener fórmulas de derivación para funciones exponenciales con base positiva a cualquiera.

Supongamos $f(x) = a^x$ para $x > 0$. Según la definición de a^x, podemos escribir

$$f(x) = e^{x \log a} = E(x \log a) ;$$

luego, en virtud de la regla de la cadena, encontramos

$$f'(x) = E'(x \log a) \cdot \log a = E(x \log a) \cdot \log a = a^x \log a . \tag{6.36}$$

Dicho de otro modo, la derivación de a^x multiplica simplemente a^x por el factor constante $\log a$, siendo este factor 1 cuando $a = e$.

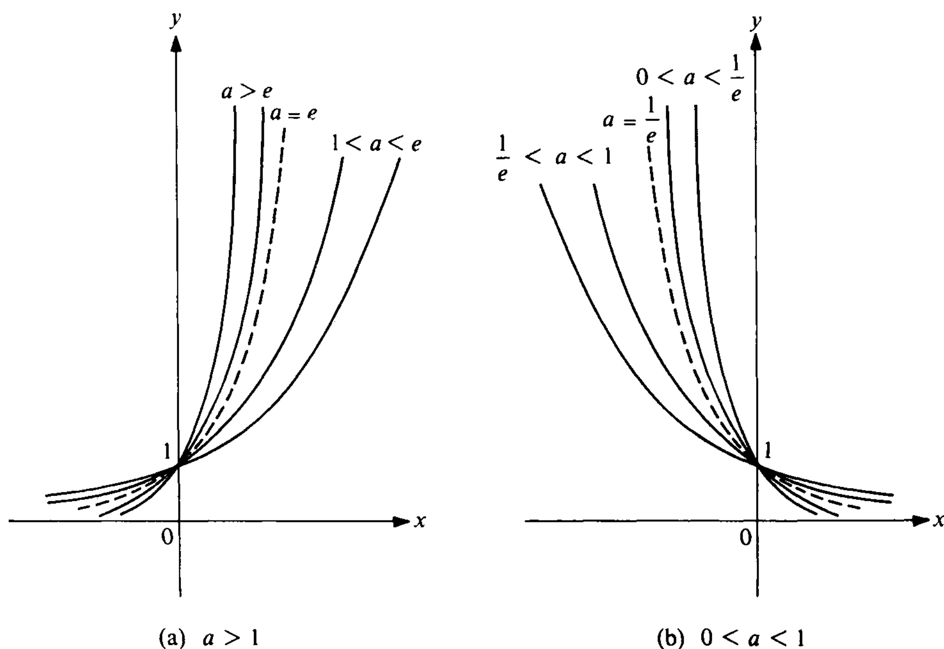


FIGURA 6.7 *Gráfica de* $y = a^x$ *para varios valores de* a.

Evidentemente, estas fórmulas de derivación conducen automáticamente a las fórmulas de integración correspondientes. Por ejemplo (6.35) da como resultado

$$\int e^x \, dx = e^x + C , \tag{6.37}$$

en tanto que (6.36) conduce a la fórmula más general

(6.38) $$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1).$$

Esta puede aún generalizarse por el método de sustitución. Sustituimos x en (6.37) y (6.38) por u obteniendo

(6.39). $$\int e^u\, du = e^u + C, \qquad \int a^u\, du = \frac{a^u}{\log a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1),$$

en donde u representa cualquier función con derivada continua. Si escribimos $u = f(x)$, y $du = f'(x)\, dx$, las fórmulas (6.39) se convierten en

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C, \qquad \int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C,$$

siendo la segunda integral válida para $a > 0$, $a \neq 1$,

EJEMPLO 1. Integrar $\int x^2 e^{x^3}\, dx$.

Solución. Sea $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2\, dx$, y se obtiene

$$\int x^2 e^{x^3}\, dx = \tfrac{1}{3}\int e^{x^3}(3x^2\, dx) = \tfrac{1}{3}\int e^u\, du = \tfrac{1}{3}e^u + C = \tfrac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

EJEMPLO 2. Integrar $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución. Sea $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Entonces $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2}\, dx/\sqrt{x}$. Luego tenemos

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = 2\int 2^u\, du = 2\,\frac{2^u}{\log 2} + C = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\log 2} + C.$$

EJEMPLO 3. Integrar $\int \cos x\, e^{2\,\text{sen}\, x}\, dx$.

Solución. Si $u = 2\,\text{sen}\, x$, será $du = 2\cos x\, dx$, y se obtiene por tanto

$$\int \cos x\, e^{2\,\text{sen}\, x}\, dx = \tfrac{1}{2}\int e^{2\,\text{sen}\, x}(2\cos x\, dx) = \tfrac{1}{2}\int e^u\, du = \tfrac{1}{2}e^u + C = \tfrac{1}{2}e^{2\,\text{sen}\, x} + C.$$

EJEMPLO 4. Integrar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución. Pongamos $u = e^x$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces $du = e^x dx$, $v = - \cos x$, y encontramos

$$(6.40) \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx + C\,.$$

La integral $\int e^x \cos x\, dx$ se trata del mismo modo. Tomamos $u = e^x$, $dv = \cos x\, dx$, $du = e^x dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y obtenemos

$$(6.41) \qquad \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx + C\,.$$

Sustituyéndolo en (6.40), podemos despejar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ y reuniendo las constantes arbitrarias se obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + C\,.$$

Obsérvese que podemos aplicar este resultado en (6.41) para obtener también

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) + C\,.$$

EJEMPLO 5. Integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^x}$.

Solución. Una manera de tratar este ejemplo es poner el integrando en la siguiente forma:

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}\,.$$

Seguidamente hacemos $u = e^{-x} + 1$, con lo que $du = - e^{-x}\, dx$, y llegamos a

$$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}\, dx = -\int \frac{-e^{-x}\, dx}{e^{-x} + 1} = -\int \frac{du}{u} = -\log |u| + C = -\log (1 + e^{-x}) + C\,.$$

El resultado puede ponerse de otra forma si modificamos el logaritmo. Por ejemplo,

$$-\log(1 + e^{-x}) = \log \frac{1}{1 + e^{-x}} = \log \frac{e^x}{e^x + 1} =$$

$$= \log(e^x) - \log(e^x + 1) = x - \log(1 + e^x).$$

Otro modo de resolver el ejemplo consiste en poner

$$\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Entonces se tiene

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} = x - \int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = x - \int \frac{du}{u},$$

donde $u = 1 + e^x$. Encontramos así

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} = x - \log(1 + e^x) + C,$$

que es una de las formas obtenidas antes.

6.17 Ejercicios

En los Ejercicios 1 al 12, hallar la derivada $f'(x)$. En cada caso la función f se la supone definida para todo x real para el que la expresión que se da de $f(x)$ tenga sentido.

1. $f(x) = e^{3x-1}$.
2. $f(x) = e^{4x^2}$.
3. $f(x) = e^{-x^2}$.
4. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
5. $f(x) = e^{1/x}$.
6. $f(x) = 2^x$.
7. $f(x) = 2^{x^2}$ [que significa $2^{(x^2)}$].
8. $f(x) = e^{\text{sen}\, x}$.
9. $f(x) = e^{\cos^2 x}$.
10. $f(x) = e^{\log x}$.
11. $f(x) = e^{e^x}$ [que significa $e^{(e^x)}$].
12. $f(x) = e^{e^{e^x}}$ [que significa $\exp(e^{(e^x)})$].

Calcular las integrales indefinidas de los Ejercicios 13 al 18.

13. $\int x\, e^x\, dx$.
14. $\int x\, e^{-x}\, dx$.
15. $\int x^2\, e^x\, dx$.
16. $\int x^2\, e^{-2x}\, dx$.
17. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.
18. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$.

19. Determinar todas las constantes a y b tales que $e^x = b + \int_a^x e^t\,dt$.
20. Sean $A = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ y $B = \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$, donde a y b son constantes, no simultáneamente nulas.
Integrando por partes demostrar que

$$aA - bB = e^{ax}\cos bx + C_1, \qquad aB + bA = e^{ax}\operatorname{sen} bx + C_2,$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Despejar A y B para obtener las siguientes fórmulas de integración:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

En los Ejercicios del 21 al 34, hallar la derivada $f'(x)$. En cada caso, la función f se supone definida para valores reales de x para los que la fórmula dada de $f(x)$ tiene sentido. La derivada logarítmica puede simplificar el trabajo en algunos casos.

21. $f(x) = x^x$.
22. $f(x) = (1 + x)(1 + e^{x^2})$.
23. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
24. $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$.
25. $f(x) = \log[\log(\log x)]$.
26. $f(x) = \log(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.
27. $f(x) = x^{x^x}$.
28. $f(x) = (\log x)^x$.
29. $f(x) = x^{\log x}$.
30. $f(x) = \dfrac{(\log x)^x}{x^{\log x}}$.
31. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$
32. $f(x) = x^{1/x}$.
33. $f(x) = \dfrac{x^2(3 - x)^{1/3}}{(1 - x)(3 + x)^{2/3}}$.
34. $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{b_i}$.

35. Sea $f(x) = x^r$, donde $x > 0$ y r es un número real cualquiera. La fórmula $f'(x) = rx^{r-1}$ se demostró para r *racional*.
(a) Probar que esta fórmula es válida también para r real cualquiera. [*Indicación:* Escribir $x^r = e^{r\log x}$.]
(b) Discútase bajo qué condiciones el resultado de (a) se aplica para $x \leq 0$.
36. Aplicar la definición $a^x = e^{x\log a}$ para deducir las siguientes propiedades de la exponencial general:
(a) $\log a^x = x\log a$.
(b) $(ab)^x = a^x b^x$.
(c) $a^x a^y = a^{x+y}$.
(d) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.
(e) *Si* $a \neq 1$, *entonces* $y = a^x$ *si y sólo si* $x = \log_a y$.

37. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ si $a > 0$. Probar que.

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) .$$

38. Sea $f(x) = e^{cx}$ donde c es una constante. Probar que $f'(0) = c$ y aplicar este resultado para demostrar la siguiente relación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{cx} - 1}{x} = c .$$

39. Sea f una función definida en todo el eje real, con derivada f' que satisface la ecuación:

$$f'(x) = cf(x) \qquad \text{para todo } x,$$

donde c es una constante. Probar que existe una constante K tal que $f(x) = Ke^{cx}$ para cada x.

[*Indicación:* Hágase $g(x) = f(x)e^{-cx}$ y considérese $g'(x)$.]

40. Sea f una función definida en todo el eje real. Supóngase además que f satisface la ecuación funcional:

(i) $$f(x + y) = f(x)f(y) \qquad \text{para todo } x \text{ e } y.$$

(a) Aplicando sólo la ecuación funcional demostrar que $f(0)$ es 0 ó 1. Demostrar también que si $f(0) \neq 0$ entonces $f(x) \neq 0$ para *todo* x. Supóngase, además de (i), que $f'(x)$ existe para todo x, y demuéstrense las siguientes propiedades:

(b) $f'(x)f(y) = f'(y)f(x)$ para todo x e y.

(c) Existe una constante c tal que $f'(x) = cf(x)$ para todo x.

(d) $f(x) = e^{cx}$ si $f(0) \neq 0$. [*Indicación:* Véase Ejercicio 39.

41. (a) Sea $f(x) = e^x - 1 - x$ para todo x. Demostrar que $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \leq 0$.

Haciendo uso de este hecho deducir las desigualdades

$$e^x > 1 + x , \qquad e^{-x} > 1 - x ,$$

válidas para todo $x > 0$. (Cuando $x = 0$, se convierten en igualdades.)

Integrar estas desigualdades para deducir las siguientes, todas válidas para $x > 0$:

(b) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}$, $\qquad e^{-x} < 1 - x + \dfrac{x^2}{2!}$.

(c) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$, $\qquad e^{-x} > 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}$.

(d) Enunciar la generalización sugerida y demuéstrese.

42. Si n es un entero positivo y si $x > 0$, demostrar que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x, \qquad \text{y que} \qquad e^x < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \qquad \text{si } x < n .$$

Eligiendo n en forma adecuada, deducir que $2{,}5 < e < 2{,}99$.

43. Sea $f(x, y) = x^y$ donde $x > 0$. Demostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x .$$

6.18 Funciones hiperbólicas

Frecuentemente en Análisis se presentan ciertas combinaciones de funciones exponenciales que merecen que se les dé nombres especiales y que se estudien como ejemplos de nuevas funciones. Estas combinaciones se denominan *seno hiperbólico* (senh), *coseno hiperbólico* (cosh), *tangente hiperbólica* (tanh), etcétera, y se definen como sigue:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

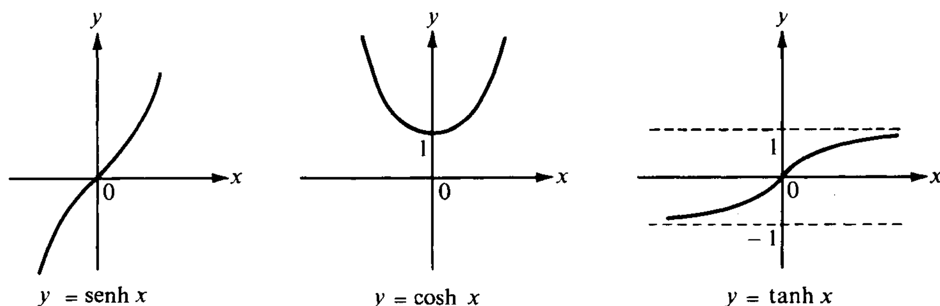


FIGURA 6.8 *Gráficas de las funciones hiperbólicas.*

El calificativo «hiperbólico» se debe a que estas funciones se pueden referir a una hipérbola de la misma manera que las funciones trigonométricas están referidas a la circunferencia. Esta relación se discutirá con más detalle en el capítulo 14 cuando se estudie la hipérbola. Las gráficas de senh, cosh y tanh se dan en la figura 6.8.

Las funciones hiperbólicas tienen muchas propiedades parecidas a las de las funciones trigonométricas, algunas de las cuales se proponen como ejercicios en el apartado que sigue.

6.19 Ejercicios

Deducir las propiedades de las funciones hiperbólicas escritas en los Ejercicios 1 al 15 y compararlas, siempre que sea posible, con las propiedades correspondientes de las funciones trigonométricas.

1. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.
2. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$.
3. $\cosh(-x) = \cosh x$.
4. $\tanh(-x) = -\tanh x$.
5. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$.
6. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.
7. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$.
8. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$.
9. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$.
10. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$.
11. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$ (n entero).
12. $2 \operatorname{senh}^2 \frac{1}{2}x = \cosh x - 1$.
13. $2 \cosh^2 \frac{1}{2}x = \cosh x - 1$.
14. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$.
15. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$.
16. Siendo $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$ hallar $\cosh x$.
17. Siendo $\cosh x = \frac{5}{4}$ y $x > 0$ calcular $\operatorname{senh} x$.
18. Siendo $\tanh x = \frac{5}{13}$, calcular $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.
19. Siendo $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$ y $\operatorname{senh} y = \frac{3}{4}$ hallar $\cosh(x + y)$.
20. Siendo $\tanh x = \frac{3}{4}$, hallar $\tanh 2x$.

En los Ejercicios del 21 al 26 demostrar las fórmulas de derivación.

21. $D \operatorname{senh} x = \cosh x$.
22. $D \cosh x = \operatorname{senh} x$.
23. $D \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$.
24. $D \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$.
25. $D \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$.
26. $D \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$.

6.20 Derivadas de funciones inversas

Hemos aplicado el proceso de inversión para construir la función exponencial a partir del logaritmo. En la próxima Sección, invertiremos las funciones trigonométricas. Al llegar a este punto conviene considerar un teorema general que demuestra que el proceso de inversión transmite la derivabilidad de una función a su inversa.

TEOREMA 6.7. *Supongamos f estrictamente creciente y continua en un intervalo $[a, b]$, y sea g la inversa de f. Si existe la derivada $f'(x)$ y no es nula en un punto x de (a, b), entonces la derivada $g'(y)$ también existe y no es nula en el*

correspondiente punto y, siendo $y = f(x)$. *Además, las dos derivadas son recíprocas una de otra; esto es, tenemos*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{6.42}$$

Nota: Si usamos la notación de Leibniz y escribimos y en lugar de $f(x)$, dy/dx en lugar de $f'(x)$, x en lugar de $g(y)$ y cambiamos $g'(y)$ por dx/dy, entonces la igualdad (6.42) se convierte en

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)},$$

que tiene la apariencia de una trivial identidad algebraica

Demostración. Supóngase que x es un punto de (a, b) en el que $f'(x)$ existe y es distinta de cero, y sea $y = f(x)$. Se trata de demostrar que el cociente de diferencias

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k}$$

tiende al límite $1/f'(x)$ cuando $k \to 0$.

Sea $h = g(y + k) - g(y)$, como $x = g(y)$ es $h = g(y + k) - x$ o $x + h = g(y + k)$. De aquí resulta $y + k = f(x+h)$ y por tanto $k = f(x+h) - f(x)$. Obsérvese que $h \neq 0$ si $k \neq 0$ ya que g es creciente en sentido estricto. Luego, si $k \neq 0$ el cociente de diferencias en cuestión es:

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{[f(x+h) - f(x)]/h}. \tag{6.43}$$

En virtud de la continuidad de g en y [propiedad (b) del teorema 3-10] cuando $k \to 0$ la diferencia $g(y + k) - g(y) \to 0$, o sea $h \to 0$ cuando $k \to 0$. Pero se sabe que el cociente de diferencias del denominador del último miembro de (6.43) tiende a $f'(x)$ cuando $h \to 0$ [puesto que $f'(x)$ existe]. Por tanto, cuando $k \to 0$, el cociente del primer miembro de (6.43) tiende al límite $1/f'(x)$ lo cual prueba el teorema 6.7.

6.21 Inversas de las funciones trigonométricas

El proceso de inversión se puede aplicar a las funciones trigonométricas. Se empezará por la función seno. Para determinar una inversa única se ha de

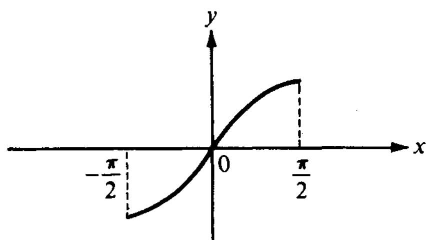


FIGURA 6.9 $y = \operatorname{sen} x$.

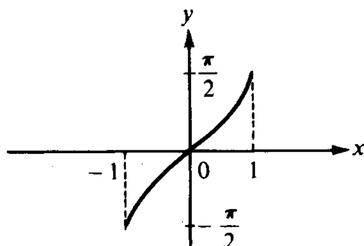


FIGURA 6.10 $y = \operatorname{arcsen} x$.

considerar un intervalo en el que el seno sea monótono. Hay, evidentemente, muchos de estos intervalos, por ejemplo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$, etc., y se puede escoger uno cualquiera de ellos. Se acostumbra tomar $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ y definir una nueva función f como sigue:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

La función f así definida es creciente en sentido estricto y toma todos los valores entre -1 y $+1$ exactamente una vez en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. (véase figura 6.9). Por tanto, hay una única función g definida en $[-1, 1]$ que asigna a cada número y de $[-1, 1]$ el número x de $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ para el cual $y = \operatorname{sen} x$. Esta función se denomina *inversa del seno* o *arco seno* y su valor en y se designa por $\operatorname{arc\,sen} y$. Así

$$u = \operatorname{arcsen} v \quad \text{implica} \quad v = \operatorname{sen} u \qquad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

La gráfica de arco seno se ha dibujado en la figura 6.10. Obsérvese que el arco seno no está definido fuera del intervalo $[-1, 1]$.

La derivada de arco seno se puede obtener mediante la fórmula (6.42) de la Sección 6.20. En este caso se tiene $f'(x) = \cos x$ que es distinto de cero en el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. En virtud de la fórmula (6.42) se tiene:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \text{si} \quad -1 < y < 1.$$

y con un cambio de notación se puede escribir este resultado como sigue:

(6.44) $$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{si} \quad -1 < x < 1.$$

Evidentemente, este resultado da lugar a una nueva fórmula de integración, que es

$$(6.45) \qquad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \operatorname{arcsen} x\,,$$

válida para $-1 < x < 1$.

Nota: La integral en (6.45) se puede tomar como punto de partida para una teoría completamente analítica de las funciones trigonométricas, sin ninguna referencia a la Geometría. La idea, expuesta brevemente consiste en empezar con la función arco seno definida por la integral (6.45) igual como se define el logaritmo mediante una integral. Luego la función seno se define como inversa de arc sen y el coseno como la derivada del seno. Para llevar a cabo completamente este programa, se han de precisar muchos detalles, por lo que aquí no se intentará. En el capítulo 11 se mencionará otro método para introducir analíticamente las funciones trigonométricas.

Con la notación de Leibniz para integrales indefinidas se puede escribir

$$(6.46) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C\,.$$

Integrando por partes se obtiene otra nueva fórmula de integración

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

El coseno y la tangente se invierten de forma análoga. Para el coseno se acostumbra elegir el intervalo $[0, \pi]$ para hacer la inversión (véase fig. 6.11). La función inversa resultante, llamada arco coseno, se define como sigue:

$$u = \arccos v \quad \text{implica} \quad v = \cos u \quad \text{y} \quad 0 \le u \le \pi\,.$$

En la figura 6.12 está representada la gráfica de la función arccos.

Para invertir la tangente se elige el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ (véase figura 6.13) y se define el arco tangente como sigue:

$$u = \arctan v \quad \text{implica} \quad v = \tan u \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\,.$$

En la figura 6.14 se ha dibujado una parte de la gráfica de la función arco tangente.

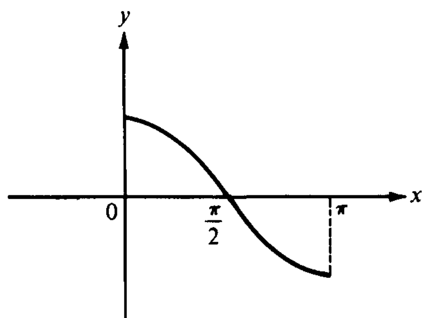


FIGURA 6.11 $y = \cos x$

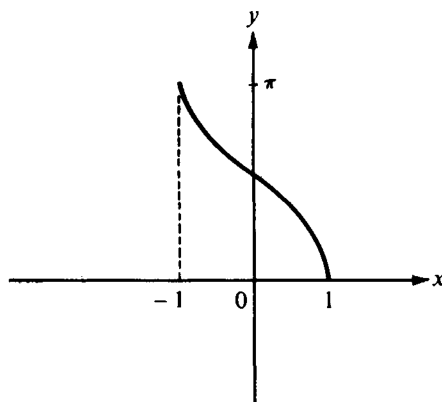


FIGURA 6.12 $y = \operatorname{arccos} x$

El razonamiento utilizado para deducir (6.44) se puede aplicar a las funciones arco coseno y arco tangente con lo cual se obtienen las siguientes fórmulas de derivación:

(6.47) $$D \operatorname{arccos} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

válida para $-1 < x < 1$ y

(6.48) $$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2},$$

válida para todo el número real x.

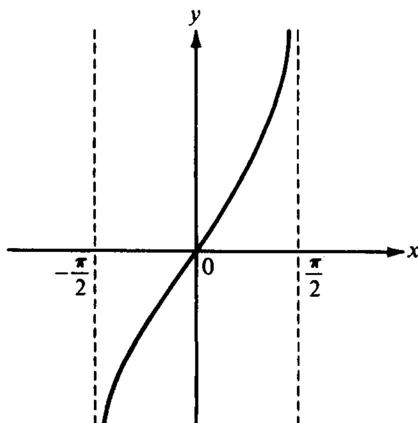


FIGURA 6.13 $y = \tan x$

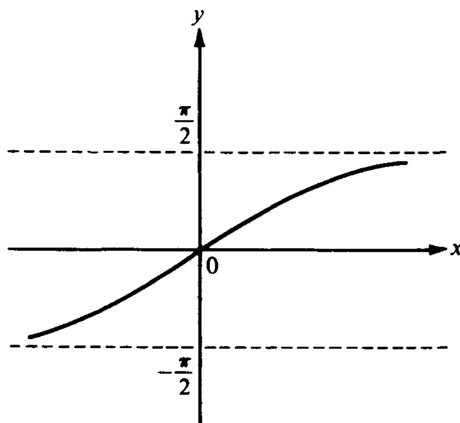


FIGURA 6.14 $y = \arctan x$

(6.47) se puede traducir en la siguiente fórmula de integración:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -(\text{arccos}\, x - \text{arccos}\, 0) = \frac{\pi}{2} - \text{arccos}\, x \tag{6.49}$$

si $-1 < x < 1$. Comparando (6.49) con (6.45) se deduce la relación $\frac{1}{2}\pi - \text{arccos}\, x = \text{arc sen}\, x$ (lo que también se puede deducir de la conocida identidad $\text{sen}\,(\frac{1}{2}\pi - y) = \cos y$, escribiendo $y = \text{arccos}\, x$). Con la notación de Leibniz para integrales definidas se puede escribir (6.49) como sigue:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{arccos}\, x + C\,. \tag{6.50}$$

Análogamente, de (6.48) se obtiene:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \qquad \text{o} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C\,. \tag{6.51}$$

Aplicando el método de integración por partes junto con (6.50) y (6.51) se pueden deducir las siguientes fórmulas de integración

$$\int \text{arccos}\, x\, dx = x\, \text{arccos}\, x + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\, \text{arccos}\, x - \sqrt{1-x^2} + C\,,$$

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \arctan x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C\,.$$

Las inversas de la cotangente, secante y cosecante se pueden definir por medio de las siguientes fórmulas

$$\text{arccot}\, x = \frac{\pi}{2} - \arctan x \qquad \text{para todo } x \text{ real}, \tag{6.52}$$

$$\text{arcsec}\, x = \text{arccos}\, \frac{1}{x} \qquad \text{si} \quad |x| \geq 1, \tag{6.53}$$

$$\text{arccsc}\, x = \text{arcsen}\, \frac{1}{x} \qquad \text{si} \quad |x| \geq 1. \tag{6.54}$$

Las fórmulas de derivación e integración para estas funciones se encuentran en los Ejercicios siguientes.

6.22 Ejercicios

Deducir las fórmulas de derivación dadas en los Ejercicios 1 al 5.

1. $D \arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ si $-1 < x < 1$.

2. $D \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ para todo x real.

3. $D \operatorname{arccot} x = \dfrac{-1}{1+x^2}$ para todo x real.

4. $D \operatorname{arcsec} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ si $|x| > 1$.

5. $D \operatorname{arccsc} x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ si $|x| > 1$.

Deducir las fórmulas de integración de los Ejercicios 6 al 10.

6. $\int \operatorname{arccot} x\, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$.

7. $\int \operatorname{arcsec} x\, dx = x \operatorname{arcsec} x - \dfrac{x}{|x|}\log|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

8. $\displaystyle\int \operatorname{arccsc} x\, dx = x \operatorname{arccsc} x + \dfrac{x}{|x|}\log|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

9. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\, dx = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C$.

10. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\, dx = \log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + C$.

11. (a) Demostrar que $D\left(\operatorname{arccot} x - \arctan \dfrac{1}{x}\right) = 0$ para todo $x \neq 0$.

(b) Probar que no existe ninguna constante C tal que $\operatorname{arccot} x - \arctan(1/x) = C$ para todo $x \neq 0$. Explicar por qué esto no contradice el teorema de la derivada nula (teorema 5.2).

En los Ejercicios 12 al 25, encontrar la derivada $f'(x)$. Se supone que en cada caso la función f está definida para todos los valores reales x para los cuales la fórmula $f(x)$ tiene sentido.

12. $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2}$.

13. $f(x) = \arccos \dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$.

14. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$.

15. $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

16. $f(x) = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}$.

17. $f(x) = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan (x^3)$.

18. $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

19. $f(x) = \arctan (\tan^2 x)$.

20. $f(x) = \arctan (x + \sqrt{1 + x^2})$.

21. $f(x) = \operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} x - \cos x)$

22. $f(x) = \arccos \sqrt{1 - x^2}$.

23. $f(x) = \arctan \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

24. $f(x) = [\arccos (x^2)]^{-2}$.

25. $f(x) = \log\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

26. Probar que $dy/dx = (x + y)/(x - y)$ si $\operatorname{arctg} (y/x) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$.

27. Calcular d^2y/dx^2 si $y = (\operatorname{arcsen} x)/\sqrt{1 - x^2}$ para $|x| < 1$

28. Sea $f(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3$. Examinar el signo de f' para demostrar que

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x \qquad \text{si} \quad x > 0.$$

En los Ejercicios 29 al 47, calcular las integrales indefinidas.

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad a \neq 0.$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2}, \qquad a \neq 0.$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + bx^2} \qquad (ab \neq 0).$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$

34. $\int x \arctan x \, dx.$

35. $\int x^2 \arccos x \, dx.$

36. $\int x(\arctan x)^2 \, dx.$

37. $\int \arctan \sqrt{x} \, dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)} \, dx.$

39. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx.$ [*Indicación*: $x = \operatorname{sen} u$.]

40. $\displaystyle\int \frac{x\, e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} \, dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} \, dx.$

42. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} \, dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx.$

44. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} \, dx.$

45. $\displaystyle\int \left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{1/2} dx, \qquad a > 0.$

46. $\int \sqrt{(x - a)(b - x)} \, dx, \qquad b \neq a.$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(b - x)}}, \qquad b \neq a.$

[*Indicación*: $x - a = (b - a) \operatorname{sen}^2 u$.]

6.23 Integración por fracciones simples

El cociente de dos polinomios se denomina función racional. La derivación de una función racional conduce a una nueva función racional que puede obtenerse por la regla de la derivada del cociente. Por otra parte, la integración de funciones racionales puede conducir a funciones que no sean racionales. Por ejemplo, se tiene:

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + C \qquad \text{y} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C\,.$$

Se dará a continuación un método para calcular la integral de una función racional cualquiera y se verá que el resultado puede expresarse siempre por medio de polinomios, funciones racionales, arcotangentes y logaritmos.

La idea básica del método consiste en descomponer una fracción en suma de fracciones simples que pueden integrarse por las técnicas dadas anteriormente. Se expondrá la manera general de proceder por medio de un número de ejemplos sencillos que indican todos los pasos esenciales del método.

EJEMPLO 1. En este ejemplo se empieza con dos fracciones simples $1/(x-1)$ y $1/(x+3)$ cuyas integrales se conocen, y se ve qué ocurre cuando se forma una combinación lineal de estas fracciones. Por ejemplo, si se toma dos veces la primera fracción, más tres veces la segunda, se tiene

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3} = \frac{2(x+3)+3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,.$$

Leyendo ahora esta fórmula de derecha a izquierda, dice que la función racional r dada por $r(x) = (5x+3)/(x^2+2x-3)$ se expresa como una combinación lineal de $1/(x-1)$ y $1/(x+3)$. Por tanto, se puede escribir la integral de r escribiendo:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+3} = 2\log|x-1| + 3\log|x+3| + C\,.$$

EJEMPLO 2. El ejemplo anterior sugiere un procedimiento para calcular integrales de la forma $\int (ax+b)/(x^2+2x-3)dx$. Por ejemplo, para calcular $\int (2x+5)/(x^2+2x-3)dx$ se trata de expresar el integrando como combinación lineal de $1/(x-1)$ y $1/(x+3)$ escribiendo

$$\frac{2x+5}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \tag{6.55}$$

donde A y B son constantes que se han de determinar. Si se pueden encontrar A y B de manera que la ecuación (6.55) sea una identidad, entonces la integral de la fracción del primer miembro es igual a la suma de las integrales de las fracciones del segundo miembro. Para hallar A y B se multiplican ambos miembros de (6.55) por $(x - 1)(x + 3)$ para quitar los denominadores. Con lo cual se tiene

$$(6.56) \qquad A(x + 3) + B(x - 1) = 2x + 5\,.$$

Para determinar A y B a partir de esta igualdad hay dos métodos comúnmente usados. Uno consiste en igualar los coeficientes de las potencias iguales de x en (6.56). Esto conduce a las ecuaciones $A + B = 2$ y $3A - B = 5$. Resolviendo este par de ecuaciones simultáneas, se obtiene $A = \frac{7}{4}$, $B = \frac{1}{4}$. El otro método consiste en dar a x en (6.56) dos valores distintos con lo cual se obtiene otro par de ecuaciones en A y B. En este caso particular, la presencia de los factores $x - 1$ y $x + 3$ sugiere el tomar los valores $x = 1$ y $x = -3$. Poniendo $x = 1$ en (6.56) el coeficiente de B se anula y se tiene $4A = 7$, o sea $A = \frac{7}{4}$. Análogamente se puede anular el coeficiente de A poniendo $x = -3$, con lo cual $-4B = -1$, o sea $B = \frac{1}{4}$. En ambos casos se han hallado los valores que satisfacen (6.55), de manera que se tiene:

$$\int \frac{2x + 5}{x^2 + 2x - 3}\,dx = \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x + 3} = \frac{7}{4}\log|x - 1| + \frac{1}{4}\log|x + 3| + C\,.$$

Es claro, que el método expuesto en el ejemplo 2, se aplica también a integrales de la forma $\int f(x)/g(x)\,dx$ en las que f es un polinomio lineal y g un polinomio cuadrático que se puede descomponer en producto de factores lineales con coeficientes reales $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. En este caso, el cociente se puede expresar como una combinación lineal de $1/(x - x_1)$ y $1/(x - x_2)$ y la integración de $f(x)/g(x)$ conduce a la combinación correspondiente de los términos logarítmicos $\log|x - x_1|$ y $\log|x - x_2|$.

Los ejemplos precedentes se refieren a funciones racionales f/g en las que el grado del numerador es menor que el del denominador. Una función racional con esta propiedad se denomina una función racional *propia*. Si f/g es *impropia*, es decir, el grado de f no es menor que el grado de g, se puede expresar f/g como suma de un polinomio y una función racional propia. En efecto, basta simplemente dividir f por g para obtener:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}\,,$$

donde Q y R son polinomios (llamados *cociente* y *resto,* respectivamente) de manera que el resto es de grado menor que g. Por ejemplo:

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

Por tanto, al estudiar la técnica de integración, no se quita generalidad limitándose a las funciones racionales *propias* y por tanto en lo sucesivo se considerará $\int f(x)/g(x)\,dx$ donde f es de grado menor que g.

Un teorema general de Álgebra dice que toda función racional se puede expresar como suma finita de fracciones de la forma:

$$\frac{A}{(x + a)^k} \qquad \text{y} \qquad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^m},$$

donde k y m son enteros positivos y A, B, C, a, b, c constantes con la condición $b^2 - 4c < 0$. Esta condición indica que el polinomio $x^2 + bx + c$ no se puede descomponer en factores lineales con coeficientes reales, que es lo mismo que decir que la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales. Un polinomio de esta forma se dice que es *irreducible* en el campo real. Cuando una función racional se expresa de la manera indicada se dice que se ha descompuesto en *fracciones simples.* Por tanto, el problema de integrar esta función ha quedado reducido al de integrar sus fraccciones simples, lo que se logra fácil mente con las técnicas que se exponen en los ejemplos que siguen.

Aquí no se tratará de probar que la descomposición en fracciones simples existe siempre, sino que se verá (por medio de ejemplos) cómo se obtienen las fracciones simples en problemas concretos. En cada caso, cuando surja, la descomposición en fracciones parciales se podrá efectuar directamente.

Es conveniente discutir por separado los casos, según sea la forma en que se descomponga el denominador del cociente $f(x)/g(x)$ en producto de factores.

CASO 1. El denominador es un producto de factores lineales distintos. Supóngase $g(x)$ descompuesto en n factores lineales, es decir:

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Se observa que una combinación lineal de la forma

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

se reduce a una única fracción con el común denominador $g(x)$ siendo el numerador de esta fracción un polinomio de grado menor que n que contiene las A.

Por tanto, si se pueden encontrar las A de manera que este numerador sea igual a $f(x)$ se tiene la descomposición

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

y la integral de $f(x)/g(x)$ será igual a $\sum_{i=1}^{n} A_i \log |x - x_i|$. En el ejemplo que sigue se resolverá un caso para $n = 3$.

EJEMPLO 3. Integrar $\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$.

Solución. Puesto que $x^3 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x + 2)$ el denominador es el producto de factores lineales distintos y se trata de hallar A_1, A_2, A_3, de manera que:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{A_3}{x + 2}.$$

Quitando denominadores se tiene

$$2x^2 + 5x - 1 = A_1(x - 1)(x + 2) + A_2x(x + 2) + A_3x(x - 1).$$

Para $x = 0$ se tiene $-2A_1 = -1$, es decir, $A_1 = \frac{1}{2}$. Para $x = 1$ se obtiene: $3A_2 = 6$, o sea, $A_2 = 2$, y para $x = -2$ resulta $6A_3 = -3$, o sea, $A_3 = -\frac{1}{2}$. Por tanto se tiene:

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x + 2} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \log |x| + 2 \log |x - 1| - \tfrac{1}{2} \log |x + 2| + C$$

CASO 2. El denominador es un producto de factores lineales algunos de los cuales se repiten. Se ilustra este caso con un ejemplo.

EJEMPLO 4. Integrar $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x - 1)(x + 1)^2}\, dx$.

Solución. Se han de encontrar A_1, A_2, A_3 de manera que

(6.57) $$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{(x + 1)^2}.$$

Son necesarias las dos fracciones $A_2/(x+1)$ y $A_3/(x+1)^2$, así como $A_1/(x-1)$ a fin de conseguir un polinomio de grado dos en el numerador y tener tantas ecuaciones como constantes cuando se trate de determinar las A. Quitando denominadores se tiene:

$$(6.58) \qquad x^2 + 2x + 3 = A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)\,.$$

Sustituyendo $x = 1$ se tiene $4A_1 = 6$ o sea $A_1 = \frac{3}{2}$. Si $x = -1$ se obtiene $-2A_3 = 2$ y $A_3 = -1$. Se necesita otra ecuación para determinar A_2. Puesto que no es posible otra elección de x que anule algún factor, se procura tomar x de manera que los cálculos sean lo más sencillos posibles. Por ejemplo, haciendo $x = 0$ se llega a la ecuación $3 = A_1 - A_2 - A_3$ de lo que resulta $A_2 = -\frac{1}{2}$. Otro método es derivar ambos miembros de (6.58) y luego sustituir una x conveniente. Derivando en (6.58) se obtiene la ecuación

$$2x + 2 = 2A_1(x+1) + A_2(x-1) + A_2(x+1) + A_3\,,$$

y haciendo $x = -1$, se encuentra: $0 = -2A_2 + A_3$ es decir $A_2 = \frac{1}{2}A_3 = -\frac{1}{2}$, como antes. Halladas las A que satisfacen (6.57) se tiene:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\,.$$

Si, en el primer miembro de (6.57) hubiera habido el factor $(x+1)^3$ en vez de $(x+1)^2$ se hubiera tenido que añadir en el segundo miembro el término $A_4/(x+1)^3$. Más general, si un factor lineal aparece p veces en el denominador, para este factor se ha de tomar una suma de p términos, es decir:

$$(6.59) \qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x+a)^k}\,,$$

donde las A son constantes. Para cada factor lineal repetido se ha de tomar una suma de este tipo.

CASO 3. El denominador contiene factores cuadráticos irreducibles ninguno de los cuales se repite.

EJEMPLO 5. Integrar $\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1}\,dx$.

Solución. El denominador se puede descomponer en el producto $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, donde $x^2 + x + 1$ es irreducible, y se tiene una descomposición de la forma:

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

En la fracción de denominador $x^2 + x + 1$ se pone como numerador un polinomio de primer grado $Bx + C$ a fin de tener tantas ecuaciones como constantes cuando se determinan A, B, C. Quitando denominadores y resolviendo respecto a A, B, y C se tiene: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$. Por tanto, se puede escribir:

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1}\,dx = \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}\,dx.$$

La primera integral del segundo miembro es $\log|x - 1|$. Para calcular la segunda integral, se escribe:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}\,dx = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx + \int \frac{2}{x^2 + x + 1}\,dx$$
$$= \log(x^2 + x + 1) + 2\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Haciendo $u = x + \frac{1}{2}$ y $\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}}$ la última integral es:

$$2\int \frac{du}{u^2 + \alpha^2} = \frac{2}{\alpha}\arctan\frac{u}{\alpha} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto se tiene:

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1}\,dx = \log|x - 1| + \log(x^2 + x + 1) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

CASO 4. El denominador contiene factores cuadráticos irreducibles algunos de los cuales están repetidos. La situación aquí es análoga a la del caso 2. Admitimos que es posible una descomposición de $f(x)/g(x)$ en fracciones simples, en primer lugar en una suma de la forma (6.59) por cada factor lineal, tal como se dijo anteriormente; y en segundo lugar, si un factor cuadrático irreducible

se repite m veces, se admite que se puede descomponer en una suma de m términos, de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + bx + c)^k},$$

donde cada numerador es lineal.

EJEMPLO 6. Integrar $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x - 1)(x^2 + 2)^2}\, dx$.

Solución. Se escribe

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x - 1)(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}.$$

Quitando denominadores y resolviendo respecto a A, B, C, D, y E se tiene.

$$A = \tfrac{1}{3}, \qquad B = \tfrac{2}{3}, \qquad C = -\tfrac{1}{3}, \qquad D = -1, \qquad E = 0.$$

Por tanto, resulta,

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x - 1)(x^2 + 2)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2 + 2}\, dx - \int \frac{x\, dx}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x\, dx}{x^2 + 2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 + 2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x - 1| + \frac{1}{3}\log(x^2 + 2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + 2} + C.$$

Los ejemplos precedentes son modelos típicos de los que se presentan en general. El problema de la integración de funciones racionales propias se reduce al cálculo de integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{(x + a)^n}, \qquad \int \frac{x\, dx}{(x^2 + bx + c)^m}, \qquad \text{y} \qquad \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^m}.$$

La primera integral es $\log|x + a|$ si $n = 1$ y $(x + a)^{1-n}/(1 - n)$ si $n > 1$. Para calcular las otras dos se expresa la forma cuadrática como suma de dos cuadrados:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = u^2 + \alpha^2,$$

donde $u = x + b/2$ y $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}$. (Esto es posible puesto que $4c - b^2 > 0$. La sustitución $u = x + b/2$ reduce el problema al de calcular

$$(6.60) \qquad \int \frac{u\, du}{(u^2 + \alpha^2)^m} \qquad \text{y} \qquad \int \frac{du}{(u^2 + \alpha^2)^m}.$$

La primera es $\frac{1}{2}\log(u^2 + \alpha^2)$ si $m = 1$ y $\frac{1}{2}(u^2 + \alpha^2)^{1-m}/(1 - m)$ si $m > 1$. Si $m = 1$ la segunda integral en (6.60) viene dada por la fórmula:

$$\int \frac{du}{u^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{u}{\alpha} + C.$$

El caso $m > 1$ se reduce al caso $m = 1$ aplicando reiteradamente la fórmula de recurrencia:

$$\int \frac{du}{(u^2 + \alpha^2)^m} = \frac{1}{2\alpha^2(m - 1)} \frac{u}{(u^2 + \alpha^2)^{m-1}} + \frac{2m - 3}{2\alpha^2(m - 1)} \int \frac{du}{(u^2 + \alpha^2)^{m-1}},$$

que se obtiene por integración por partes. De lo dicho se deduce que toda función racional puede ser integrada por medio de polinomios, funciones racionales, arcostangentes y logaritmos.

6.24 Integrales que pueden transformarse en integrales de funciones racionales

Una función de dos variables definida por una ecuación de la forma

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{q} a_{m,n} x^m y^n$$

se denomina *polinomio de dos variables.* El cociente de dos de estos polinomios se denomina *función racional de dos variables.* Integrales de la forma: $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ donde R es una función racional de dos variables se puede reducir mediante la sustitución $u = \tan \frac{1}{2}x$ a integrales de la forma $\int r(u)\, du$ donde r es una función racional de una variable. La última integral se puede

calcular mediante las técnicas que se acaban de describir. Se ilustra el método con un ejemplo particular.

EJEMPLO 1. Integrar $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$.

Solución. La sustitución $u = \tan \frac{1}{2} x$ da

$$x = 2 \arctan u\,, \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}\, du\,,$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{1}{2}x}{\sec^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2u}{1+u^2}\,,$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2 \frac{1}{2}x} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,,$$

y

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{2u + 1 - u^2}{1+u^2}\,.$$

Por tanto se tiene:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = -2 \int \frac{du}{u^2 - 2u - 1} = -2 \int \frac{du}{(u-a)(u-b)}\,,$$

donde $a = 1 + \sqrt{2}$ y $b = 1 - \sqrt{2}$. El método de fracciones simples conduce a

$$\int \frac{du}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b} \right) du$$

y puesto que, $a - b = 2\sqrt{2}$ se obtiene:

$$(6.61) \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{u-b}{u-a} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{\tan \frac{1}{2}x - 1 + \sqrt{2}}{\tan \frac{1}{2}x - 1 - \sqrt{2}} \right| + C\,.$$

El último resultado se puede simplificar utilizando identidades trigonométricas adecuadas. En primer lugar se observa que $\sqrt{2} - 1 = \tan \frac{1}{8}\pi$ de manera que el

numerador de la última fracción es $\tan \frac{1}{2}x + \tan \frac{1}{8}\pi$. El denominador se puede escribir en la forma:

$$\left|\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}\right| = (\sqrt{2} + 1)\left|(\sqrt{2} - 1)\tan \frac{x}{2} - 1\right| = (\sqrt{2} + 1)\left|1 - \tan \frac{x}{2} \tan \frac{\pi}{8}\right| .$$

Tomando logaritmos en la forma indicada en (6.61) y combinando el término $-\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \log(\sqrt{2} + 1)$ con una constante arbitraria, se puede escribir (6.61) en la forma:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C .$$

En una Sección anterior se dedujo la fórmula de integración

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x$$

como consecuencia de la fórmula para derivar $\operatorname{arcsen} x$. La presencia del $\operatorname{arcsen} x$ sugiere que también podría calcularse esta integral mediante la sustitución trigonométrica $t = \operatorname{arcsen} x$. Tenemos entonces

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad dx = \cos t\, dt, \qquad \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \cos t ,$$

y encontramos que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt = t = \operatorname{arcsen} x .$$

Ésta es una buena sustitución si el integrando contiene $\sqrt{1 - x^2}$. En general, cualquier integral de la forma $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, en donde R representa una función de dos variables, se puede transformar mediante la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} t, \qquad dx = a \cos t\, dt ,$$

en una integral de la forma $\int R(a \operatorname{sen} t, a \cos t) a \cos t\, dt$. Ésta, a su vez, se puede siempre integrar por medio de uno de los métodos antes expuestos.

EJEMPLO 2. Integrar $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$.

Solución. Sea $x = 2 \operatorname{sen} t$, $dx = 2 \cos t\, dt$, $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t$, y encontramos que

$$\int \frac{x\, dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{4 \operatorname{sen} t \cos t\, dt}{4 \cos^2 t + 2 \cos t} = \int \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{\cos t + \frac{1}{2}} =$$

$$= -\log |\tfrac{1}{2} + \cos t| + C = -\log (1 + \sqrt{4 - x^2}) + C .$$

El mismo método sirve para integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - (cx + d)^2})\, dx ;$$

se utiliza la sustitución trigonométrica $cx + d = a \operatorname{sen} t$.

En forma parecida se resuelven integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + (cx + d)^2})\, dx$$

mediante la sustitución $cx + d = a \tan t, c\, dx = a \sec^2 t\, dt$. Para integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{(cx + d)^2 - a^2})\, dx ,$$

se emplea la sustitución $cx + d = a \sec t$, $c\, dx = a \sec t \tan t\, dt$. En uno u otro caso, el nuevo integrando se convierte en una función racional de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$.

6.25 Ejercicios

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)}\, dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}.$
3. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^3 - 3x + 2}.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 7}{(x + 1)(2x + 1)^3}\, dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - 1}\, dx.$
7. $\displaystyle\int \frac{x^4\, dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$
8. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 + x}\, dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

11. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-x}$.

13. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}$.

14. $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-4x+4}$.

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

16. $\displaystyle\int \frac{(x-3)\,dx}{x^3+3x^2+2x}$.

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

18. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$.

19. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-2x^3}$.

21. $\displaystyle\int \frac{1-x^3}{x(x^2+1)}\,dx$.

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$.

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$.

24. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

25. $\displaystyle\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx$.

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,\mathrm{sen}\,x-\cos x+5}$.

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+a\cos x}$ $\quad(0<a<1)$.

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+a\cos x}$ $\quad(a>1)$.

29. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{1+\mathrm{sen}^2\,x}\,dx$.

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\mathrm{sen}^2\,x+b^2\cos^2 x}$ $\quad(ab\neq 0)$.

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x)^2}$ $\quad(a\neq 0)$.

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{1+\cos x+\mathrm{sen}\,x}$.

33. $\displaystyle\int \sqrt{3-x^2}\,dx$.

34. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$.

35. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx$.

36. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\,dx$.

37. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\,dx$.

38. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$.

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}\,dx$.

[*Indicación:* En el Ejercicio 40, multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{2-x-x^2}$.]

6.26 Ejercicios de repaso

1. Sea $f(x) = \int_1^x (\log t)/(t+1)\,dt$ si $x > 0$. Calcular $f(x) + f(1/x)$. Como comprobación se verificará: $f(2) + f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\log^2 2$.
2. Encontrar una función f, continua para todo x (y no constantemente nula), tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\operatorname{sen} t}{2 + \cos t}\,dt.$$

3. Inténtese calcular $\int e^x/x\,dx$ aplicando el método de integración por partes.
4. Integrar $\int_0^{\pi/2} \log(e^{\cos x})\,dx$.
5. Una función f está definida por la ecuación

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+2}{x(x+1)(x+2)}} \qquad \text{si} \quad x > 0$$

(a) Encontrar la pendiente de la gráfica de f en el punto en que $x = 1$.
(b) La región del plano comprendida entre la gráfica y el intervalo $[1, 4]$ se hace girar alrededor del eje x engendrando un sólido de revolución. Calcular esta integral y probar que su valor es $\pi \log(25/8)$.

6. Una función F está definida por la siguiente integral indefinida:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \qquad \text{si} \quad x > 0.$$

(a) ¿Para qué valores de x es cierto que $\log x \le F(x)$?
(b) Demostrar que $\int_1^x e^t/(t+a)\,dt = e^{-a}[F(x+a) - F(1+a)]$.
(c) De forma análoga, expresar las siguientes integrales en función de F.

$$\int_1^x \frac{e^{at}}{t}\,dt, \qquad \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt, \qquad \int_1^x e^{1/t}\,dt.$$

7. En cada caso, dar un ejemplo de una función continua f que satisfaga las condiciones fijadas para todo real x, o bien explicar por qué una tal función no existe:

(a) $\int_0^x f(t)\,dt = e^x$.
(b) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = 1 - 2^{x^2}$. $\quad [2^{x^2}$ significa $2^{(x^2)}$.]
(c) $\int_0^x f(t)\,dt = f^2(x) - 1$.

8. Si $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ para todo x e y y si $f(x) = 1 + xg(x)$ donde $g(x) \to 1$ cuando $x \to 0$ demostrar que (a) $f'(x)$ existe para cada x, y (b) $f(x) = e^x$.
9. Dada una función g que tiene una derivada $g'(x)$ para cada real x y que satisface las siguientes ecuaciones:

$$g'(0) = 2 \qquad \text{y} \qquad g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) \quad \text{para todo } x \text{ y todo } y.$$

(a) Probar que $g(2x) = 2e^x g(x)$ y encontrar una fórmula análoga para $g(3x)$.
(b) Generalizar (a) para dar una fórmula que relacione $g(nx)$ con $g(x)$ válida para todo entero positivo n. Probar el resultado por inducción.
(c) Probar que $g(0) = 0$ y hallar el límite de $g(h)/h$ cuando $h \to 0$
(d) Existe una constante C tal que $g'(x) = g(x) + Ce^x$ para todo x. Demostrarlo y hallar el valor de C. [*Indicación:* Aplicar la definición de la derivada de $g'(x)$.]

10. Una función periódica de período a satisface $f(x + a) = f(x)$ para todo x de su dominio. ¿Qué se puede decir de una función que es derivable para todo valor de x y que satisface una ecuación de la forma:

$$f(x + a) = bf(x)$$

para todo x, donde a y b son constantes positivas?

11. Aplíquese la derivación logarítmica para deducir las fórmulas de derivación de productos y cocientes, de las fórmulas correspondientes de sumas y diferencias.

12. Sea $A = \int_0^1 e^t/(t + 1)\,dt$. Expresar los valores de las siguientes integrales, por medio de la integral A:

(a) $\displaystyle\int_{a-1}^{a} \frac{e^{-t}}{t - a - 1}\,dt.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{te^{t^2}}{t^2 + 1}\,dt.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t + 1)^2}\,dt.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 e^t \log(1 + t)\,dt.$

13. Sea $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ y sea $f(x) = e^x p(x)$.
(a) Probar que $f^n(0)$, derivada n-sima de f en el punto 0, es $c_0 + nc_1 + n(n - 1)c_2$.
(b) Resolver el mismo problema cuando p es un polinomio de grado 3.
(c) Generalizarlo a un polinomio de grado m.

14. Sea $f(x) = x \operatorname{sen} ax$. Probar que $f^{(2n)}(x) = (-1)^n(a^{2n}x \operatorname{sen} ax - 2na^{2n-1} \cos ax)$.

15. Demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k + m + 1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k + n + 1}.$$

[*Indicación:* $1/(k + m + 1) = \int_0^1 t^{k+m}\,dt$.]

16. Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Determinar una fórmula (o fórmulas) para calcular $F(x)$ para todo real x, si f está definida como sigue:

(a) $f(t) = (t + |t|)^2$.

(b) $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si } |t| \le 1, \\ 1 - |t| & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$

(c) $f(t) = e^{-|t|}$.

(d) $f(t) =$ el máximo de 1 y t^2.

17. Un sólido de revolución está engendrado por la rotación de la gráfica $y = f(x)$ para $[0, a]$ alrededor del eje x. Si para cada $a > 0$ el volumen es $a^2 + a$, hallar la función f.

18. Sea $f(x) = e^{-2x}$ para todo x. Se designa por $S(t)$ el conjunto de ordenadas de f en el intervalo $[0, t]$, siendo $t > 0$. Sea $A(t)$ el área de $S(t)$, $V(t)$ el volumen del sólido obtenido por la rotación de $S(t)$ en torno al eje x, y $W(t)$ el volumen del sólido obtenido por la rotación de $S(t)$ en torno al eje y. Calcular: a) $A(t)$; b) $V(t)$; c) $W(t)$; d) $\lim_{t\to 0} V(t)/A(t)$.

19. Sea c un número tal que $\operatorname{senh} c = \frac{3}{4}$. (No intentar el cálculo de c.) En cada caso hallar todos aquellos x (si existen algunos) que satisfacen la ecuación dada. Expresar la respuesta en función de log 2 y log 3.

(a) $\log(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) = c.$ (b) $\log(e^x - \sqrt{e^{2x} - 1}) = c.$

20. Determinar si cada una de las proposiciones siguientes es cierta o falsa. Probar las ciertas.

(a) $2^{\log 5} = 5^{\log 2}$.

(b) $\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_2 3}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} < 2\sqrt{n}$ para todo $n \geq 1$.

(d) $1 + \operatorname{senh} x \leq \cosh x$ para todo x.

En los Ejercicios 21 al 24, establecer cada desigualdad examinando el signo de la derivada de una función adecuada.

21. $\dfrac{2}{\pi} x < \operatorname{sen} x < x \quad$ si $\quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

22. $\dfrac{1}{x + \frac{1}{2}} < \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x} \quad$ si $\quad x > 0.$

23. $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x \quad$ si $\quad x > 0.$

24. $(x^b + y^b)^{1/b} < (x^a + y^a)^{1/a} \quad$ si $\quad x > 0, y > 0, \quad$ y $\quad 0 < a < b.$

25. Demostrar que

(a) $\int_0^x e^{-t}\, t\, dt = e^{-x}(e^x - 1 - x).$

(b) $\displaystyle\int_0^x e^{-t} t^2\, dt = 2!e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}\right).$

(c) $\displaystyle\int_0^x e^{-t} t^3\, dt = 3!e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right).$

(d) Enunciar la generalización sugerida y demostrarla por inducción.

26. Si a, b, a_1, b_1, son dados, y $ab \neq 0$, probar que existen constantes A, B, C tales que:

$$\int \frac{a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}\, dx = Ax + B \log |a \operatorname{sen} x + b \cos x| + C.$$

[*Indicación:* Probar que existen A y B tales que:

$$a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x = A(a \operatorname{sen} x + b \cos x) + B(a \cos x - b \operatorname{sen} x).]$$

27. Encontrar en cada caso una función f, que satisfaga las condiciones dadas:

(a) $f'(x^2) = 1/x$ para $x > 0$, $f(1) = 1$.
(b) $f'(\operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x$ para todo x, $f(1) = 1$.
(c) $f'(\operatorname{sen} x) = \cos^2 x$ para todo x, $f(1) = 1$.

(d) $f'(\log x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{para } x > 1, \end{cases}$ $f(0) = 0$.

28. Una función, llamada el *logaritmo integral* y que se representa por Li, se define como sigue:

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad \text{si } x \geq 2\,.$$

Esta función aparece en la Teoría analítica de números, donde se demuestra que $\operatorname{Li}(x)$ es una aproximación muy buena para el número de primos $\leq x$. Deducir las siguientes propiedades de $\operatorname{Li}(x)$.

(a) $\operatorname{Li}(x) = \dfrac{x}{\log x} + \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{2}{\log 2}$.

(b) $\operatorname{Li}(x) = \dfrac{x}{\log x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!\,x}{\log^{k+1} x} + n!\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} + C_n$,

donde C_n es una constante (dependiente de n). Hallar esta constante.
(c) Probar que existe una constante b tal que $\int_b^{\log x} e^t/t\,dt = \operatorname{Li}(x)$, y hallar el valor de b.
(d) Expresar la integral $\int_c^x e^{2t}/(t-1)\,dt$ por medio del logaritmo integral donde $c = 1 + \frac{1}{2}\log 2$.
(e) Sea $f(x = e^4 \operatorname{Li}(e^{2x-4}) - e^2 \operatorname{Li}(e^{2x-2})$ si $x > 3$. Probar que:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}\,.$$

29. Sea $f(x) = \log|x|$ si $x < 0$. Demostrar que f tiene inversa, y designar esta inversa por g. ¿Cuál es el dominio de g? Hallar una fórmula para calcular $g(y)$ para cada y en el dominio de g. Dibujar la gráfica de g.
30. Sea $f(x) = \int_0^x (1 + t^3)^{-1/2}\,dt$ si $x \geq 0$. (No intentar el cálculo de esta integral.)
a) Demostrar que f es estrictamente creciente en el eje real no negativo.
b) Designar por g la inversa de f. Demostrar que la derivada segunda de g es proporcional a g^2 [esto es, $g''(y) = cg^2(y)$ para cada y en el dominio de g] y hallar la constante de proporcionalidad.

7

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS

7.1 Introducción

Los polinomios figuran entre las funciones más sencillas que se estudian en Análisis. Son adecuadas para trabajar en cálculos numéricos porque sus valores se pueden obtener efectuando un número finito de multiplicaciones y adiciones. En el capítulo 6 se vio que la función logaritmo puede aproximarse por polinomios lo que nos permite calcular logaritmos con la precisión que se desee. En este capítulo demostraremos que muchas otras funciones, tales como la exponencial y las trigonométricas, pueden también aproximarse por polinomios. Si la diferencia entre una función y su aproximación polinómica es suficientemente pequeña, entonces podemos, a efectos prácticos, calcular con el polinomio en lugar de hacerlo con la función original.

Existen muchas maneras de aproximar una función dada f por polinomios, dependiendo del uso que se ha de hacer de la aproximación. En este capítulo nos interesará obtener un polinomio que coincida con f y algunas de sus derivadas en un punto dado. Empezamos nuestro comentario con un ejemplo sencillo.

Supongamos que f es la función exponencial, $f(x) = e^x$. En el punto $x = 0$, la función f y todas sus derivadas valen 1. El polinomio de primer grado

$$g(x) = 1 + x$$

también tiene $g(0) = 1$ y $g'(0) = 1$, de manera que coincide con f y su derivada primera en 0. Geométricamente, esto significa que la gráfica de g es la recta tangente a f en el punto $(0, 1)$, como se aprecia en la figura 7.1.

Si aproximamos f por un polinomio de segundo grado Q que coincida con f y sus dos primeras derivadas en 0, podemos esperar una mejor aproximación de f que con la función lineal g, por lo menos en las proximidades de $(0, 1)$. El polinomio

$$Q(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$

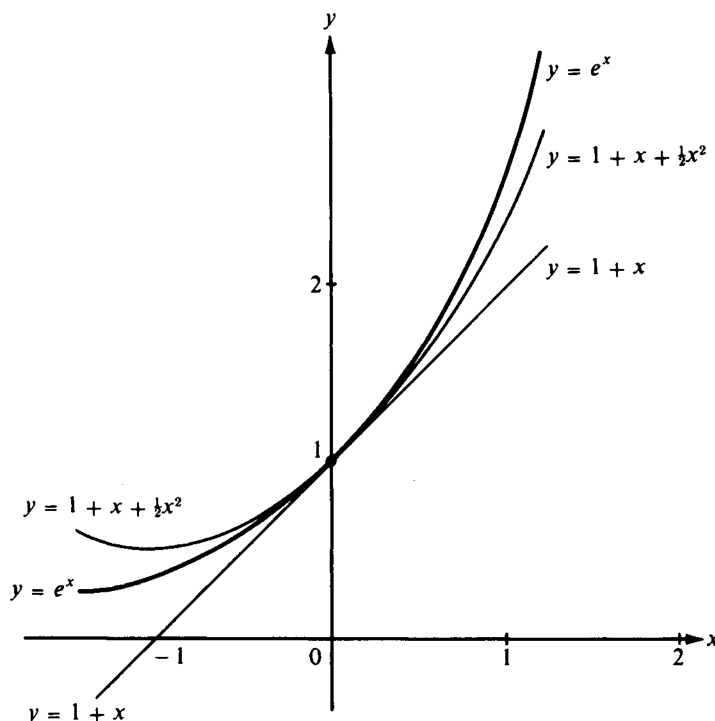


FIGURA 7.1 *Polinomios de aproximación de la curva* $y = e^x$ *cerca del punto* (0, 1).

tiene $Q(0) = Q'(0) = 1$ y $Q''(0) = f''(0) = 1$. La figura 7.1 nos muestra que la gráfica de Q aproxima la curva $y = e^x$ mejor que la recta $y = 1 + x$ en las proximidades de (0, 1). Podemos intentar aún mejorar la aproximación utilizando polinomios que coincidan con f y sus derivadas tercera y de órdenes superiores. Es fácil comprobar que el polinomio

$$(7.1) \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

coincide con la función exponencial y sus n primeras derivadas en el punto $x = 0$. Naturalmente, antes de que podamos usar tales polinomios para el cálculo de valores aproximados de la función exponencial, necesitamos alguna información acerca del error cometido en la aproximación. Mejor que discutir este ejemplo particular con más detalle, es preferible que volvamos a la teoría general.

7.2 Polinomios de Taylor engendrados por una función

Supongamos que f tiene derivadas hasta el orden n en el punto $x = 0$, siendo $n \geq 1$, e intentemos encontrar un polinomio P que coincida con f y sus n primeras derivadas en 0. Deben satisfacerse $n + 1$ condiciones, a saber

$$P(0) = f(0), \qquad P'(0) = f'(0), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0), \tag{7.2}$$

así que ensayamos un polinomio de grado n, por ejemplo

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n, \tag{7.3}$$

con $n + 1$ coeficientes por determinar. Utilizaremos las condiciones (7.2) para determinar esas condiciones en forma sucesiva.

Pondremos, primero, $x = 0$ en (7.3) y encontramos $P(0) = c_0$, con lo que $c_0 = f(0)$. Seguidamente, derivamos ambos miembros de (7.3) y sustituimos $x = 0$ una vez más encontrando $P'(0) = c_1$; luego $c_1 = f'(0)$. Derivando otra vez (7.3) y poniendo $x = 0$, encontramos que $P''(0) = 2c_2$, de modo que $c_2 = f''(0)/2$. Tras derivar k veces, encontramos $P^{(k)}(0) = k!\, c_k$, y esto nos da la fórmula

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{7.4}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. [Cuando $k = 0$, se atribuye a $f^{(0)}(0)$ el valor $f(0)$.] Este razonamiento demuestra que existe un polinomio de grado $\leq n$ que satisfaga (7.2), sus coeficientes son necesariamente los dados por (7.4). (El grado de P será igual a n si y sólo si $f^{(n)} \neq 0$.) Recíprocamente, es fácil comprobar que el polinomio P cuyos coeficientes son los dados por (7,4) satisface (7.2) y por consiguiente se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 7.1. *Sea f una función con derivadas de orden n en el punto $x = 0$. Existe un polinomio P y uno sólo de grado $\leq n$ que satisface las $n + 1$ condiciones*

$$P(0) = f(0), \qquad P'(0) = f'(0), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

Tal polinomio viene dado por la fórmula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

En la misma forma, podemos demostrar que existe un polinomio y uno sólo de grado $\leq n$ que coincide con f y sus n primeras derivadas en el punto $x = a$. En efecto, en lugar de (7.3), podemos escribir P ordenado según las potencias de $x - a$ y proceder como antes. Si calculamos las derivadas en el punto a en lugar de 0, llegamos al polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{7.5}$$

Éste es el único polinomio de grado $\leq n$ que satisface las condiciones

$$P(a) = f(a), \qquad P'(a) = f'(a), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

y se le llama *polinomio de Taylor* en honor del matemático Brook Taylor (1685-1731). Con mayor precisión, decimos que el polinomio (7.5) es el *polinomio de Taylor de grado n generado por f en el punto a.*

Conviene tener una notación que indique la dependencia del polinomio de Taylor P respecto de f y n. Indicaremos esa dependencia escribiendo $P = T_n f$ o $P = T_n(f)$. El símbolo T_n se denomina *operador de Taylor* de grado n. Cuando este operador se aplica a una función f, produce una nueva función $T_n f$, el polinomio de Taylor de grado n. El valor de esta función en x se representa con $T_n f(x)$ o por $T_n[f(x)]$. Si queremos indicar la dependencia respecto de a, escribimos $T_n f(x;a)$ en lugar de $T_n f(x)$.

EJEMPLO 1. Cuando f es la función exponencial, $f(x) = E(x) = e^x$, tenemos $E^{(k)}(x) = e^x$ para todo k, así que $E^{(k)}(0) = e^0 = 1$, y el polinomio de Taylor de grado n generado por E en 0 es el dado por la fórmula

$$T_n E(x) = T_n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Si queremos un polinomio que coincida con E y sus derivadas en el punto $a = 1$, tenemos $E^{(k)}(1) = e$ para todo k, por lo que (7.5) nos da

$$T_n E(x; 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

EJEMPLO 2. Cuando $f(x) = \operatorname{sen} x$, tenemos $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, etc., así que $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ y $f^{(2n)}(0) = 0$.

Así pues tan sólo aparecen potencias impares de x en los polinomios de Taylor generados por la función seno, en 0. El polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ tiene la forma

$$T_{2n+1}(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

EJEMPLO 3. Razonando como en el ejemplo 2, encontramos que los polinomios de Taylor generados por la función coseno en 0 sólo contienen potencias impares de x. El polinomio de grado $2n$ viene dado por

$$T_{2n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Obsérvese que cada polinomio de Taylor $T_{2n}(\cos x)$ es la derivada del polinomio de Taylor T_{2n+1} $(\operatorname{sen} x)$. Esto es debido al hecho de que el coseno es la derivada del seno. En la siguiente Sección vemos que ciertas relaciones que son válidas entre funciones se transmiten a sus polinomios de Taylor.

7.3 Cálculo con polinomios de Taylor

Si una función f tiene derivadas de orden n en un punto a, podemos siempre formar su polinomio de Taylor T_nf por medio de la fórmula

$$T_nf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Algunas veces el cálculo de las derivadas $f^{(k)}(a)$ puede resultar laborioso, por lo que es deseable disponer de otros métodos para determinar polinomios de Taylor. El próximo teorema nos expone propiedades del operador de Taylor que a menudo nos permiten obtener nuevos polinomios de Taylor a partir de otros dados. En este teorema se sobrentiende que todos los polinomios de Taylor son obtenidos en un mismo punto a.

TEOREMA 7.2. *El operador de Taylor T_n tiene las propiedades siguientes:*
a) *Linealidad. Si c_1 y c_2 son constantes,*

$$T_n(c_1f + c_2g) = c_1T_n(f) + c_2T_n(g).$$

b) *Derivación. La derivada de un polinomio de Taylor de f es un polinomio de Taylor de f'; es decir, se tiene*

$$(T_nf)' = T_{n-1}(f').$$

c) *Integración. Una integral indefinida de un polinomio de Taylor de f es un polinomio de Taylor de una integral indefinida de f. Dicho con mayor precisión, si* $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *se tiene entonces*

$$T_{n+1}g(x) = \int_a^x T_n f(t)\,dt\,.$$

Demostración. Cada proposición a), b) o c) es una ecuación que liga dos polinomios del mismo grado. Para demostrar cada una de ellas observemos simplemente que el polinomio que aparece en el primer miembro tiene el mismo valor y las mismas derivadas en el punto a que el que aparece en el segundo miembro. Entonces basta que recordemos la propiedad de unicidad del teorema 7.1. Obsérvese que la derivación de un polinomio rebaja su grado, en tanto que la integración lo aumenta.

El teorema siguiente nos dice lo que sucede cuando sustituimos x por cx en un polinomio de Taylor.

TEOREMA 7.3. PROPIEDAD DE SUSTITUCIÓN. Sea $g(x) = f(cx)$, *siendo* c *una constante. Se tiene entonces*

$$T_n g(x; a) = T_n f(cx; ca)\,.$$

En particular, cuando $a = 0$, *tenemos* $T_n g(x) = T_n f(cx)$.

Demostración. Ya que $g(x) = f(cx)$, la regla de la cadena nos da

$$g'(x) = cf'(cx)\,, \qquad g''(x) = c^2 f''(cx), \qquad \ldots, \qquad g^{(k)}(x) = c^k f^{(k)}(cx)\,.$$

Por tanto obtenemos

$$T_n g(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(ca)}{k!}(cx-ca)^k = T_n f(cx; ca)\,.$$

EJEMPLOS. Reemplazando x por $-x$ en el polinomio de Taylor correspondiente a e^x, encontramos que

$$T_n(e^{-x}) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\,.$$

Puesto que $\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, podemos utilizar la propiedad de linealidad para obtener

$$T_{2n}(\cosh x) = \tfrac{1}{2}T_{2n}(e^x) + \tfrac{1}{2}T_{2n}(e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

La derivación nos da

$$T_{2n-1}(\operatorname{senh} x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

El teorema que sigue es también útil en la simplificación de cálculos con polinomios de Taylor.

TEOREMA 7.4. *Sea P_n un polinomio de grado $n \geq 1$. Sean f y g dos funciones con derivadas de orden n en 0 y supongamos que*

(7.6) $$f(x) = P_n(x) + x^n g(x),$$

en donde $g(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. El polinomio P_n es el polinomio de Taylor generado por f en 0.

Demostración. Sea $h(x) = f(x) - P_n(x) = x^n g(x)$. Derivando repetidamente el producto $x^n g(x)$, vemos que h y sus n primeras derivadas son 0 en $x = 0$. Por consiguiente, f coincide con P_n y sus n primeras derivadas en 0, de manera que $P_n = T_n f$, como se afirmó.

EJEMPLOS. Partiendo de la identidad algebraica

(7.7) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

válida para todo $x \neq 1$, vemos que (7.6) se satisface con $f(x) = 1/(1-x)$ $P_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n$, y $g(x) = x/(1-x)$. Puesto que $g(x) \to 0$ cuando $x \to 0$, el teorema 7.4 nos dice que

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Integrando esta relación conseguimos este otro polinomio de Taylor

$$T_{n+1}[-\log(1-x)] = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En (7.7) podemos reemplazar x por $-x^2$ para conseguir

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}.$$

Aplicando el teorema 7.4 una vez más, encontramos que

$$T_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}.$$

Integrando esta relación llegamos a la fórmula

$$T_{2n+1}(\arctan x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

7.4 Ejercicios

1. Trazar las gráficas de los polinomios de Taylor $T_3(\operatorname{sen} x) = x - x^3/3!$ y $T_5(\operatorname{sen} x) = x - x^3/3! + x^5/5!$. Poner especial atención en los puntos en los que las curvas cortan al eje x. Comparar estas gráficas con la de $f(x) = \operatorname{sen} x$.
2. Hacer lo mismo que en el Ejercicio 1 para los polinomios de Taylor $T_2(\cos x)$, $T_4(\cos x)$, y $f(x) = \cos x$.

En los Ejercicios 3 al 10, obtener los polinomios de Taylor $T_n f(x)$ que se indican. Los teoremas 7.2, 7.3 y 7.4 ayudarán para simplificar los cálculos en varios casos.

3. $T_n(a^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\log a)^k}{k!} x^k.$
4. $T_n\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$
5. $T_{2n+1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}.$
6. $T_n[\log(1+x)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$
7. $T_{2n+1}\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$
8. $T_n\left(\frac{1}{2-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}}.$
9. $T_n[(1+x)^\alpha] = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k,$ donde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$
10. $T_{2n}(\operatorname{sen}^2 x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}.$ [*Indicación*: $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.]

7.5 Fórmula de Taylor con resto

Volvamos ahora a una discusión del error en la aproximación de una función f mediante su polinomio de Taylor $T_n f$ en un punto a. El error se define como la diferencia $E_n(x) = f(x) - T_n f(x)$. Así que, si f tiene derivada de orden n en a, podemos escribir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x) \,. \tag{7.8}$$

Ésta se denomina *fórmula de Taylor con resto* $E_n(x)$; es útil cuando podemos estimar la magnitud de $E_n(x)$. Expresaremos el error como una integral y entonces se estima la magnitud de la integral. Consideremos primero el error que aparece con una aproximación lineal.

TEOREMA 7.5. *Supongamos que f tiene derivada segunda f'' continua en un cierto entorno de a. Entonces, para todo x en ese entorno, se tiene*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x)\,,$$

en donde

$$E_1(x) = \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt \,.$$

Demostración. Según la definición del error podemos escribir

$$E_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f'(t)\,dt - f'(a)\int_a^x dt = \int_a^x [f'(t) - f'(a)]\,dt .$$

La última integral puede ponerse en la forma $\int_a^x u\,dv$, donde $u = f'(t) - f'(a)$, y $v = t - x$. Asimismo $du/dt = f''(t)$ y $dv/dt = 1$, con lo que la fórmula de integración por partes nos da

$$E_1(x) = \int_a^x u\,dv = uv\Big|_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt = \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt\,,$$

puesto que $u = 0$ cuando $t = a$, y $v = 0$ cuando $t = x$. Esto demuestra el teorema

El resultado correspondiente para un polinomio de aproximación de grado n viene dado por el siguiente

TEOREMA 7.6. *Supongamos que f tenga derivada continua de orden $n+1$ en un cierto intervalo que contenga a. Entonces, para todo x en este intervalo, tenemos la fórmula de Taylor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x),$$

siendo

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt .$$

Demostración. El teorema se demuestra por inducción respecto a n. Lo hemos ya demostrado para $n = 1$. Supongamos ahora que es cierto para un cierto n y lo vamos a demostrar para $n + 1$. Escribamos la fórmula de Taylor (7.8) con $n + 1$ y con n y restando obtenemos

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Utilizamos la expresión integral de $E_n(x)$ y observando que $(x-a)^{n+1}/(n+1) = \int_a^x (x-t)^n\, dt$ se obtiene

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, dt =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n [f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)]\, dt .$$

La última integral puede escribirse en la forma $\int_a^x u\, dv$, donde $u = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)$ y $v = -(x-t)^{n+1}/(n+1)$. Integrando por partes y teniendo en cuenta que $u = 0$ cuando $t = a$, y que $v = 0$ cuando $t = x$, encontramos que

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x u\, dv = -\frac{1}{n!}\int_a^x v\, du = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt .$$

Esto completa el paso inductivo de n a $n + 1$, con lo que el teorema es válido para todo $n \geq 1$.

7.6 Estimación del error en la fórmula de Taylor

Puesto que el error $E_n(x)$ en la fórmula de Taylor ha sido expresado en forma de integral que afecta a la derivada de orden $n + 1$ de f necesitamos alguna

información más acerca $f^{(n+1)}$ antes de poder estimar la magnitud de $E_n(x)$, como se explica en el teorema que sigue.

TEOREMA 7.7. *Si la derivada $(n+1)$-ésima de f satisface las desigualdades*

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M \tag{7.9}$$

para todo t en un cierto intervalo que contenga a, entonces para todo x en este intervalo tenemos la estimación siguiente

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{si} \quad x > a\,, \tag{7.10}$$

y

$$m\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1}E_n(x) \leq M\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{si} \quad x < a\,. \tag{7.11}$$

Demostración. Supongamos que $x > a$. Entonces la integral para $E_n(x)$ se extiende al intervalo $[a, x]$. Para cada t en este intervalo tenemos $(x-t)^n \geq 0$, con lo que las desigualdades (7.9) nos dan

$$m\frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \leq M\frac{(x-t)^n}{n!}$$

Integrando entre a y x, encontramos que

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt \leq E_n(x) \leq \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt\,. \tag{7.12}$$

La sustitución $u = x - t$, $du = -\,dt$ nos da

$$\int_a^x (x-t)^n\,dt = \int_0^{x-a} u^n\,du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\,,$$

con lo que (7.12) se reduce a (7.10).

Si $x < a$, la integración se efectúa en $[x, a]$. Para cada t en este intervalo tenemos $t \geq x$, con lo que $(-1)^n(x-t)^n = (t-x)^n \geq 0$. Por consiguiente, podemos multiplicar las desigualdades (7.9) por el factor no negativo $(-1)^n(x-t)^n/n!$ e integramos entre x y a obteniendo (7.11).

EJEMPLO 1. Si $f(x) = e^x$ y $a = 0$, tenemos la fórmula

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

Puesto que $f^{(n+1)}(x) = e^x$, la derivada $f^{(n+1)}$ es monótona creciente en cualquier intervalo, y por tanto satisface las desigualdades $e^b \leq f^{(n+1)}(t) \leq e^c$ en todo intervalo de la forma $[b, c]$. En un tal intervalo, las desigualdades relativas a $E_n(x)$ del teorema 7.7 se satisfacen para $m = e^b$ y $M = e^c$. En particular, cuando $b = 0$, tenemos

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{si} \quad 0 < x \leq c\,.$$

Podemos utilizar estas estimaciones para calcular el número e de Euler. Se toma $b = 0$, $c = 1$, $x = 1$, y teniendo en cuenta que $e < 3$ obtenemos

(7.13) $$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + E_n(1)\,, \qquad \text{donde} \quad \frac{1}{(n+1)!} \leq E_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}\,.$$

Esto permite el cálculo de e con el grado de aproximación que se desee. Por ejemplo, si deseamos el valor de e con siete cifras decimales exactas, elegimos un n tal que $3/(n + 1)! < \frac{1}{2}10^{-8}$. Pronto veremos que $n = 12$ es suficiente. Con bastante rapidez se puede calcular una tabla de valores de $1/n!$ debido a que $1/n!$ puede calcularse dividiendo $1/(n - 1)!$ por n. La siguiente tabla para $3 \leq n \leq 12$ contiene esos números redondeados hasta nueve decimales. El «redondeo» está en cada caso indicado por un más o un menos lo que nos indica si la corrección es por exceso o por defecto. (En cualquier caso, el error es menor que media unidad del último orden decimal considerado.)

n	$\frac{1}{n!}$	n	$\frac{1}{n!}$
3	0,166 666 667 −	8	0,000 024 802 −
4	0,041 666 667 −	9	0,000 002 756 −
5	0,008 333 333 +	10	0,000 000 276 −
6	0,001 388 889 −	11	0,000 000 025 +
7	0,000 198 413 −	12	0,000 000 002 +

Los términos correspondientes a $n = 0, 1, 2$ tienen suma $\frac{5}{2}$. Sumando este número a los valores de la tabla (para $n \leq 12$), obtenemos un total de 2,718281830. Si tenemos en cuenta los redondeos, el valor *efectivo* de esta suma puede ser menor que aquel valor, difiriendo a lo sumo en $\frac{7}{2}$ de una unidad del último orden decimal conservado (debido a los siete signos menos), o puede exceder a lo sumo en $\frac{3}{2}$ de unidad del último orden decimal (debido a los tres signos menos). Llamemos a la suma s. Entonces todo lo que podemos asegurar mediante este cálculo es la desigualdad $2{,}718281826 < s < 2{,}718281832$. La estimación del error $E_{12}(1)$ nos da $0{,}000000000 \leq E_{12}(1) < 0{,}000000001$. Puesto que $e = s + E_{12}(1)$, este cálculo nos lleva a las desigualdades siguientes para e:

$$2{,}718281826 < e < 2{,}718281833.$$

Esto nos dice que el valor de e, con siete cifras decimales, es $e = 2{,}7182818$, o que el valor de e redondeado a ocho decimales, es $e = 2{,}71828183$.

EJEMPLO 2. *Irracionalidad de e.* Podemos utilizar la anterior estimación del error $E_n(1)$ para demostrar que e es irracional. Empezamos escribiendo las desigualdades (7.13) del modo siguiente:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Multiplicando por $n!$, se obtiene

$$\frac{1}{n+1} \leq n!\, e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} \tag{7.14}$$

si $n \geq 3$. Para cada n la suma respecto a k es un entero. Si e fuera racional, podríamos elegir n lo bastante grande para que también $n!e$ fuese entero. Pero entonces (7.14) nos diría que la diferencia de esos dos enteros sería un número entero no mayor que $\frac{3}{4}$, lo cual es imposible. Por tanto e no puede ser racional.

Las aproximaciones por polinomios nos permiten con frecuencia obtener valores numéricos aproximados de integrales que no se pueden calcular directamente mediante funciones elementales. Un ejemplo famoso es la integral

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt\,.$$

que se presenta en la teoría de probabilidades y en muchos problemas de Física. Es sabido que la función f así definida no es una *función elemental*. Es decir,

f no puede obtenerse a partir de polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas o trigonométricas inversas mediante un número finito de pasos en los que intervengan las operaciones de adición, substracción, multiplicación, división, o composición. Otros ejemplos que con frecuencia se presentan tanto en teoría como en la práctica son las integrales

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \qquad \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt\,, \qquad \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\,dt\,.$$

(En la primera de éstas, se sobrentiende que el cociente $(\operatorname{sen} t)/t$ se reemplaza por 1 cuando $t = 0$. En la tercera, k es una constante, $0<k<1$.) Terminamos esta Sección con un ejemplo que hace ver cómo la fórmula de Taylor puede usarse para obtener una buena estimación de la integral $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$.

EJEMPLO 3. La fórmula de Taylor para e^x con $n = 4$ nos da

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + E_4(x)\,. \tag{7.15}$$

Supongamos ahora que $x \leq 0$. En cualquier intervalo de la forma $[-c, 0]$ tenemos $e^{-c} \leq e^x \leq 1$, de modo que podemos utilizar las desigualdades (7.11) del teorema 7.7 como $m = e^{-c}$ y $M = 1$ para escribir

$$0 < (-1)^5 E_4(x) \leq \frac{(-x)^5}{5!} \qquad \text{si} \quad x < 0\,.$$

Dicho de otro modo, si $x < 0$, entonces $E_4(x)$ es negativa y $\geq x^5/5!$. Reemplazando x por $-t^2$ en (7.15), tenemos

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + E_4(-t^2)\,, \tag{7.16}$$

en donde $-t^{10}/5! \leq E_4(-t^2) < 0$. Si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, encontramos que $t^{10}/5! \leq$ $\leq (\frac{1}{2})^{10}/5! < 0{,}000009$. Así que, si integramos (7.16) entre 0 y $\frac{1}{2}$, obtenemos

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 2^7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 2^9 \cdot 4!} - \theta\,,$$

donde $0 < \theta \leq 0{,}0000045$. Redondeando hasta cuatro decimales, encontramos $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt = 0{,}4613$.

*7.7 Otras formas de la fórmula de Taylor con resto

Hemos expresado el error en la fórmula de Taylor como una integral

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$

También puede expresarse en muchas otras formas. Puesto que el factor $(x - t)^n$ del integrando nunca cambia de signo en el intervalo de integración, y que $f^{(n+1)}$ es continua en este intervalo, el teorema del valor medio ponderado para integrales (teorema 3.16) nos da

$$\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x - t)^n\, dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}\,,$$

estando c en el intervalo cerrado que une a con x. Por consiguiente, el error puede escribirse en la forma

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}\,.$$

Esta es la llamada forma de Lagrange del resto. Se parece a los anteriores términos de la fórmula de Taylor, salvo que la derivada $f^{(n+1)}(c)$ está calculada en un cierto punto c desconocido y no en el punto a. El punto c depende de x y de n, tanto como de f.

Con un razonamiento de tipo distinto, podemos prescindir de la continuidad de $f^{(n+1)}$ y deducir la fórmula de Lagrange y otras formas del resto bajo hipótesis más débiles. Supongamos que $f^{(n+1)}$ existe en un cierto intervalo abierto (h, k) que contenga el punto a, y que $f^{(n)}$ sea continua en el intervalo cerrado $[h, k]$. Elijamos cualquier $x \neq a$ en $[h, k]$. Para simplificar, admitamos que $x > a$. Mantengamos x fijo y definamos una nueva función F en el intervalo $[a, x]$ del siguiente modo:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k\,.$$

Observemos que $F(x) = f(x)$ y $F(a) = T_n f(x; a)$, con lo que $F(x) - F(a) = E_n(x)$. La función F es continua en el intervalo cerrado $[a, x]$ y es derivable en el intervalo abierto (a, x). Si calculamos $F'(t)$, teniendo en cuenta que cada término

de la suma que define $F(t)$ es un producto, encontramos que todos los términos se reducen excepto uno, y nos queda la igualdad

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Sea ahora G cualquier función continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x). Podemos entonces aplicar la fórmula del valor medio de Cauchy (teorema 4.6) y escribir

$$G'(c)[F(x) - F(a)] = F'(c)[G(x) - G(a)].$$

para un cierto c en el intervalo abierto (a, x). Si G' no es cero en (a, x), se obtiene la siguiente fórmula para el error $E_n(x)$:

$$E_n(x) = \frac{F'(c)}{G'(c)} [G(x) - G(a)].$$

Podemos expresar el error de varias maneras mediante elecciones distintas de la función G. Por ejemplo, tomando $G(t) = (x - t)^{n+1}$, obtenemos la forma de Lagrange

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad \text{donde} \quad a < c < x.$$

Tomando $G(t) = x - t$, obtenemos otra fórmula, llamada forma de Cauchy del resto,

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a), \qquad \text{donde} \quad a < c < x.$$

Si $G(t) = (x - t)^p$, siendo $p \geq 1$, obtenemos la fórmula

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p, \qquad \text{donde} \quad a < c < x.$$

7.8 Ejercicios

En los Ejercicios 1, 2 y 3 se dan ejemplos de fórmulas de Taylor con resto. En cada caso demostrar que el error satisface las desigualdades que se dan.

1. $$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + E_{2n}(x), \qquad |E_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + E_{2n+1}(x), \qquad |E_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

3. $\arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + E_{2n}(x), \qquad |E_{2n}(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ si $0 \leq x \leq 1.$

4. a) Obtener el número $r = \sqrt{15} - 3$ como aproximación de la raíz no nula de la ecuación $x^2 - \operatorname{sen} x$ utilizando el polinomio de Taylor de tercer grado que aproxima $\operatorname{sen} x$.
b) Demostrar que la aproximación de la parte a) satisface la desigualdad

$$|\operatorname{sen} r - r^2| < \frac{1}{200},$$

dado que $\sqrt{15} - 3 < 0{,}9$. Decir si la diferencia $(\operatorname{sen} r - r^2)$ es positiva o negativa. Dar los detalles del razonamiento seguido.

5. a) Utilizar el polinomio de Taylor de tercer grado que aproxima $\arctan x$ para obtener el número $r = (\sqrt{21} - 3)/2$ como aproximación de la raíz no nula de la ecuación $\arctan x = x^2$.
b) Dado que $\sqrt{21} < 4{,}6$ y que $2^{16} = 65536$, demostrar que la aproximación de la parte a) satisface la desigualdad

$$|r^2 - \arctan r| < \frac{7}{100}.$$

Decir si la diferencia $(r^2 - \arctan r)$ es positiva o negativa. Dar los detalles del razonamiento seguido.

6. Demostrar que $\int_0^1 \frac{1 + x^{30}}{1 + x^{60}}\, dx = 1 + \frac{c}{31}$, donde $0 < c < 1$.

7. Demostrar que $0{,}493948 < \int_0^{1/2} \frac{1}{1 + x^4}\, dx < 0{,}493958.$

8. a) Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, demostrar que $\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + r(x)$, donde $|r(x)| \leq (\frac{1}{2})^5/5!$.
b) Utilizar la estimación de la parte a) para encontrar un valor aproximado de la integral $\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$. Dar una estimación del error.
9. Utilizar los tres primeros términos no nulos de la fórmula de Taylor de $\operatorname{sen} x$ para encontrar un valor aproximado de la integral $\int_0^1 (\operatorname{sen} x)/x\, dx$ y dar una estimación del error. [Se sobrentiende que el cociente $(\operatorname{sen} x)/x$ es igual a 1 cuando $x = 0$.]
10. En este Ejercicio se expone un método para calcular π, usando la fórmula de Taylor de $\arctan x$ dada en el Ejercicio 3. Se basa en que π es próximo a 3,2, de modo que $\frac{1}{4}\pi$ es próximo a 0,8 ó $\frac{4}{5}$, y este valor es próximo a $4 \arctan \frac{1}{5}$. Poner $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$, $\beta = 4\alpha - \frac{1}{4}\pi$.
a) Utilizar la identidad $\tan(A + B) = (\tan A + B)/(1 - \tan A \tan B)$ poniendo $A = B = \alpha$ y luego $A = B = 2\alpha$ para hallar $\tan 2\alpha = \frac{5}{12}$ y $\tan 4\alpha = \frac{120}{119}$. Utilizar entonces la identidad una vez más con $A = 4\alpha$, $B = -\frac{1}{4}\pi$ obteniendo $\tan \beta\ \frac{1}{239}$. Esto origina la siguiente identidad notable descubierta en 1706 por John Machin (1680-1751):

$$\pi = 16 \arctan \tfrac{1}{5} - 4 \arctan \tfrac{1}{239}.$$

b) Utilizar el polinomio de Taylor $T_{11}(\arctan x)$ con $x = \frac{1}{5}$ para demostrar que

$$3{,}158328934 < 16 \arctan \tfrac{1}{5} < 3{,}158328972.$$

c) Utilizar el polinomio de Taylor $T_3(\arctan x)$ con $x = \frac{1}{239}$ para demostrar que

$$-0{,}016736309 < -4 \arctan \tfrac{1}{239} < -0{,}016736300.$$

d) Utilizar las partes a), b) y c) para demostrar que el valor de π, con siete decimales es 3,1415926.

7.9 Otras observaciones sobre el error en la fórmula de Taylor. La notación *o*

Si f tiene derivada de orden $(n + 1)$ continua en un cierto intervalo que contenga un punto a, podemos escribir la fórmula de Taylor en la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x)\,. \tag{7.17}$$

Supongamos que mantenemos x en un cierto intervalo cerrado $[a - c, a + c]$ con centro en a, en el que $f^{(n+1)}$ es continua. Entonces $f^{(n+1)}$ está acotada en este intervalo y satisface por tanto una desigualdad de la forma

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M\,,$$

siendo $M > 0$. Luego, según el teorema 7.7, tenemos la estimación de error

$$|E_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

para cada x en $[a - c, a + c]$. Si mantenemos $x \neq a$ y dividimos esa desigualdad por $|x - a|^n$, encontramos que

$$0 \leq \left| \frac{E_n(x)}{(x-a)^n} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|\,.$$

Si ahora hacemos que $x \to a$, vemos que $E_n(x)/(x - a)^n \to 0$. Esto lo expresamos diciendo que el error $E_n(x)$ es de orden inferior a $(x - a)^n$ cuando $x \to a$

Es decir, en las condiciones establecidas, $f(x)$ puede aproximarse en un entorno de a por un polinomio en $(x - a)$ de grado n, y el error en esta aproximación es de orden inferior a $(x - a)^n$ cuando $x \to a$.

En 1909 E. Landau, (†) introdujo una notación especial muy apropiada cuando se utiliza en conexión con la fórmula de Taylor. Esta es la notación o (la notación o minúscula) y se define como sigue.

DEFINICIÓN. *Supongamos* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \neq a$ *en un cierto intervalo que contenga a. La notación*

$$f(x) = o(g(x)) \text{ cuando } x \to a$$

significa que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

El símbolo $f(x) = o(g(x)$ se lee «$f(x)$ es o-minúscula de $f(x)$» o «$f(x)$ es de orden inferior a $g(x)$», y tiene por objeto dar a entender la idea de que para x próximo a a, $f(x)$ es pequeño comparado con $g(x)$.

EJEMPLO 1. $f(x) = o(1)$ cuando $x \to a$ significa que $f(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

EJEMPLO 2. $f(x) = o(x)$ cuando $x \to 0$ significa que $f(x)/x \to 0$ cuando $x \to 0$.

Una igualdad de la forma $f(x) = h(x) + o(g(x))$ significa que $f(x) - h(x) = o(g(x))$ o, dicho de otro modo, $[f(x) - h(x)]/g(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

EJEMPLO 3. Tenemos $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ porque $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \to 0$ cuando $x - 0$.

Las observaciones precedentes relativas al error en la fórmula de Taylor pueden ahora expresarse con la notación-o. Podemos escribir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n) \text{ cuando } x \to a ,$$

(†) Edmundo Landau (1877-1938) fue un famoso matemático alemán que hizo importantes contribuciones a la Matemática. Es conocido por sus libros de Análisis y de Teoría de números, llenos de claridad.

siempre que la derivada $f^{(n+1)}$ sea continua en un cierto intervalo que contenga el punto a. Esto expresa, brevemente, el hecho de que el término de error es pequeño comparado con $(x - a)^n$ cuando x es próximo a a. En particular, de la discusión hecha en anteriores seccciones, tenemos los ejemplos siguientes de fórmula de Taylor expresadas con la notación o:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \text{ cuando } x \to 0\,.$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \text{ cuando } x \to 0\,.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ cuando } x \to 0\,.$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \text{ cuando } x \to 0\,.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \text{ cuando } x \to 0\,.$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}) \text{ cuando } x \to 0\,.$$

En los cálculos relativos a aproximaciones de Taylor, con frecuencia se hace necesario combinar varios términos que contienen el símbolo-o. En el teorema que sigue se dan unas pocas reglas sencillas para el manejo de los símbolos-o. La mayor parte de las situaciones que en la práctica pueden surgir pueden resolverse con esas reglas.

TEOREMA 7.8. ÁLGEBRA DE SÍMBOLOS-o. *Cuando $x \to a$, tenemos*:

(a) $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$.
(b) $o(cg(x)) = o(g(x))$ *si* $c \neq 0$.
(c) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$.
(d) $o(o(g(x))) = o(g(x))$.
(e) $\dfrac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + o(g(x))$ *si* $g(x) \to 0$ *cuando* $x \to a$.

Demostración. La proposición a) significa que si $f_1(x) = o(g(x))$ y si $f_2(x) = o(g(x))$, entonces $f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))$. Pero puesto que se tiene

$$\frac{f_1(x) \pm f_2(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g(x)} \pm \frac{f_2(x)}{g(x)},$$

cada término del segundo miembro tiende a 0 cuando $x \to a$, con lo cual la parte a) queda demostrada. Las proposiciones b), c) y d) se demuestran en forma análoga.

Para demostrar e), partimos de la identidad algebraica

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u\frac{u}{1+u}$$

y reemplazamos u por $g(x)$ observando entonces que $\dfrac{g(x)}{1+g(x)} \to 0$ cuando $x \to a$.

EJEMPLO 1. Demostrar que $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ cuando $x \to 0$.

Solución. Utilizamos las aproximaciones de Taylor para el seno y el coseno. De la parte a) del teorema 7.8, sustituyendo $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, tenemos

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ cuando } x \to 0\,.$$

Por consiguiente, resulta

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,.$$

EJEMPLO 2. Demostrar que $(1+x)^{1/x} = e \cdot \left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{11x^2}{24} + o(x^2)\right)$

cuando $x \to 0$.

Solución. Puesto que $(1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\log(1+x)}$, comenzamos con un polinomio de aproximación para $\log(1+x)$. Tomando una aproximación cúbica, tenemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,, \qquad \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\,,$$

y así se obtiene

$$(1 + x)^{1/x} = \exp(1 - x/2 + x^2/3 + o(x^2)) = e \cdot e^u, \tag{7.18}$$

en donde $u = -x/2 + x^2/3 + o(x^2)$. Pero cuando $u \to 0$, tenemos $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, con lo que obtenemos

$$e^u = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2).$$

Si aplicamos esta igualdad a (7.18), obtenemos la fórmula deseada.

7.10 Aplicaciones a las formas indeterminadas

Ya hemos explicado cómo se utilizan las aproximaciones por polinomios en el cálculo de valores de funciones. También se pueden utilizar en el cálculo de límites. Lo vamos a explicar con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Si a y b son números positivos, determinar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

Solución. No podemos resolver este problema calculando el límite del numerador y el del denominador separadamente, porque el denominador tiende a 0 y el teorema del cociente de límites no es aplicable. El numerador en este caso también tiende a 0 y se dice que el cociente adopta la «*forma indeterminada* 0/0» cuando $x \to 0$. La fórmula de Taylor y la notación-*o* nos permiten frecuentemente calcular el límite de una forma indeterminada parecida a esa pero más sencilla. La idea es aproximar el numerador $a^x - b^x$ por un polinomio en x, dividir luego por x y hacer que $x \to 0$. Podría aplicarse la fórmula de Taylor directamente a $f(x) = a^x - b^x$ pero, como $a^x = e^{x \log a}$ y $b^x = e^{x \log b}$, es más sencillo en este caso usar las aproximaciones por polinomios ya deducidas para la función exponencial. Si comenzamos con la aproximación lineal

$$e^t = 1 + t + o(t) \text{ cuando } t \to 0$$

y reemplazamos t por $x \log a$ y $x \log b$, obtenemos respectivamente

$$a^x = 1 + x \log a + o(x) \qquad \text{y} \qquad b^x = 1 + x \log b + o(x) \quad \text{cuando } x \to 0.$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que $o(x \log a) = o(x)$ y $o(x \log b) = o(x)$. Si ahora restamos y observamos que $o(x) - o(x) = o(x)$, encontramos $a^x - b^x = x(\log a - \log b) + o(x)$. Dividiendo por x y teniendo en cuenta que $o(x)/x = o(1)$, obtenemos

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b} + o(1) \to \log \frac{a}{b} \text{ cuando } x \to 0 .$$

EJEMPLO 2. Demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3}$.

Solución. Utilizamos el ejemplo 1 de la Sección 7.9, y el teorema 7.8 e) para escribir

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x) .$$

Luego, tenemos

$$\frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3} + o(1) \to -\frac{1}{3} \text{ cuando } x \to 0 .$$

EJEMPLO 3. Demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + ax)}{x} = a$ para todo real a.

Solución. Si $a = 0$, el resultado es trivial. Si $a \neq 0$, usamos la aproximación lineal $\log(1 + x) = x + o(x)$. Reemplazando x por ax, obtenemos $\log(1 + ax) = ax + o(ax) = ax + o(x)$. Dividiendo por x y haciendo que $x \to 0$, obtenemos el límite a.

EJEMPLO 4. Probar que para todo número real a, tenemos

(7.19) $$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a .$$

Solución. Observemos simplemente que $(1 + ax)^{1/x} = e^{(1/x)\log(1+ax)}$ y aplicamos el resultado del ejemplo 3 junto con la continuidad de la función exponencial..

Reemplazando ax por y en (7.19), encontramos otro límite importante:

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{a/y} = e^a .$$

Algunas veces esos límites se toman como punto de partida para la teoría de la función exponencial.

7.11 Ejercicios

1. Hallar un polinomio cuadrático $P(x)$ tal que $2^x = P(x) + o(x^2)$ cuando $x \to 0$.
2. Hallar un polinomio cúbico $P(x)$ tal que $x \cos x = P(x) + o((x-1)^3)$ cuando $x \to 1$.
3. Hallar el polinomio $P(x)$ de menor grado tal que $\operatorname{sen}(x - x^2) = P(x) + o(x^6)$ cuando $x \to 0$.
4. Hallar las constantes a, b, c tal que $\log x = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ cuando $x \to 1$.
5. Recuérdese que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ cuando $x \to 0$. Utilizar este resultado para demostrar que $x^{-2}(1 - \cos x) \to \frac{1}{2}$ cuando $x \to 0$. En forma parecida, hallar el límite de $x^{-4}(1 - \cos 2x - 2x^2)$ cuando $x \to 0$.

Calcular los límites de los Ejercicios 6 al 29.

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.
7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$.
8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.
9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x)}{e^{2x} - 1}$.
10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x \tan x}$.
11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\arctan x}$.
12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{b^x - 1}$, $\quad b \neq 1$.
13. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x^2 + x - 2}$.
14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \operatorname{sen} x^2}$.
15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.
16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x) - x}{1 - \cos x}$.
17. $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\cos x}{x - \frac{1}{2}\pi}$.
18. $\lim_{x \to 1} \dfrac{[\operatorname{sen}(\pi/2x)](\log x)}{(x^3 + 5)(x - 1)}$.
19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{x^2}$.
20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \operatorname{sen} 4x - 12 \operatorname{sen} x}$.
21. $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - a^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$.
22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x) - \cos x}{x^4}$.
23. $\lim_{x \to 1} x^{1/(1-x)}$.
24. $\lim_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$.
25. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$.

26. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

27. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

28. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

29. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

30. ¿Para qué valor de a la expresión $x^{-2}(e^{ax}-e^x-x)$ tiende a un límite finito cuando $x\to 0$? ¿Cuál es el valor de ese límite?

31. Dadas dos funciones f y g derivables en un cierto intervalo que contenga 0, en el que g es positiva. Supongamos también $f(x)=o(g(x))$ cuando $x\to 0$. Decir si son o no ciertas las proposiciones:

a) $\int_0^x f(t)\,dt = o\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)$ cuando $x\to 0$, (b) $f'(x)=o(g'(x))$ cuando $x\to 0$.

32. a) Si $g(x)=o(1)$ cuando $x\to 0$, demostrar que

$$\frac{1}{1+g(x)} = 1-g(x)+g^2(x)+o(g^2(x)) \text{ cuando } x\to 0\,.$$

b) Utilizar la parte a) para demostrar que $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$ cuando $\to 0$.

33. Una función f tiene derivada tercera continua para todo x y satisface la relación

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x} = e^3\,.$$

Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$

[*Indicación:* Si $\lim_{x\to 0} g(x)=A$, $g(x)=A+o(1)$ cuando $x\to 0$.]

7.12 Regla de L'Hôpital para la forma indeterminada 0/0

En muchos ejemplos de las Secciones anteriores hemos calculado el límite de un cociente $f(x)/g(x)$ en el que el numerador $f(x)$ y el denominador $g(x)$ tienden a 0. En ejemplos de este tipo se dice que el cociente $f(x)/g(x)$ adopta «la forma indeterminada 0/0».

Un modo de resolver los problemas de las formas indeterminadas es obtener polinomios de aproximación a $f(x)$ y a $g(x)$ como se hizo al tratar los ejemplos de antes. Algunas veces el trabajo puede abreviarse con el uso de una téc-

nica de derivación llamada *regla de L'Hôpital.* (†) La idea básica del método es estudiar el cociente de derivadas $f'(x)/g'(x)$ y deducir de él información relativa a $f(x)/g(x)$.

Antes de establecer la regla de L'Hôpital, demostramos una relación entre el cociente $f(x)/g(x)$ y el cociente de derivadas $f'(x)/g'(x)$. Supongamos que f y g son dos funciones para las que $f(a) = g(a) = 0$. Entonces, para $x \neq a$, tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \bigg/ \frac{g(x) - g(a)}{x - a} .$$

Si las derivadas $f'(a)$ y $g'(a)$ existen, y si $g'(a) \neq 0$, entonces cuando $x \to a$ el cociente del tercer miembro tiende a $f'(a)/g'(a)$ y por tanto $f(x)/g(x) \to f'(a)/g'(a)$.

EJEMPLO. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{x}$.

Solución. Aquí ($f(x)=1-e^{2x}$ y $g(x) = x$ con lo que $f'(x)= -2e^{2x}$, $g'(x)=1$. Por tanto $f'(0)/g'(0) = -2$, de manera que el límite en cuestión es -2.

En la regla de L'Hôpital, no se hacen hipótesis sobre f, g ni sus derivadas *en* el punto $x = a$. En su lugar, suponemos que $f(x)$ y $g(x)$ tiende a 0 cuando $x \to 0$ y que el cociente $f'(x)/g'(x)$ tiende a un límite finito cuando $x \to a$. La regla de L'Hôpital nos dice entonces que $f(x)/g(x)$ tiende al mismo límite. Con más precisión, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 7.9. REGLA DE L'HÔPITAL PARA 0/0. *Supongamos que f y g admiten derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b) y supongamos que*

(7.20) $$\lim_{x\to a+} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to a+} g(x) = 0 .$$

Supongamos también que $g'(x) \neq 0$ para cada x en (a, b). Si el límite

(7.21) $$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(†) En 1696, Guillermo Francisco Antonio de L'Hôpital (1661-1704) escribió el primer libro de Cálculo diferencial. Este trabajo apareció en muchas ediciones y desempeñó un papel importante en la divulgación del Cálculo. Gran parte del contenido del libro, incluyendo el método conocido como «regla de L'Hôpital», se basó en el trabajo anterior de Juan Bernoulli, uno de los maestros de L'Hôpital.

existe y tiene el valor tal como L, entonces el límite

(7.22)
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

también existe y tiene el valor L.

Obsérvese que los límites (7.20), (7.21) y (7.22) son «por la derecha». Existe, naturalmente, un teorema similar en el que las hipótesis se satisfacen en un cierto intervalo abierto de la forma (b, a) y todos los límites son «por la izquierda». Asimismo, combinando los dos teoremas «por un lado», se obtiene un resultado por «ambos lados» del mismo tipo, en el que $x \to a$ de cualquier manera.

Antes de demostrar el teorema 7.9, expondremos el uso de este teorema en unos ejemplos.

EJEMPLO 1. Usaremos la regla de L'Hôpital para obtener la fórmula familiar

(7.23)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 .$$

En este caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$. El cociente de derivadas es $f'(x)/g'(x) = (\cos x)/1$ y tiende a 1 cuando $x \to 0$. Según el teorema 7.9 el límite (7.23) también existe y es igual a 1.

EJEMPLO 2. Para determinar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x - \operatorname{sen} x}$$

mediante la regla de L'Hôpital, ponemos $f(x) = x - \tan x$, $g(x) = x - \operatorname{sen} x$, y encontramos que

(7.24)
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \sec^2 x}{1 - \cos x} .$$

Si bien este cociente también adopta la forma 0/0 cuando $x \to 0$, podemos evitar la indeterminación por medio de transformaciones trigonométricas y algebraicas. Si escribimos

$$1 - \sec^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x} ;$$

el cociente (7.24) se transforma en

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1+\cos x}{\cos^2 x},$$

y éste tiende a -2 cuando $x \to 0$. Obsérvese que la indeterminación desaparece cuando simplificamos el factor $1 - \cos x$. La supresión de factores comunes suele simplificar el trabajo en problemas de este tipo.

Si el cociente de las derivadas $f'(x)/g'(x)$ toma a su vez la forma 0/0 se puede aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital. En el ejemplo que sigue la indeterminación desaparece después de dos aplicaciones de la regla.

EJEMPLO 3. Para cualquier número real c se tiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{cx^{c-1} - c}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{c(c-1)x^{c-2}}{2} = \frac{c(c-1)}{2}.$$

En esta sucesión de igualdades se entiende que la existencia de cada límite implica el del precedente y su igualdad.

El ejemplo que se da a continuación muestra que la regla de L'Hôpital no es infalible.

EJEMPLO 4. Sea $f(x) = e^{-1/x}$ si $x \neq 0$ y $g(x) = x$. El cociente $f(x)/g(x)$ toma la forma indeterminada 0/0 cuando $x \to 0+$ y la aplicación una vez de la regla de L'Hôpital conduce al cociente:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(1/x^2)e^{-1/x}}{1} = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

Éste, a su vez, es indeterminado cuando $x \to 0+$ y derivando numerador y denominador se obtiene: $(1/x^2)e^{-1/x}/(2x) = e^{-1/x}/(2x^3)$. Después de n pasos se llega al cociente $e^{-1/x}/(n!x^{n+1})$ de manera que por este método no desaparecerá nunca la indeterminación.

EJEMPLO 5. Cuando se aplica reiteradamente la regla de L'Hôpital, se ha de tener cuidado en cerciorarse que el cociente que se considera toma efectivamente la forma indeterminada. Un error frecuente se pone de manifiesto en este cálculo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1}\frac{6x-2}{2x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6}{2} = 3.$$

El primer paso es correcto pero el segundo no. El cociente $(6x - 2)/(2x - 1)$ no es indeterminado cuando $x \to 1$. El límite correcto, 4, se obtiene sustituyendo x por 1 en $(6x - 2)(2x - 1)$.

EJEMPLO 6. Algunas veces se puede reducir el trabajo haciendo un cambio de variable. Por ejemplo, se podría aplicar directamente la regla de L'Hôpital para calcular el límite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}},$$

pero se puede evitar la derivación de la raíz cuadrada escribiendo $t = \sqrt{x}$ y observando que:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}} = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{1 - e^{2t}} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{-2e^{2t}} = -\frac{1}{2}.$$

Se trata ahora de demostrar el teorema 7.9.

Demostración. Se hace uso de la fórmula del valor medio de Cauchy (teorema 4.6 de la Sección 4.14) aplicada al intervalo cerrado que tiene a como extremo izquierdo. Puesto que las funciones f y g pueden no estar definidas en a, se introducen dos nuevas funciones que *estén* definidas en a. Sea:

$$F(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \neq a, \qquad F(a) = 0,$$

$$G(x) = g(x) \quad \text{si} \quad x \neq a, \qquad G(a) = 0.$$

F y G son ambas continuas en a. En efecto, si $a < x < b$, las dos funciones F y G son continuas en el *intervalo cerrado* $[a, x]$ y tienen derivada en todos los puntos del *intervalo abierto* (a, x). Por tanto la fórmula de Cauchy se puede aplicar al intervalo $[a, x]$ y se obtiene:

$$[F(x) - F(a)]G'(c) = [G(x) - G(a)]F'(c),$$

donde c es un punto que satisface: $a < c < x$. Teniendo en cuenta que $F(a) = G(a) - 0$ se tiene:

$$f(x)g'(c) = g(x)f'(c).$$

$g'(c)$ es distinto de cero [puesto que, por hipótesis, g' no se anula en ningún punto de (a, b)] y $g(x)$ es también distinto de cero. En efecto, si fuera $g(x) = 0$

tendría que ser $G(x) = G(a) = 0$ y en virtud del teorema de Rolle, existiría un punto x_1 entre a y x donde $G'(x_1) = 0$, en contradicción con la hipótesis de que g' no se anula nunca en (a, b). Por tanto, se puede dividir por $g'(c)$ y $g(x)$ obteniéndose:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Cuando $x \to a$, el punto $c \to a$ (puesto que $a < c < x$) y el cociente a la izquierda tiende a L [en virtud de (7.21)]. Por tanto, $f(x)/g(x)$ tiende también a L y el teorema está demostrado.

7.13 Ejercicios

Calcular los límites en los Ejercicios 1 al 12.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$.
2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$.
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2 - x)e^x - x - 2}{x^3}$.
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$.
6. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{(x \operatorname{sen} x)^{3/2}}$.
7. $\lim_{x\to a+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.
8. $\lim_{x\to 1+} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log x}$.
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} 2x - 2 \operatorname{arcsen} x}{x^3}$.
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cot x - 1}{x^2}$.
11. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x^k - n}{x - 1}$.
12. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(a \arctan \dfrac{\sqrt{x}}{a} - b \arctan \dfrac{\sqrt{x}}{b}\right)$.
13. Determinar el límite del cociente

$$\frac{(\operatorname{sen} 4x)(\operatorname{sen} 3x)}{x \operatorname{sen} 2x}$$

cuando $x \to 0$ y también cuando $x \to \frac{1}{2}\pi$.

14. ¿Para qué valores de las constantes a y b es

$$\lim_{x\to 0} (x^{-3} \operatorname{sen} 3x + ax^{-2} + b) = 0?$$

15. Hallar las constantes a y b tales que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{bx - \operatorname{sen} x} \displaystyle\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a+t}} = 1$.

16. Un arco de circunferencia de radio 1 subtiende un ángulo de x radianes, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, como se ve en la figura 7.2. El punto C es la intersección de las dos tangentes en A y B. Sea $T(x)$ el área del triángulo ABC y $S(x)$ el área de la región sombreada. Calcular:

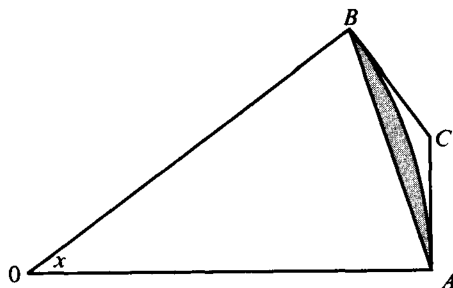


FIGURA 7.2 Ejercicio 16.

a) $T(x)$; b) $S(x)$; c) el límite de $T(x)|S(x)$ cuando $x \to 0+$.

17. La corriente $I(t)$ que circula en un cierto circuito eléctrico en el tiempo t viene dada por

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

en donde E, R, y L son números positivos. Determinar el valor límite de $I(t)$ cuando $R \to 0+$.

18. Un peso está suspendido por una cuerda y se le causa una vibración mediante una fuer za sinusoidal. Su desplazamiento $f(t)$ en el tiempo t viene dado por una ecuación de la forma

$$f(t) = \frac{A}{c^2 - k^2}(\operatorname{sen} kt - \operatorname{sen} ct),$$

donde A, c, y k son constantes positivas, siendo $c \neq k$. Determinar el valor límite del desplazamiento cuando $c \to k$.

7.14 Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$. Extensión de la regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital se puede extender en varias direcciones. En primer lugar se considera el cociente $f(x)/g(x)$ cuando x crece indefinidamente. Es conveniente tener un símbolo para expresar brevemente que x crece indefinidamente. Para ello los matemáticos utilizan el símbolo $+\infty$, llamado «más infinito». Sin

embargo, al símbolo $+\infty$ no se le debe atribuir ningún significado *por él mismo,* y se darán definiciones precisas de varias proposiciones que contienen este símbolo.

Una de ellas es la siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A ,$$

que se lee «el límite de $f(x)$, cuando x tiende a más infinito, es A». La idea que se quiere expresar con ello es que los valores de la función $f(x)$ pueden ser tan próximos a A como se quiera tomando x suficientemente grande. Para que esta proposición tenga un sentido matemático preciso se ha de explicar que significa «tan próximo como se quiera» y «suficientemente grande», lo cual se logra con la siguiente definición:

DEFINICIÓN. *El simbolismo*:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

significa que para cada número $\epsilon > 0$, *existe otro número* $M > 0$ (*que depende de* ϵ) *tal que:*

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{siempre que} \quad x > M .$$

En la práctica, el cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ se puede reducir a un caso más conocido. Basta sustituir x por $1/t$ (es decir, $x = 1/t$) y observar que $t \to 0$ tomando valores positivos, cuando $x \to +\infty$. Con más precisión, se introduce una nueva función F donde:

(7.25) $$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{si} \quad t \neq 0$$

y se observa que las dos igualdades:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0+} F(t) = A$$

significan exactamente lo mismo. La demostración de esta equivalencia requiere simplemente la definición de los dos símbolos límite, y se deja al lector como ejercicio.

Cuando interesa conocer el comportamiento de $f(x)$ para valores de x *negativos* grandes, se introduce el símbolo $-\infty$ (menos infinito) y se escribe:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

que significa: Para cada $\epsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad x < -M.$$

Si F está definida por (7.25) es fácil comprobar que las dos igualdades

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0-} F(t) = A$$

son equivalentes.

En vista de las observaciones hechas, no es sorprendente encontrar que todas las reglas usuales para el cálculo con límites (que se dieron en el teorema 3.1 de la Sección 3.4) se aplican también a límites cuando $x \to \pm\infty$. La regla de L'Hôpital es también válida y se puede extender en la forma siguiente:

TEOREMA 7.10. *Supongamos que f y g tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ para todo x mayor que un cierto número fijo $M > 0$. Supongamos también que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\,,$$

y que $g'(x) \neq 0$ para $x > M$. Si $f'(x)/g'(x)$ tiende a un límite cuando $x \to +\infty$, entonces $f(x)/g(x)$ tiene también límite y ambos son iguales. Es decir,

$$\text{(7.26)} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \textit{implica} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

Demostración. Sea $F(t) = f(1/t)$ y $G(t) = g(1/t)$. Entonces $f(x)/g(x) = F(t)/G(t)$ si $t = 1/x$, y $t \to 0+$ cuando $x \to +\infty$. Puesto que $F(t)/G(t)$ toma la forma indeterminada $0/0$ cuando $t \to 0+$ se considera el cociente de las derivadas $F'(t)/G'(t)$. Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$F'(t) = \frac{-1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{y} \qquad G'(t) = \frac{-1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right).$$

$G'(t) \neq 0$, si $0 < t < 1/M$. Si $x = 1/t$ y $x > M$, se tiene $F'(t)/G'(t) = f'(x)/g'(x)$ puesto que el factor común $-1/t^2$ se simplifica. Por tanto, si $f'(x)/g'(x)$ tiende a L cuando $x \to +\infty$, entonces $F'(t)/G'(t) \to L$ cuando $t \to 0+$ y por tanto, en virtud del teorema 7.9, $F(t)/G(t) \to L$. Y puesto que $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$, esto demuestra (7.26).

Hay evidentemente un teorema análogo al 7.10 cuando se considera el límite para $x \to -\infty$.

7.15 Límites infinitos

En la Sección anterior se utilizó la notación $x \to +\infty$ para indicar que x toma valores positivos tan grandes como se quiera. También escribimos

(7.27)
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

o, también,

(7.28)
$$f(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to a$$

para indicar que $f(x)$ se puede hacer tan grande como se quiera tomando x suficientemente próximo a a. El significado preciso de este símbolo está dado por la siguiente definición:

DEFINICIÓN. *Los símbolos en* (7.27) *y* (7.28) *significan que a cada número positivo* M *(tan grande como se quiera) corresponde otro número positivo* δ *(que depende de* M*) tal que*

$$f(x) > M \quad \textit{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta .$$

Si $f(x) > M$ *siempre que* $0 < x - a < \delta$, *se escribe*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty ,$$

y se dice que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* a *por la derecha. Si* $f(x) > M$ *siempre que* $0 < a - x < \delta$, *se escribe*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty ,$$

y se dice que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* a *por la izquierda.*

Los símbolos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty , \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty , \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$$

se definen análogamente, con la única diferencia de sustituir $f(x) > M$ por $f(x) < -M$. En la figura 7.3 se dan ejemplos.

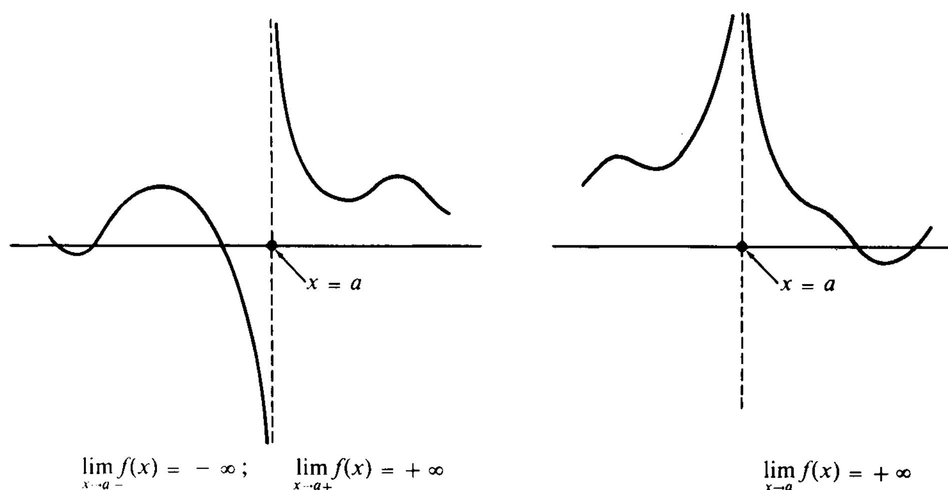


FIGURA 7.3 *Límites infinitos.*

Es conveniente extender también la definición de estos símbolos al caso en que $x \to \pm\infty$. Así, por ejemplo, se escribe:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si para cada número positivo M existe otro número positivo X tal que $f(x) > M$ siempre que $x > X$.

El lector no tendrá dificultad para formular definiciones análogas para los símbolos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty , \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

EJEMPLOS. En el capítulo 6 se probó que la función logaritmo no está acotada en el eje real positivo. Este hecho se puede expresar brevemente escribiendo:

(7.29) $$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty .$$

También se probó en el capítulo 6 que $\log x < 0$ si $0 < x < 1$ y que el logaritmo no tiene cota inferior en el intervalo (0, 1). Por tanto, se puede también escribir $\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty$.

De la relación que existe entre la función logarítmica y la exponencial es fácil probar que:

$$\text{(7.30)} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \Big(\text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\Big).$$

Aplicando estos resultados no es difícil demostrar que para $\alpha > 0$ se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0\,.$$

La idea es escribir $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ y aplicar (7.30) junto con (7.29). Las fórmulas en (7.30) dan las relaciones:

$$\lim_{x\to 0-} e^{-1/x} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0\,.$$

La demostración de estas igualdades es un buen ejercicio para que el lector compruebe si ha entendido los límites que contienen símbolos $\pm\infty$.

7.16 Comportamiento de log x y e^x para valores grandes de x

Los límites infinitos nos conducen a nuevos tipos de formas indeterminadas. Por ejemplo, se puede tener un cociente $f(x)/g(x)$ en el que $f(x) \to +\infty$ y $g(x) \to +\infty$ en ambos casos cuando $x \to a$ (o $x \to \pm\,\infty$). En este caso, decimos que el cociente $f(x)/g(x)$ adopta la forma indeterminada ∞/∞. Existen varias extensiones de la regla de L'Hôpital que a menudo nos ayudan para determinar el comportamiento de un cociente cuando adopta la forma indeterminada ∞/∞. No obstante, no expondremos esas extensiones porque muchos de los ejemplos que se presentan en la práctica pueden tratarse aplicando el teorema que sigue y que describe el comportamiento del logaritmo y de la exponencial para valores grandes de x.

TEOREMA 7.11. *Si $a > 0$ y $b > 0$, se tiene*

$$\text{(7.31)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0$$

y

$$\text{(7.32)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0\,.$$

Demostración. Primero demostramos (7.31) y luego utilizamos el resultado para deducir (7.32). Puede hacerse una demostración sencilla de (7.31) partiendo de la definición de logaritmo como integral. Si $c > 0$ y $t \geq 1$, tenemos $t^{-1} \leq t^{c-1}$. Luego, si $x > 1$, podemos escribir

$$0 < \log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \leq \int_1^x t^{c-1}\, dt = \frac{x^c - 1}{c} < \frac{x^c}{c}.$$

Por consiguiente, se tiene

$$0 < \frac{(\log x)^b}{x^a} < \frac{x^{bc-a}}{c^b} \quad \text{para todo } c > 0.$$

Si elegimos $c = \frac{1}{2}a/b$, entonces $x^{bc-a} = x^{-a/2}$ que tiende a 0 cuando $x \to +\infty$. Esto demuestra (7.31). Para demostrar (7.32), hacemos el cambio de variable $t = e^x$. Entonces $x = \log t$, y por tanto $x^b/e^{ax} = (\log t)^b/t^a$. Pero $t \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, con lo cual (7.32) es consecuencia de (7.31).

Con una natural extensión de la notación-o, podemos escribir las proposiciones sobre límites que acabamos de demostrar en la forma

$$(\log x)^b = o(x^a) \text{ cuando } x \to +\infty,$$

y

$$x^b = o(e^{ax}) \text{ cuando } x \to +\infty.$$

Dicho de otro modo, por grande que sea b y por pequeño que sea a (ambos positivos), $(\log x)^b$ tiende a infinito más lentamente que x^a. Asimismo, x^b tiende a infinito más lentamente que e^{ax}.

EJEMPLO 1. En el ejemplo 4 de la Sección 7.12 se demostró que el comportamiento de $e^{-1/x}/x$ para x próximo a 0 no podía ser decidido mediante un número cualquiera de aplicaciones de la regla de L'Hôpital para el caso 0/0. No obstante, si escribimos $t = 1/x$, este cociente se transforma en t/e^t y adopta la forma indeterminada ∞/∞ cuando $t \to +\infty$. El teorema 7.11 nos dice que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

Por tanto, $e^{-1/x}/x \to 0$ cuando $x \to 0+$ o, en otras palabras, $e^{-1/x} = o(x)$ cuando $x \to 0+$.

Además de $0/0$ e ∞/∞ existen otras formas indeterminadas. Algunas de esas, representadas con los símbolos $0 \cdot \infty$, 0^0, e ∞^0, se ilustran con los ejemplos

que se dan a continuación. En ejemplos parecidos a esos, transformaciones algebraicas nos permiten a menudo reducir a una forma indeterminada del tipo $0/0$ o ∞/∞ que puede ser resuelta con la regla de L'Hôpital, por polinomios de aproximación, o por medio del teorema 7.11.

EJEMPLO 2. $(0 \cdot \infty)$. Demostrar que $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0$ para cada valor fijo de $\alpha > 0$.

Solución. Poniendo $t = 1/x$, encontramos que $x^\alpha \log x = -(\log t)/t^\alpha$ y, en virtud de (7.31), tiende a 0 cuando $t \to +\infty$.

EJEMPLO 3. (0^0). Demostrar que $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$.

Solución. Puesto que $x^x = e^{x \log x}$, por la continuidad de la función exponencial tenemos

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \exp\left(\lim_{x\to 0+} x \log x\right),$$

si existe el último límite. Pero según el ejemplo 2 sabemos que $x \log x \to 0$ cuando $x \to 0+$, y por tanto $x^x \to e^0 = 1$.

EJEMPLO 4. (∞^0). Demostrar que $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = 1$.

Solución. Poner $t = 1/x$ y aplicar el resultado del ejemplo 3.

En la Sección 7.10 se demostró que

$$(7.33) \qquad \lim_{x\to 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{a/x} = e^a .$$

Cada una de estas relaciones es una forma indeterminada del tipo 1^∞. Podemos sustituir x por $1/x$ en esas fórmulas y obtener, respectivamente

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^a ,$$

válidas las dos para todo a real.

Las relaciones (7.33) y las de los ejemplos 2, 3 y 4 son todas de la forma $f(x)^{g(x)}$. Ordinariamente se resuelven poniéndolas del modo siguiente

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

y tratando luego el exponente $g(x) \log f(x)$ por uno de los métodos discutidos antes.

7.17 Ejercicios

Calcular los límites de los Ejercicios 1 al 25. Las letras a y b representan constantes positivas.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$.

2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)}$.

3. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\tan 3x}{\tan x}$.

4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(a + be^x)}{\sqrt{a + bx^2}}$.

5. $\lim_{x\to +\infty} x^4\left(\cos\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2}\right)$

6. $\lim_{x\to \pi} \frac{\log|\operatorname{sen} x|}{\log|\operatorname{sen} 2x|}$.

7. $\lim_{x\to \frac{1}{2}-} \frac{\log(1 - 2x)}{\tan \pi x}$.

8. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cosh(x + 1)}{e^x}$.

9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^b}$, $\quad a > 1$.

10. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\tan x - 5}{\sec x + 4}$.

11. $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$.

12. $\lim_{x\to +\infty} x^{1/4}\operatorname{sen}(1/\sqrt{x})$.

13. $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1})$.

14. $\lim_{x\to 0+} \left[\frac{\log x}{(1 + x)^2} - \log\left(\frac{x}{1 + x}\right)\right]$

15. $\lim_{x\to 1-} (\log x)\log(1 - x)$.

16. $\lim_{x\to 0+} x^{(x^x-1)}$

17. $\lim_{x\to 0+} [x^{(x^x)} - 1]$.

18. $\lim_{x\to 0-} (1 - 2^x)^{\operatorname{sen} x}$.

19. $\lim_{x\to 0+} x^{1/\log x}$.

20. $\lim_{x\to 0+} (\cot x)^{\operatorname{sen} x}$.

21. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} (\tan x)^{\tan 2x}$.

22. $\lim_{x\to 0+} \left(\log\frac{1}{x}\right)^x$.

23. $\lim_{x\to 0+} x^{e/(1+\log x)}$.

24. $\lim_{x\to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$.

25. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\log 1(+ x)}\right)$.

26. Hallar c de modo que

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x + c}{x - c}\right)^x = 4.$$

27. Demostrar que $(1 + x)^c = 1 + cx + o(x)$ cuando $x \to 0$. Aplicar este resultado para calcular el límite de

$$\{(x^4 + x^2)^{1/2} - x^2\} \text{ cuando } x \to +\infty.$$

28. Para un cierto valor de c, el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \{(x^5 + 7x^4 + 2)^c - x\}$$

es finito y no nulo. Determinar ese c y calcular el valor del límite.

29. Sean $g(x) = xe^{x^2}$ y $f(x) = \int_1^x g(t)(t + 1/t)\, dt$. Calcular el límite de $f''(x)/g''(x)$ cuando $x \to +\infty$.

30. Sean $g(x) = x^c e^{2x}$ y $f(x) = \int_0^x e^{2t}(3t^2 + 1)^{1/2}\, dt$. Para un cierto valor de c, el límite de $f'(x)/g'(x)$ cuando $x \to +\infty$ es finito y no nulo. Determinar c y calcular el valor del límite.

31. Sea $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$.
   a) Demostrar que para todo $m > 0$, $f(x)/x^m \to 0$ cuando $x \to 0$.
   b) Demostrar que para $x \neq 0$ la derivada n-sima de f es de la forma $f^{(n)}(x) = f(x)P(1/x)$, siendo $P(t)$ un polinomio en t.
   c) Demostrar que $f^{n}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Esto demuestra que todo polinomio de Taylor engendrado por f en 0 es el polinomio nulo.

32. Una cantidad de P pesetas se deposita en un banco a interés compuesto al r por uno anual, acumulándose los intereses m veces por año; es decir se supone el año dividido en m partes iguales y cada *m-simo* de año el interés producido se incorpora al capital.
   a) Demostrar que el capital total obtenido al cabo de n años es $P(1 + r/m)^{mn}$. Si r y n se mantienen fijos, esa cantidad tiende a Pe^{rn} cuando $m \to +\infty$. Este hecho da origen a la siguiente definición: Decimos que una cantidad de dinero está impuesta a interés continuo al r por uno anual si la cantidad $f(t)$ después de t años es $f(0)e^{rt}$, siendo t cualquier número real no negativo. Calcular aproximadamente el tiempo necesario para que una cantidad de dinero se duplique colocándola en su banco al 6 % anual a interés compuesto, acumulándose los intereses b) en forma continua, c) por trimestres.

8

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

8.1 Introducción

Se presentan una gran variedad de problemas, en los cuales se desea determinar un elemento variable a partir de su coeficiente de variación. Por ejemplo, se quiere determinar la posición de una partícula móvil conociendo su velocidad o aceleración; o bien, dada una sustancia radiactiva que se desintegra, con coeficiente de variación conocido, se trata de determinar la cantidad de sustancia remanente después de un tiempo dado. En ejemplos como éstos, se trata de determinar una *función desconocida* mediante datos relacionados por una ecuación que contiene por lo menos una de las derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones se enominan *ecuaciones diferenciales* y su estudio constituye una de las ramas de la Matemática que tienen más aplicaciones.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en *ordinarias* y *parciales* según que la incógnita sea una función de *una* sola variable o de *dos o más* variables. Un ejemplo sencillo de ecuación diferencial ordinaria es la relación

$$f'(x) = f(x) \tag{8.1}$$

que se satisface en particular para la función exponencial $f(x) = e^x$. Se verá después que toda solución de (8.1) ha de ser de la forma: $f(x) = Ce^x$, donde C puede ser una constante cualquiera.

Por otra parte, una ecuación como:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

es un ejemplo de una ecuación en derivadas parciales. Esta ecuación, llamada *ecuación de Laplace,* se presenta en la Teoría de Electricidad y Magnetismo, en

la Mecánica de fluidos, así como en otros capítulos de la Física matemática. Dicha ecuación admite tipos distintos de soluciones entre las cuales están $f(x, y) = x + 2y$, $f(x, y) = e^x \cos y$, y $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

El estudio de las ecuaciones diferenciales es una parte de la Matemática que, quizá más que cualquier otra, ha sido directamente inspirada por la Mecánica, la Astronomía y la Física matemática. Su historia empezó en el siglo XVII cuando Newton, Leibniz y los Bernoulli resolvieron algunas ecuaciones diferenciales sencillas que se presentaron en problemas de Geometría y Mecánica. Esos primeros descubrimientos, que comenzaron alrededor de 1690, llevaron gradualmente al desarrollo de una especie de «bolsa de trucos» para resolver ciertos tipos particulares de ecuaciones diferenciales. Si bien esos trucos son aplicables relativamente en pocos casos, nos permiten resolver muchas ecuaciones diferenciales que se presentan en Mecánica y Geometría, de modo que su estudio es de importancia práctica. Algunos de esos métodos especiales y algunos de los problemas que con ellos podemos resolver serán expuestos hacia el final de este capítulo.

La experiencia ha demostrado que es difícil obtener teorías matemáticas de gran generalidad acerca de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, salvo para unos pocos tipos. Entre éstas podemos citar las llamadas ecuaciones diferenciales *lineales* que se presentan en una gran variedad de problemas científicos. Los tipos más sencillos de ecuaciones diferenciales lineales y algunas de sus aplicaciones se comentan en este capítulo de introducción. En el Volumen II se hace un estudio más completo de las ecuaciones lineales.

8.2 Terminología y notación

Cuando se trabaja con una ecuación diferencial tal como (8.1) se acostumbra escribir y en vez de $f(x)$, y' en vez de $f'(x)$ y las derivadas de orden superior se indican por y'', y''', etc. También se utilizan otras letras en lugar de y tales como u, v, z, etc. Se entiende por *orden* de una ecuación diferencial el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Así (8.1) es una ecuación de primer orden que puede escribirse $y' = y$. La ecuación diferencial $y' = x^3y + \text{sen}(xy'')$ es de segundo orden.

En este capítulo se considerarán, en primer lugar, las ecuaciones de primer orden en las que se puede despejarse la y', y que se escriben de la manera siguiente:

$$y' = f(x, y), \tag{8.2}$$

en donde la expresión $f(x, y)$ del segundo miembro tiene diversas formas particulares. Una función derivable $y = Y(x)$ es una *solución* de (8.2) en un intervalo I si la función Y y su derivada Y' satisface la relación

$$Y'(x) = f[x, Y(x)]$$

para todo x en I. El caso más sencillo se presenta cuando $f(x, y)$ es independiente de y. En tal caso, (8.2) se convierte en

(8.3) $$y' = Q(x),$$

en donde Q se supone que es una función dada definida en un cierto intervalo I. Resolver la ecuación diferencial (8.3) significa encontrar una primitiva de Q. El segundo teorema fundamental del Cálculo nos dice cómo hacerlo cuando Q es continua en una intervalo abierto I. Sencillamente, se integra Q y se agrega una constante cualquiera. Así, toda solución de (8.3) queda incluida en la fórmula

(8.4) $$y = \int Q(x)\,dx + C,$$

siendo C una constante cualquiera (llamada corrientemente constante arbitraria de integración). La ecuación diferencial (8.3) posee una infinidad de soluciones, una para cada valor de C.

Si no es posible calcular la integral (8.4) por medio de funciones elementales, tales como polinomios, funciones racionales, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas, logaritmos, y exponenciales, se considera que la ecuación diferencial ha sido resuelta si la solución puede expresarse mediante integrales de funciones conocidas. En la práctica, existen varios métodos para calcular aproximadamente integrales que nos llevan a una útil información acerca de la solución. Máquinas calculadoras automáticas de alta velocidad se han diseñado pensando en este tipo de problemas.

EJEMPLO. *Movimiento lineal determinado por la velocidad.* Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una recta de manera que su velocidad en el instante t es $2 \operatorname{sen} t$. Determinar su posición en ese instante t.

Solución. Si $Y(t)$ representa la posición en el instante t, medida a partir del punto inicial, la derivada $Y'(t)$ representa la velocidad en el instante t. Tenemos, pues, según el enunciado

$$Y'(t) = 2 \operatorname{sen} t.$$

Integrando, encontramos que

$$Y(t) = 2\int \operatorname{sen} t\,dt + C = -2\cos t + C.$$

Esto es todo cuanto podemos deducir acerca de $Y(t)$ a partir únicamente del conocimiento de la velocidad; algo más de información es necesaria para fijar la función de posición. Podemos determinar C si conocemos el valor de Y en un

cierto instante. Por ejemplo, si $Y(0) = 0$, entonces $C = 2$ y la función posición es $Y(t) = 2 - 2 \cos t$. Pero si $Y(0) = 2$, entonces $C = 4$ y la función posición será $Y(t) = 4 - 2 \cos t$.

En ciertos aspectos el ejemplo que acabamos de resolver es típico de lo que en general ocurre. En algún momento del proceso de resolución de una ecuación diferencial de primer orden, se requiere una integración para eliminar la derivada y' y en ese momento aparece una constante arbitraria C. El modo por el cual la constante C entra en la solución dependerá de la naturaleza de la ecuación diferencial dada. Puede aparecer como una constante aditiva, como en la ecuación (8.4) pero es más fácil que aparezca en alguna otra forma. Por ejemplo, cuando resolvemos la ecuación $y' = y$ de la Sección 8.3, encontramos que toda solución tiene la forma $y = Ce^{x}$.

En muchos problemas es necesario seleccionar entre todas las soluciones la que tiene un valor asignado en un cierto punto. El valor asignado se denomina *condición inicial*, y el problema de determinar una tal solución es un *problema de valores iniciales*. Esta terminología se originó en la Mecánica, en donde, como en el ejemplo anterior, el valor asignado representa la posición en un cierto instante inicial.

Comenzaremos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales con un caso particular importante.

8.3 Ecuación diferencial de primer orden para la función exponencial

La función exponencial es igual a su propia derivada, y lo mismo es válido para cualquier producto de una función exponencial por una constante. Es fácil demostrar que ésas son las únicas funciones que satisfacen esa propiedad en todo el eje real.

TEOREMA 8.1. *Si C es un número real dado, existe una y sólo una función f que satisface la ecuación diferencial*

$$f'(x) = f(x)$$

para todo x real y que satisface también la condición inicial $f(0) = C$. Esta función viene dada por la fórmula

$$f(x) = Ce^{x}.$$

Demostración. Es fácil comprobar que la función $f(x) = Ce^{x}$ satisface la ecuación diferencial y la condición inicial dadas. Tenemos que demostrar ahora que ésta es la *única* solución.

Sea $y = g(x)$ una solución cualquiera de este problema de valores iniciales:

$$g'(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \quad g(0) = C.$$

Queremos demostrar que $g(x) = Ce^x$ o que $g(x)e^{-x} = C$. Consideremos la función $h(x) = g(x)e^{-x}$ y demostremos que su derivada siempre es cero. La derivada de h viene dada por

$$h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = e^{-x}[g'(x) - g(x)] = 0\,.$$

Luego, según el teorema de la derivada nula, h es constante. Pero $g(0) = C$ por lo que $h(0) = g(0)e^0 = C$. Por tanto, tenemos $h(x) = C$ para todo x lo cual significa que $g(x) = Ce^x$, como se deseaba demostrar.

El teorema 8.1 es un ejemplo de teorema de existencia y unicidad. Nos dice que el problema de valores iniciales dado *tiene* una solución (existencia) y que tiene *una* sola solución (unicidad). El objeto de gran parte de la investigación en la teoría de las ecuaciones diferenciales es descubrir teoremas de existencia y unicidad para clases amplias de ecuaciones.

Seguidamente comentamos un tipo importante que incluye la ecuación diferencial $y' = Q(x)$ y la ecuación $y' = y$ como caso particular.

8.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial de la forma

(8.5) $$y' + P(x)y = Q(x)\,,$$

en donde P y Q son funciones dadas, se denomina ecuación diferencial *lineal de primer orden*. Los términos que contienen la función incógnita y y su derivada y' aparecen como una combinación lineal de y e y'. Las funciones P y Q se suponen continuas en un cierto intervalo abierto I. Vamos a buscar todas las soluciones y definidas en I.

Consideremos primero el caso particular en el que el segundo miembro, $Q(x)$ es idénticamente nulo. La ecuación

(8.6) $$y' + P(x)y = 0$$

se llama ecuación *homogénea* o *reducida* correspondiente a la (8.5). Resolveremos la ecuación homogénea y luego utilizaremos el resultado para resolver la ecuación no homogénea (8.5).

Si y no es nula en I, la ecuación (8.6) es equivalente a la ecuación

(8.7) $$\frac{y'}{y} = -P(x)$$

Esto es, toda y no nula que satisfaga (8.6) satisface también (8.7) y recíprocamente.

Supongamos ahora que y es una función positiva que satisface (8.7). Puesto que el cociente y'/y es la derivada de $\log y$, la ecuación (8.7) se convierte en $D \log y = -P(x)$, de la que resulta $\log y = -\int P(x)\,dx + C$, con lo cual tenemos

$$(8.8) \qquad y = e^{-A(x)}, \qquad \text{donde} \quad A(x) = \int P(x)\,dx - C\,.$$

Es decir, si existe una solución positiva de (8.6), necesariamente debe tener la forma (8.8) para un cierto valor de C. Resulta ahora fácil comprobar que toda función (8.8) es una solución de la ecuación homogénea (8.6). En efecto, tenemos

$$y' = -e^{-A(x)}A'(x) = -P(x)e^{-A(x)} = -P(x)y\,.$$

Así que, hemos encontrado todas las soluciones positivas de (8.6). Con ello, resulta sencillo expresar todas las soluciones. Establecemos el resultado como un teorema de existencia y unicidad.

TEOREMA 8.2. *Supongamos P continua en un intervalo abierto I. Elijamos un punto cualquiera a en I y sea b un número real cualquiera. Existe entonces una y sólo una función $y = f(x)$ que satisface el problema de valores iniciales*

$$(8.9) \qquad y' + P(x)y = 0, \qquad \text{con} \qquad f(a) = b\,,$$

en el intervalo I. Esta función viene dada por la fórmula

$$(8.10) \qquad f(x) = be^{-A(x)}, \qquad \text{donde} \quad A(x) = \int_a^x P(t)\,dt\,.$$

Demostración. Sea f la función definida por (8.10). Entonces $A(a) = 0$ con lo que $f(a) = be^0 = b$. La derivación nos hace ver que f satisface la ecuación diferencial (8.9), por lo que f es una solución del problema de valores iniciales. Tenemos ahora que probar que es la única solución.

Sea g una solución cualquiera. Queremos demostrar que $g(x) = be^{-A(x)}$ o que $g(x)e^{A(x)} = b$. Por tanto es natural introducir $h(x) = g(x)e^{A(x)}$. La derivada de h viene dada por

$$(8.11) \qquad h'(x) = g'(x)e^{A(x)} + g(x)e^{A(x)}A'(x) = e^{A(x)}[g'(x) + P(x)g(x)]\,.$$

Puesto que g satisface la ecuación diferencial (8,9), tenemos $g'(x) + P(x)g(x) = 0$ en todo I, luego $h'(x) = 0$ para todo x de I. Esto significa que h es constante en I. Se tiene pues, $h(x) = h(a) = g(a)e^{A(a)} = g(a) = b$. Dicho de otra manera $g(x)e^{A(x)} = b$, de manera que $g(x) = be^{-A(x)}$, lo cual demuestra que $g = f$. Esto completa la demostración.

La última parte de la demostración anterior sugiere un método para resolver la ecuación diferencial no homogénea (8.5). Supongamos que g es una función que satisfaga (8.5) y pongamos $h(x) = g(x)e^{A(x)}$ en donde, como antes, $A(x) = \int_a^x P(t)\,dt$. Entonces la ecuación (8.11) también es válida, pero ya que g satisface (8.5), la fórmula nos da para $h'(x)$,

$$h'(x) = e^{A(x)}Q(x)\,.$$

Recordando ahora el segundo teorema fundamental escribimos

$$h(x) = h(a) + \int_a^x e^{A(t)}Q(t)\,dt\,.$$

Por tanto, ya que $h(a) = g(a)$, toda solución g de (8.5) tiene la forma

$$g(x) = e^{-A(x)}h(x) = g(a)e^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,dt\,. \tag{8.12}$$

Recíprocamente, por derivación directa de (8.12), es fácil comprobar que cada una de esas g es solución de (8.5), con lo que hemos encontrado *todas* las soluciones. Obtenemos, pues, el resultado siguiente.

TEOREMA 8.3. *Supongamos que P y Q son continuas en un intervalo abierto I. Elijamos un punto a cualquiera en I y sea b cualquier número real. Existe entonces una función y una sola $y = f(x)$ que satisface el problema de valores iniciales*

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad \textit{con} \quad f(a) = b$$

en el intervalo I. Esta función viene dada por la fórmula

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,dt\,,$$

en donde $A(x) = \int_a^x P(t)\,dt$.

Hasta ahora la palabra «intervalo» significaba un intervalo acotado de la forma $(a, b), [a, b], [a, b)$ o $(a, b]$, siendo $a < b$. Es conveniente también considerar intervalos no acotados. Se representan mediante los símbolos $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, a]$, y se definen del siguiente modo:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}\,, \qquad (-\infty, a) = \{x \mid x < a\}\,,$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x > a\}\,, \qquad (-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}\,.$$

Además, conviene referirse al conjunto de *todos* los números reales citándolo como el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Así pues, cuando discutamos una ecuación diferencial o su solución en un intervalo I, se sobrentenderá que I es uno de los nueve tipos descritos.

EJEMPLO. Hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial de primer orden $xy' + (1 - x)y = e^{2x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

Solución. Primero se pone la ecuación en la forma $y' + P(x)y = Q(x)$ dividiendo por x. Esto nos da

$$y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = \frac{e^{2x}}{x},$$

con lo cual $P(x) = 1/x - 1$ y $Q(x) = e^{2x}/x$. Puesto que P y Q son continuas en el intervalo $(0, +\infty)$, existe una solución única $y = f(x)$ que satisface cualquier condición inicial dada de la forma $f(a) = b$. Expresaremos todas las soluciones en función del valor inicial en el punto $a = 1$. Es decir, dado cualquier número real b, determinaremos todas las soluciones para las que $f(1) = b$.

Calculamos primero

$$A(x) = \int_1^x P(t)\,dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - 1\right) dt = \log x - (x - 1)\,.$$

Tenemos por tanto $e^{-A(x)} = e^{x-1-\log x} = e^{x-1}/x$, y $e^{A(t)} = te^{1-t}$, con lo que el teorema 8.3 nos dice que la solución viene dada por la fórmula

$$f(x) = b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x}\int_1^x \frac{e^{2t}}{t}\,te^{1-t}\,dt = b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x}\int_1^x e^t\,dt =$$

$$= b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x}(e^x - e) = b\,\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^{x+1}}{x}\,.$$

Esto lo podemos también escribir en la forma

$$f(x) = \frac{e^{2x} + Ce^x}{x},$$

siendo $C = be^{-1} - e$. Lo que nos da todas las soluciones en el intervalo $(0, +\infty)$.

Puede ser interesante estudiar el comportamiento de las soluciones cuando $x \to 0$. Si aproximamos la exponencial mediante su polinomio lineal de Taylor, en-

contramos que $e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$ y $e^x = 1 + x + o(x)$ cuando $x \to 0$, con lo que tenemos

$$f(x) = \frac{(1 + C) + (2 + C)x + o(x)}{x} = \frac{1 + C}{x} + (2 + C) + o(1).$$

Por consiguiente, sólo la solución correspondiente a $C = -1$ tiende a un límite finito cuando $x \to 0$, siendo ese límite 1.

8.5 Ejercicios

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 5, resolver el problema de valores iniciales en el intervalo que se indica.

1. $y' - 3y = e^{2x}$ en $(-\infty, +\infty)$, con $y = 0$ cuando $x = 0$.
2. $xy' - 2y = x^5$ en $(0, +\infty)$, con $y = 1$ cuando $x = 1$.
3. $y' + y \tan x = \operatorname{sen} 2x$ en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, con $y = 2$ cuando $x = 0$.
4. $y' + xy = x^3$ en $(-\infty, +\infty)$, con $y = 0$ cuando $x = 0$.
5. $\dfrac{dx}{dt} + x = e^{2t}$ en $(-\infty, +\infty)$, con $x = 1$ cuando $t = 0$.

6. Hallar todas las soluciones de $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 1$ en el intervalo $(0, \pi)$. Demostrar que una exactamente de estas soluciones tiene límite finito cuando $x \to 0$, y otra lo tiene también finito cuando $x \to \pi$.
7. Hallar todas las soluciones de $x(x + 1)y' + y = x(x + 1)^2 e^{-x^2}$ en el intervalo $(-1, 0)$. Probar que todas las soluciones tienden a 0 cuando $x \to 1$, y que tan sólo una de ellas tiene límite finito cuando $x \to 0$.
8. Hallar todas las soluciones de $y' + y \cot x = 2 \cos x$ en el intervalo $(0, \pi)$. Probar que exactamente una de esas también es solución en $(-\infty, +\infty)$.
9. Hallar todas las soluciones de $(x - 2)(x - 3)y' + 2y = (x - 1)(x - 2)$ en cada uno de los intervalos siguientes: a) $(-\infty, 2)$; b) $(2, 3)$; c $(3, +\infty)$. Demostrar que todas las soluciones tienden a un límite finito cuando $x \to 2$, y ninguna tiene límite finito cuando $x \to 3$.
10. Pongamos $s(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ si $x \neq 0$, y $s(0) = 1$. Definamos $T(x) = \int_0^x s(t)\, dt$. Demostrar que la función $f(x) = xT(x)$ satisface la ecuación diferencial $xy' - y = x \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y hallar todas las soluciones en ese intervalo. Demostrar que la ecuación diferencial no tiene solución que satisfaga la condición inicial $f(0) = 1$, y explicar por qué esto no contradice el teorema 8.3.
11. Probar que existe una sola función f, continua en el eje real positiva, tal que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\, dt$$

para todo $x > 0$ y hallar esta función.
12. La función f definida por la ecuación

$$f(x) = xe^{(1-x^2)/2} - xe^{-x^2/2} \int_1^x t^{-2} e^{t^2/2}\, dt$$

para $x > 0$ tiene las propiedades de que 1) es continua en el eje real positivo, y 2) satisface la ecuación

$$f(x) = 1 - x \int_1^x f(t)\, dt$$

para todo $x > 0$. Hallar todas funciones con esas dos propiedades.

Ecuación de Bernouilli. Una ecuación diferencial de la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, donde n no es 0 ni 1, se llama ecuación de Bernoulli. Esta ecuación no es lineal debido a la presencia de y^n. El ejercicio siguiente muestra que siempre puede transformarse en una ecuación lineal de primer orden con una nueva función incógnita v, donde $v = y^k$, $k = 1 - n$.

13. Sea k una constante no nula. Supongamos que P y Q son continuas en un intervalo I. Si $a \in I$ y si b es un número real cualquiera, sea $v = g(x)$ la única solución del problema de valores iniciales $v' + kP(x)v = kQ(x)$ en I, con $g(a) = b$. Si $n \neq 1$ y $k = 1 - n$, demostrar que una función $y = f(x)$ no idénticamente nula en I, es una solución del problema de valores iniciales

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad \text{en } I, \qquad \text{con } f(a)^k = b$$

si y sólo si la potencia k-ésima de f es igual a g en I.

En cada uno de los Ejercicios 14 al 17, resolver el problema de valores iniciales en el intervalo que se cita.

14. $y' - 4y = 2e^x y^{1/2}$ en $(-\infty, +\infty)$, con $y = 2$ cuando $x = 0$.
15. $y' - y = -y^2(x^2 + x + 1)$ en $(-\infty, +\infty)$, con $y = 1$ cuando $x = 0$.
16. $xy' - 2y = 4x^3 y^{1/2}$ en $(-\infty, +\infty)$, con $y = 0$ cuando $x = 1$.
17. $xy' + y = y^2 x^2 \log x$ en $(0, +\infty)$, con $y = \frac{1}{2}$ cuando $x = 1$.
18. $2xyy' + (1 + x)y^2 = e^x$ en $(0, +\infty)$, con (a) $y = \sqrt{e}$ cuando $x = 1$; (b) $y = -\sqrt{e}$ cuando $x = 1$; (c) un límite finito cuando $x \to 0$.
19. Una ecuación de la forma $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$ se llama *ecuación de Riccati.* (No se conoce método para resolver la ecuación general de Riccati.) Demostrar que si u es una solución conocida de esa ecuación, existen entonces otras soluciones de la forma $y = u + 1/v$, siendo v una función que satisface una ecuación lineal de primer orden.
20. La ecuación de Riccati $y' + y + y^2 = 2$ tiene dos soluciones constantes. Partir de cada una de esas y utilizar el Ejercicio 19 para hallar otras soluciones del modo siguiente: a) Si $-2 \leq b < 1$, hallar una solución en $(-\infty, +\infty)$ para la que $y = b$ cuando $x = 0$. b) Si $b \geq 1$ o $b < -2$, hallar una solución en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ para la que $y = b$ cuando $x = 0$.

8.6 Algunos problemas físicos que conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta Sección discutiremos varios problemas físicos que pueden ser formulados matemáticamente como ecuaciones diferenciales. En cada caso, la ecuación

diferencial representa una simplificación idealizada del problema físico y se llama *modelo matemático del problema.* La ecuación diferencial se presenta como una traducción de una cierta ley física, tal como la segunda ley del movimiento de Newton, la ley de la «conservación», etc. Nuestro propósito aquí no es justificar la elección del modelo matemático sino más bien deducir consecuencias lógicas del mismo. Cada modelo es solamente una aproximación de la realidad, y su justificación pertenece propiamente a la ciencia a la que el problema corresponde. Si la intuición o la evidencia experimental concuerdan con los resultados deducidos matemáticamente, apreciamos que el modelo nos resulta útil. Si no es así, intentamos encontrar un modelo más conveniente.

EJEMPLO 1. *Desintegración radiactiva.* Aunque los distintos elementos radiactivos presentan diferencias notables en sus coeficientes de desintegración, todas las sustancias tienen la propiedad común de que la velocidad de descomposición de una determinada sustancia en cada instante es proporcional a la cantidad de sustancia existente en aquel instante. Si se designa por $y = f(t)$ la cantidad de sustancia radiactiva existente en el instante t, la derivada $y' = f'(t)$ representa la velocidad de cambio de y en el instante t y la ley de descomposición expresa:

$$y' = -ky\ ,$$

donde k es una constante positiva (llamada *constante de desintegración*) cuyo valor depende del elemento particular que se está descomponiendo. El signo menos es debido a que y decrece cuando t crece, y por tanto y' es siempre negativo. La ecuación diferencial $y' = -ky$ es el modelo matemático utilizado para problemas relativos a desintegración radiactiva. Toda solución $y = f(t)$ de esta ecuación diferencial tiene la forma

$$f(t) = f(0)e^{-kt} \tag{8.13}$$

Por consiguiente, para determinar la cantidad presente en el instante t, necesitamos conocer la cantidad inicial $f(0)$ y el valor de la constante de desintegración k.

Es interesante ver qué información se puede deducir de (8.13), sin conocer exactamente el valor de $f(0)$ o de k. En primer lugar se observa que para ningún valor finito del tiempo t se anula $f(t)$ puesto que la exponencial e^{-kt} es siempre positiva; por tanto, no se puede hablar de «tiempo total de vida» de una sustancia radiactiva. Sin embargo, es posible determinar el tiempo necesario para que se desintegre una *fracción* de la muestra. Frecuentemente se elige la fracción $\frac{1}{2}$, y el tiempo T en el cual $f(T)/f(0) = \frac{1}{2}$ se denomina *vida media* de la sustancia, que es el tiempo necesario para que la masa de la sustancia radiactiva se reduzca a la

mitad. Este valor de T se puede determinar resolviendo la ecuación $e^{-kT} = \frac{1}{2}$ respecto T. Tomando logaritmos se tiene $-kT = -\log 2$ ó $T = (\log 2)/k$. Puesto que es:

$$\frac{f(t + T)}{f(t)} = \frac{f(0)e^{-k(t+T)}}{f(0)e^{-kt}} = e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

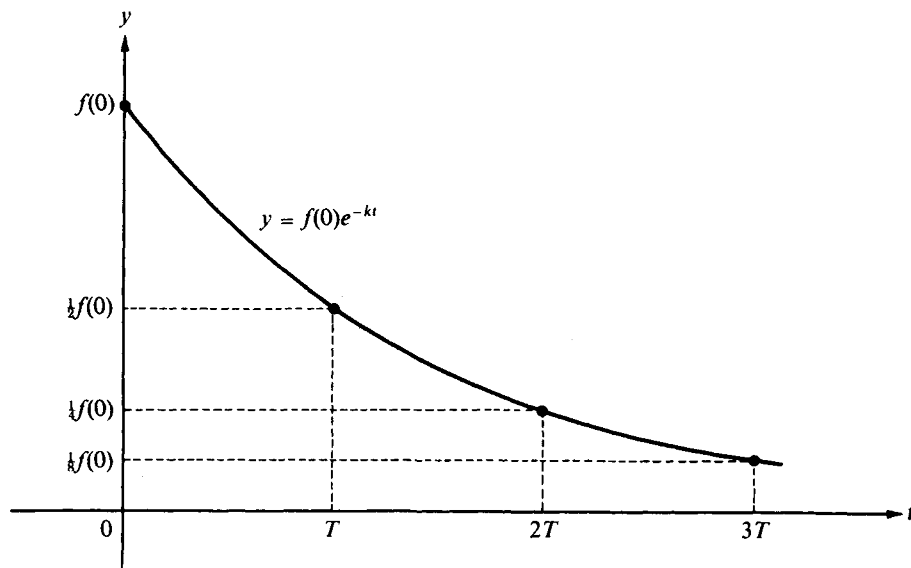


FIGURA 8.1 *Desintegración radiactiva con vida media T.*

se ve que la vida media es la misma cualquiera que sea la muestra de un material radiactivo dado. La figura 8.1 da una idea general de la forma de una curva de desintegración radiactiva.

EJEMPLO 2. *Caída de un cuerpo en un medio resistente.* Un cuerpo en reposo de masa m es lanzado a gran altura en la atmósfera terrestre. Supuesto que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad terrestre (mg, donde g es la aceleración de la gravedad, supuesta constante) y una fuerza resistente (debida a la resistencia del aire) que es proporcional a su velocidad, se trata de estudiar el movimiento resultante.

Sea $s = f(t)$ la distancia recorrida por el móvil en el instante t y sea $v = s' = f'(t)$ su velocidad. De la hipótesis de que parte del reposo se deduce $f'(0) = 0$.

Hay dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo, una descendente mg debida a su peso y otra ascendente $-kv$ (debida a la resistencia del aire) donde k es una

constante positiva. La segunda ley de Newton dice que la suma de las fuerzas que actúan en un cuerpo en cada instante es igual al producto de su masa m por su aceleración. Si se indica por a la aceleración en el instante t, entonces $a = v' = s''$ y la ley de Newton da la ecuación

$$ma = mg - kv\,.$$

Ésta se puede considerar como una ecuación diferencial de segundo orden si se considera la función de desplazamiento s o de primer orden si se considera la función velocidad v. Como ecuación de primer orden en v, es lineal y puede escribirse en la forma

$$v' + \frac{k}{m}v = g\,.$$

Esta ecuación es el modelo matemático del problema. Puesto que $v = 0$ cuando $t = 0$, la única solución de la ecuación diferencial viene dada por la fórmula

$$v = e^{-kt/m}\int_0^t ge^{ku/m}\,du = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})\,. \tag{8.14}$$

Obsérvese que $v \to mg/k$ cuando $t \to +\infty$. Si derivamos la ecuación (8.14), encontramos que la aceleración en todo instante es $a = ge^{-kt/m}$. Asimismo $a \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Interpretado físicamente, esto significa que la resistencia del aire tiende a equilibrar la fuerza de la gravedad.

Puesto que $v = s'$, la ecuación (8.14) es a su vez una ecuación diferencial en la función de desplazamiento s, que puede integrarse directamente resultando:

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{gm^2}{k^2}e^{-kt/m} + C\,.$$

Puesto que $s = 0$ cuando $t = 0$ se tiene $C = -gm^2/k^2$ resultando la ecuación del movimiento:

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{gm^2}{k^2}(e^{-kt/m} - 1)\,.$$

Si la velocidad inicial es v_0 cuando $t = 0$, la fórmula (8.14) para la velocidad en el tiempo t se ha de sustituir por

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) + v_0e^{-kt/m}\,.$$

Es interesante notar que para *toda* velocidad inicial (positiva, negativa o cero) la velocidad límite cuando t crece indefinidamente es mg/k, número independiente de v_0. El lector debe buscar la explicación de este hecho en razones de carácter físico.

EJEMPLO 3. *Un problema sobre enfriamiento.* El coeficiente de variación de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente. (*Ley de enfriamiento de Newton.*) Si $y = f(t)$ es la temperatura (desconocida) del cuerpo en el instante t y $M(t)$ designa la temperatura (conocida) del medio ambiente, la ley de Newton conduce a la ecuación diferencial

$$y' = -k[y - M(t)] \qquad \text{o} \qquad y' + ky = kM(t)\,, \tag{8.15}$$

siendo k una constante positiva. Esta ecuación lineal de primer orden es el modelo matemático que usamos para los problemas de enfriamiento. La única solución de la ecuación que satisface la condición inicial $f(a) = b$ viene dada por la fórmula

$$f(t) = be^{-kt} + e^{-kt}\int_a^t kM(u)e^{ku}\,du\,. \tag{8.16}$$

Consideremos ahora un caso particular en el que el cuerpo pasa de 200° a 100° en 40 minutos al ser sumergido en un medio cuya temperatura se mantiene constante, sea por ejemplo $M(t) = 10°$. Si medimos t en minutos y $f(t)$ en grados, tenemos $f(0) = 200$ y la ecuación (8.16) nos da

$$\begin{aligned} f(t) &= 200e^{-kt} + 10ke^{-kt}\int_0^t e^{ku}\,du = \\ &= 200e^{-kt} + 10(1 - e^{-kt}) = 10 + 190e^{-kt}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Podemos calcular k a partir de la información de que $f(40) = 100$. Poniendo en (8.17) $t = 40$, encontramos $90 = 190e^{-40t}$, con lo que $-40k = \log(90/190)$, $k = \frac{1}{40}(\log 19 - \log 9)$.

Seguidamente, calculamos el tiempo que necesita este mismo material para enfriarse de 200° a 100° si la temperatura del medio se mantiene a 5°. Entonces la ecuación (8.16) es válida con la misma constante k pero con $M(u) = 5$. En lugar de (8.17), ponemos la fórmula

$$f(t) = 5 + 195e^{-kt}.$$

Para encontrar el instante t para el cual $f(t) = 100$, ponemos $95 = 195e^{-kt}$, con lo que $-kt = \log(95/195) = \log(19/39)$, y por tanto

$$t = \frac{1}{k}(\log 39 - \log 19) = 40\,\frac{\log 39 - \log 19}{\log 19 - \log 9}.$$

En una tabla de logaritmos con cuatro cifras decimales, encontramos $\log 39 = 3{,}6636$, $\log 19 = 2{,}9444$, y $\log 9 = 2{,}1972$ con lo que, aproximando, encontramos $t = 40(0{,}719)/(0{,}747) = 38{,}5$ minutos.

La ecuación diferencial (8.15) exprèsa que la velocidad de enfriamiento decrece considerablemente cuando la temperatura del cuerpo tiende a acercarse a la temperatura del medio. Como ejemplo, se puede buscar el tiempo necesario para enfriar la misma sustancia de 100° a 10° con el medio constantemente a 5°. El cálculo conduce a $\log(5/95) = -kt$, o

$$t = \frac{1}{k}\log 19 = 40\,\frac{\log 19}{\log 19 - \log 9} = \frac{40(2.944)}{0.747} = 158 \text{ minutos.}$$

Obsérvese que el descenso de temperatura de 100° a 10° necesita un tiempo que excede a cuatro veces el tiempo necesario para pasar de 200° a 100°.

EJEMPLO 4. *Un problema de disolución.* Un depósito contiene 100 l de una disolución salina cuya concentración es 2,5 g de sal por litro. Una disolución conteniendo 2 g de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 l por minuto y la mezcla (que se hace uniforme por el movimiento) sale a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

Sea $y = f(t)$ el número de gramos de sal que hay en el depósito t minutos después de haber comenzado la mezcla. Hay dos factores que producen la variación de y, la disolución que agrega sal a razón de 10 g por minuto y la mezcla que sale que disminuye la cantidad de sal a razón de $5(y/100)$ gramos por minuto. (La fracción $y/100$ representa la concentración en el tiempo t.) Por tanto la ecuación diferencial es:

$$y' = 10 - \tfrac{1}{20}y \qquad \text{o} \qquad y' + \tfrac{1}{20}y = 10\,.$$

Esta ecuación lineal es el modelo matemático para nuestro problema. Ya que $y = 250$ cuando $t = 0$, la única solución viene dada por la fórmula

$$y = 250e^{-t/20} + e^{-t/20}\int_0^t 10e^{u/20}\,du = 200 + 50e^{-t/20} \tag{8.18}$$

Esta ecuación muestra que $y > 200$ para todo t y que $y \to 200$ cuando t crece indefinidamente. Luego el mínimo de contenido de sal es 200 g, lo que también

hubiera podido deducirse del enunciado del problema. En la ecuación (8.18) se puede despejar t en función de y obteniéndose:

$$t = 20 \log \left(\frac{50}{y - 200}\right).$$

Esta ecuación permite encontrar el tiempo en el que la sal contenida sea una determinada cantidad y, siempre que $200 < y < 250$.

EJEMPLO 5. *Circuitos eléctricos.* En la figura 8.2(a), aparece una fuerza electromotriz, una resistencia, y una autoinducción conectadas en serie. La fuerza electromotriz produce un voltaje que origina una corriente eléctrica que recorre el circuito. Si el lector no está familiarizado con los circuitos eléctricos, no debe preocuparse. Para nuestro objeto, todo lo que precisamos conocer acerca del circuito es que el voltaje, designado por $V(t)$, y la intensidad de la corriente, designada por $I(t)$, son funciones del tiempo t ligadas por una ecuación diferencial de la forma

$$LI'(t) + RI(t) = V(t). \tag{8.19}$$

Aquí L y R se suponen constantes positivas. Se llaman respectivamente, la *inductancia* y la *resistencia* del circuito. La ecuación diferencial es una formulación matemática de una ley de conservación, llamada *ley del voltaje de Kirchhoff*, y sirve como modelo matemático para el circuito.

Aquellos lectores no versados en circuitos pueden encontrar útil imaginar que la corriente es como el agua que circula por un tubo. La fuerza electromotriz (ordinariamente batería o generador) es análoga a una bomba que hace fluir el agua; la resistencia se parece a la fricción en el tubo, que tiende a oponerse al flujo de corriente; y la inductancia es una influencia estabilizadora que tiende a impedir cambios bruscos en la corriente debidos a variaciones súbitas en el voltaje.

El tipo corriente de preguntas relativas a tales circuitos es este: Si se aplica en el circuito un cierto voltaje $V(t)$, ¿cuál es la intensidad resultante $I(t)$? La solución se consigue mediante una ecuación diferencial lineal de primer orden. Si $I(0)$ representa la intensidad inicial en el instante $t = 0$, la ecuación tiene la solución

$$I(t) = I(0)e^{-Rt/L} + e^{-Rt/L}\int_0^t \frac{V(x)}{L}\, e^{Rx/L}\, dx.$$

Un caso particular importante se presenta cuando el voltaje aplicado es constante, por ejemplo $V(t) = E$ para todo t. En este caso, la integración resulta fácil y nos conduce a la fórmula

$$I(t) = \frac{E}{R} + \left(I(0) - \frac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}$$

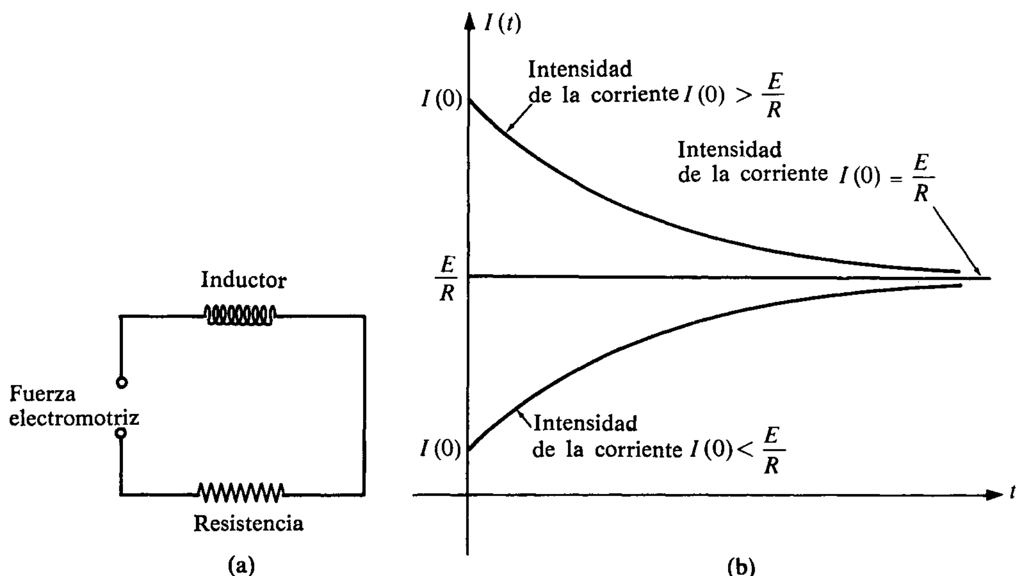


FIGURA 8.2 a) *Diagrama para un circuito simple en serie.* b) *Intensidad resultante al aplicar un voltaje constante E.*

Esto demuestra que la naturaleza de la solución depende de la relación entre la intensidad inicial $I(0)$ y el cociente E/R. Si $I(0) = E/R$, el término exponencial no aparece y la intensidad es constante, $I(t) = E/R$. Si $I(0) > E/R$, el coeficiente del término exponencial es positivo y la intensidad decrece hacia el valor límite E/R cuando $t \to +\infty$. Si $I(0) < E/R$, la intensidad crece hacia el valor límite E/R. La constante E/R es la *componente estacionaria* de la intensidad, y el término exponencial $[I(0) - E/R]e^{-Rt/L}$ es la *componente variable* de la misma. Véanse ejemplos en la figura 8.2(b).

Los ejemplos precedentes hacen ver el poder unificador y la utilidad práctica de las ecuaciones diferenciales. Muestran cómo diversos tipos de problemas físicos pueden conducir exactamente al mismo tipo de ecuación diferencial.

La ecuación diferencial (8.19) es de especial interés debido a que sugiere la posibilidad de acometer la solución de una amplia variedad de problemas físicos usando medios eléctricos. Por ejemplo, supongamos un problema físico que nos conduzca a una ecuación diferencial de la forma

$$y' + ay = Q\,,$$

siendo a una constante positiva y Q una función conocida. Podemos intentar la construcción de un circuito eléctrico con una inductancia L y una resistencia R

de manera que sea $R/L = a$ y entonces aplicar un voltaje LQ en el circuito. Tendríamos entonces un circuito eléctrico con el mismo modelo matemático que el problema físico. Así se podrían obtener datos numéricos de la solución del problema físico con mediciones de la intensidad en el circuito eléctrico. Esta idea se ha puesto en práctica y ha conducido al desarrollo de los *calculadores analógicos.*

8.7 Ejercicios

En los Ejercicios que siguen, utilizar una ecuación diferencial de primer orden adecuada como modelo matemático del problema.

1. La vida media del radio es aproximadamente 1600 años. Encontrar qué porcentaje de una cantidad dada de radio se ha desintegrado en 100 años.
2. Si una cepa de bacterias aumenta en forma proporcional a la cantidad presente y si la población se duplica en una hora, ¿en cuánto aumentará al cabo de 2 horas?
3. Sea $y = f(t)$ la cantidad de una sustancia que existe en el instante t. Supongamos que se desintegra en forma proporcional a la cantidad presente. Si n es un entero positivo, el número T para el cual $f(T) = f(0)/n$ es la vida n-ésima de la sustancia.

   a) Demostrar que dicho valor T *es el mismo para toda muestra de un material determinado,* y calcular T en función de n y de la constante de desintegración k.

   b) Si a y b son dados, probar que f puede expresarse en la forma

$$f(t) = f(a)^{w(t)}f(b)^{1-w(t)}$$

   y determinar $w(t)$. Esto prueba que la cantidad presente en el instante t es una media geométrica ponderada de las cantidades existentes en dos instantes $t = a$ y $t = b$.
4. Un hombre provisto de un paracaídas se lanza desde gran altura. El peso conjunto del hombre y el paracaídas es 98 kg. Sea $v(t)$ la velocidad (en metros por segundo) t segundos después del lanzamiento. Durante los 10 primeros segundos antes de abrirse el paracaídas se supone que la resistencia del aire es $0{,}1\,v(t)$ kg. Después, una vez abierto el paracaídas, la resistencia del aire es $2v(t)$ kg. Se supone que la aceleración de la gravedad es 9,8 m/sg^2 y se trata de hallar fórmulas explícitas para la velocidad $v(t)$ y el tiempo t. (Puede utilizarse la aproximación $e^{-5/4} = 37/128$ en los cálculos.)
5. Teniendo en cuenta el ejemplo 2 de la Sección 8.6, y utilizando la regla de la cadena para escribir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds}$$

   demostrar que la ecuación diferencial del ejemplo puede expresarse del modo siguiente:

$$\frac{ds}{dv} = \frac{bv}{c - v},$$

   en donde $b = m/k$ y $c = gm/k$. Integrar esa ecuación para expresar s en función de v. Comparar el resultado con las fómulas para v y s deducidas en el ejemplo.

6. Modificar el ejemplo 2 de la Sección 8.6 suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a v^2. Demostrar que la ecuación diferencial puede ponerse en cada una de las formas siguientes:

$$\frac{ds}{dv} = \frac{m}{k}\frac{v}{c^2 - v^2}\,; \qquad \frac{dt}{dv} = \frac{m}{k}\frac{1}{c^2 - v^2}\,,$$

en donde $c = \sqrt{mg/k}$. Integrar cada una de ellas y obtener las siguientes fórmulas para r:

$$v^2 = \frac{mg}{k}(1 - e^{-2ks/m})\,; \qquad v = c\,\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{e^{bt} + e^{-bt}} = c \tanh bt\,,$$

en donde $b = \sqrt{kg/m}$. Determinar los valores límite de v cuando $t \to +\infty$.

7. Un cuerpo en una habitación a 60° F se enfría de 200° F a 120° F en media hora.
(a) Probar que su temperatura después de t minutos es $60 + 140e^{-kt}$ donde $k = (\log 7 - \log 3)/30$.
(b) Probar que el tiempo necesario para alcanzar la temperatura T°F está dado por la fórmula $t = [\log 140 - \log (T - 60)]/k$ donde $60 < T \leq 200$.
(c) Hallar el instante en que la temperatura es 90° F.
(d) Hallar una fórmula que exprese en función de t la temperatura del cuerpo cuando la temperatura de la habitación no se mantenga constante, sino que disminuya a razón de 1° F cada 10 minutos. Se supondrá que la temperatura de la habitación es 60° F cuando la del cuerpo es 200° F.

8. Un termómetro se mantenía guardado en una habitación cuya temperatura era 75° F. Cinco minutos después de haberlo sacado de la habitación el termómetro marca 65° F. Otros cinco minutos después marca 60° F. Calcular la temperatura exterior.

9. Un tanque contiene 378,53 l de una disolución salina obtenida al disolver 22,68 kg de sal. Por una entrada fluye agua al tanque a razón de 11,36 l por minuto manteniéndose la concentración uniforme por medio de agitadores. ¿Cuánta sal habrá en el tanque al cabo de una hora si por un desagüe sale disolución a razón de 7,57 l por minuto?

10. Las condiciones son las del Ejercicio anterior. El fondo del tanque está cubierto con una mezcla de sal y material insoluble, y se supone que la sal se disuelve con una velocidad proporcional a la diferencia entre la concentración de la solución y la de una disolución saturada (362 gramos por litro) y que si el agua fuera pura se disolvería 453,6 g de sal por minuto. ¿Cuánta sal habrá en la solución cuando haya transcurrido la hora?

11. Consideremos un circuito eléctrico parecido al del Ejercicio 5 de la Sección 8.6. Supongamos que la fuerza electromotriz es un generador de corriente alterna que produce un voltaje $V(t) = E \operatorname{sen} \omega t$, donde E y ω son constantes positivas. Si $I(0) = 0$, demostrar que la intensidad tiene la expresión

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\, e^{-Rt/L},$$

en donde α sólo depende de ω, L y R. Demostrar que $\alpha = 0$ cuando $L = 0$.

12. En el ejemplo 5 de la Sección 8.6, suponer que el voltaje es una función escalonada definida así: $E(t) = E$ si $a \leq t \leq b$, siendo $a > 0$; $E(t) = 0$ para cualquier otro valor de t.

Si $I(0) = 0$ demostrar que la intensidad viene dada por las fórmulas siguientes: $I(t) = 0$ si $t \leq a$;

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-R(t-a)/L}) \quad \text{si} \quad a \leq t \leq b\,; \quad I(t) = \frac{E}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rb/L} - e^{Ra/L}) \quad \text{si} \quad t \geq b\,.$$

Hacer un esquema indicando la naturaleza de la gráfica de I.

Crecimiento de la población. En el estudio del crecimiento de una población (que puede ser humano, animal o bacteriano), la función que cuenta el número x de individuos presentes en el instante t es necesariamente una *función* escalonada que solamente toma valores enteros. Por consiguiente el verdadero *coeficiente de crecimiento* dx/dt es cero (si t está contenido en un intervalo abierto donde x es constante), o bien la derivada dx/dt no existe (cuando x salta de un entero a otro). No obstante, se pueden obtener informaciones útiles si se supone que la población x es una función continua de t con derivada continua dx/dt en cada instante. En la hipótesis anterior, se postulan las «leyes de crecimiento de la población», que dependen de factores del medio ambiente que pueden estimular o retardar el crecimiento.

Por ejemplo, si el medio ambiente tiene un efecto pequeño o nulo, parece natural suponer que la velocidad de crecimiento es proporcional al total de la población, y entonces la ley de crecimiento tomará la forma:

$$\frac{dx}{dt} = kx\,, \tag{8.20}$$

donde k es una constante que depende de la naturaleza de la población. Puede ocurrir en determinadas condiciones que el factor k varíe con el tiempo, y la ley de crecimiento (8.20) puede generalizarse como sigue:

$$\frac{dx}{dt} = k(t)x\,. \tag{8.21}$$

Si, por alguna razón, la población no puede exceder a cierto máximo M (por ejemplo, por agotarse los alimentos), parece natural suponer la velocidad de crecimiento proporcional a ambos x y $M - x$ simultáneamente. Se tiene pues un segundo tipo de ley de crecimiento.

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x)\,, \tag{8.22}$$

donde, como en (8.21), k puede ser constante, o más generalmente k puede variar con el tiempo. Mejoras tecnológicas pueden hacer que el valor de M crezca o decrezca paulatinamente y por tanto se puede generalizar (8.22) suponiendo que M varía con el tiempo.

13. Expresar x en función de t para cada una de las «leyes de crecimiento» en (8.20) y (8.22) (con k y M ambas constantes). Probar que el resultado de (8.22) se puede expresar como sigue:

$$x = \frac{M}{1 + e^{-\alpha(t-t_0)}}\,, \tag{8.23}$$

donde α es una constante y t_0 es el tiempo en el que $x = M/2$.

14. Considérese la ley de crecimiento en la fórmula (8.23) del Ejercicio 13 y supóngase que haciendo el censo en tres intervalos de tiempo iguales t_1, t_2, t_3, los números han sido x_1, x_2, x_3. Demostrar que se tienen datos suficientes para determinar M y que en efecto se tiene:

$$M = x_2 \frac{x_3(x_2 - x_1) - x_1(x_3 - x_2)}{x_2^2 - x_1 x_3}. \tag{8.24}$$

15. Deducir la fórmula que generaliza (8.23) del Ejercicio 13 para la ley de crecimiento (8.22) cuando k no es necesariamente constante. Expresar el resultado con relación al tiempo t_0 para el cual $x = M/2$.
16. El Census Bureau da los siguientes datos (en millones) de población en los Estados Unidos en intervalos de 10 años desde 1790 a 1950; 3,9, 5,3, 7,2, 9,6, 12,9, 17, 23, 31, 39, 50, 63, 76, 92, 108, 122, 135, 150.
(a) Aplicando la ecuación (8.24) determinar el valor de M a base de los datos del censo para 1790, 1850 y 1910.
(b) Lo mismo que en (a) para los años 1910, 1930 y 1950.
(c) Partiendo de los cálculos hechos en (a) y (b) ¿se puede considerar como aceptable o no la ley de crecimiento (8.23) para la población de los Estados Unidos?
17. (a) Dibújese la gráfica de $\log x$ como función de t, donde x representa los datos del censo dados en el Ejercicio 16. Utilizar esta gráfica para demostrar que la ley de crecimiento (8.20) se satisfacía con mucha aproximación desde 1790 a 1910. Determinar un valor medio razonable de k para este período.
(b) Determínese un valor medio razonable de k para el período desde 1920 a 1950; supóngase que la ley de crecimiento (8.20) es válida para esta k, y predecir la población de los Estados Unidos para los años 2000 y 2050.
18. La presencia de toxinas en un cierto medio destruye un cultivo de bacterias, siendo el cociente diferencial de destrucción proporcional al número de bacterias y a la cantidad de toxinas presentes en el cultivo. Si no hubiera toxinas las bacterias crecerían con

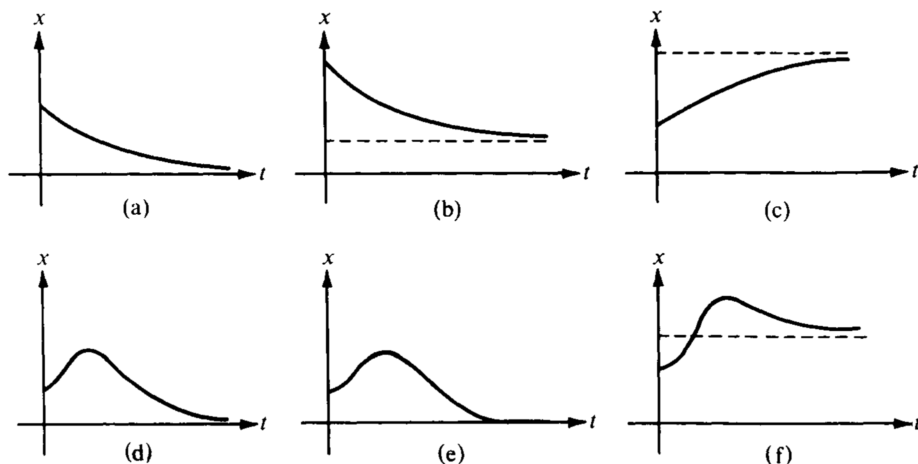


FIGURA 8.3 Ejercicio 18.

una velocidad proporcional a la cantidad total de bacterias existente. Sea x el número de bacterias vivientes en el instante t. Supóngase que la cantidad de toxinas crece con velocidad constante y que la producción de toxinas empieza en el instante $t = 0$. Establecer una ecuación diferencial para x. Resolver la ecuación diferencial. Una de las curvas de la figura 8.3 es la que representa mejor el comportamiento general de x como función de t. Decir cuál es la elegida y explicar el porqué.

8.8 Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x)$$

se denomina *ecuación lineal de segundo orden*. Las funciones P_1 y P_2 que multiplican la función incógnita y y su derivada y' son los *coeficientes* de la ecuación.

Para las ecuaciones lineales de primer orden, dimos un teorema de existencia y unicidad y determinamos todas las soluciones mediante una fórmula. Si bien existe un teorema de existencia y unicidad para la ecuación general lineal de segundo orden, no hay una fórmula que nos dé todas las soluciones, salvo en algunos casos particulares. En el Volumen II se expone un estudio de la ecuación lineal general de segundo orden. Aquí sólo tratamos el caso en el que los coeficientes P_1 y P_2 son constantes. Cuando el segundo miembro $R(x)$ es idénticamente nulo, la ecuación se llama *homogénea*.

La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes fue la primera ecuación diferencial de un tipo general que se resolvió completamente. En 1743, Euler publicó una primera solución. Aparte de su interés histórico, esta ecuación se presenta en una gran variedad de problemas de aplicación, de manera que su estudio es de importancia práctica. Además, podemos dar fórmulas para todas las soluciones.

Consideremos una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes que escribimos así:

$$y'' + ay' + by = 0 .$$

Buscamos soluciones en todo el eje real $(-\infty, +\infty)$. Una solución es la función constante $y = 0$. Ésta se llama la solución *trivial*. Nos interesa hallar soluciones no triviales, y comenzamos nuestro estudio con algunos casos particulares para los que pueden encontrarse soluciones no triviales, por simple inspección. En todos esos casos, el coeficiente de y' es nulo, y la ecuación tiene la forma $y'' + by = 0$. Veremos que resolver esta ecuación particular equivale a resolver el caso general.

8.9 Existencia de soluciones de la ecuación $y'' + by = 0$

EJEMPLO 1. *La ecuación* $y'' = 0$. En este caso son nulos los dos coeficientes a y b, y podemos determinar todas las soluciones con facilidad. Supongamos que y es una función cualquiera que satisfaga $y'' = 0$ en $(-\infty, +\infty)$. Entonces su derivada y' es constante, pongamos $y' = c_1$. Integrando esta relación, encontramos que y es necesariamente de la forma

$$y = c_1 x + c_2 ,$$

en donde c_1 y c_2 son constantes. Recíprocamente, para cualquier par de constantes c_1 y c_2, el polinomio de primer grado $y = c_1 x + c_2$ satisface $y'' = 0$, con lo que hemos hallado todas las soluciones para este caso.

Seguidamente suponemos que $b \neq 0$ y tratamos por separado los casos $b < 0$ y $b > 0$.

EJEMPLO 2. *Ecuación* $y'' + by = 0$, *siendo* $b < 0$. Ya que $b < 0$, podemos escribir $b = -k^2$, siendo $k > 0$, y la ecuación diferencial toma la forma

$$y'' = k^2 y .$$

Una solución inmediata es $y = e^{kx}$, y otra $y = e^{-kx}$. A partir de ellas podemos obtener otras soluciones construyendo combinaciones lineales de la forma

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx},$$

siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias. En el teorema 8.6 se demostrará que *todas* las soluciones quedan incluidas en esta fórmula.

EJEMPLO 3. *Ecuación* $y'' + by = 0$, *siendo* $b > 0$. Aquí podemos escribir $b = k^2$, donde $k > 0$, y la ecuación diferencial toma la forma

$$y'' = -k^2 y .$$

Otra vez obtenemos soluciones de modo inmediato. Una solución es $y = \cos kx$, y otra $y = \operatorname{sen} kx$. A partir de ellas logramos otras soluciones formando combinaciones lineales,

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx ,$$

en donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera. El teorema 8.6 demostrará que esta fórmula incluye todas las soluciones.

8.10 Reducción de la ecuación general al caso particular $y'' + by = 0$.

El problema de resolver una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes puede reducirse al de resolver los casos particulares que acabamos de ver. Existe un método para hacer lo que se aplica también a ecuaciones más generales. La idea es considerar tres funciones y, u, y v tales que $y = uv$. Derivando obtenemos $y' = uv' + u'v$, e $y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$. Expresemos ahora la combinación $y'' + ay' + by$ en función de u y v. Obtenemos

$$(8.25)\qquad \begin{aligned} y'' + ay' + by &= uv'' + 2u'v' + u''v + a(uv' + u'v) + buv = \\ &= (v'' + av' + bv)u + (2v' + av)u' + vu''. \end{aligned}$$

Elijamos seguidamente v para que el coeficiente de u' sea cero. Esto exige que $v' = -av/2$, con lo cual podemos elegir $v = e^{-ax/2}$. Para esta v tenemos $v'' = -av'/2 = a^2v/4$, y el coeficiente de u en (8.25) se convierte en

$$v'' + av' + bv = \frac{a^2v}{4} - \frac{a^2v}{2} + bv = \frac{4b - a^2}{4}\,v\,.$$

Así pues, la ecuación (8.25) se reduce a

$$y'' + ay' + by = \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4}\,u\right)v\,.$$

Puesto que $v = e^{-ax/2}$, la función v nunca es cero, con lo cual y satisface la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ si y sólo si u satisface $u'' + \frac{1}{4}(4b - a^2)u = 0$. Así pues, hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 8.4. *Sean y y u dos funciones tales que $y = ue^{-ax/2}$. Entonces, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, y satisface la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ si y sólo si u satisface la ecuación diferencial*

$$u'' + \frac{4b - a^2}{4}\,u = 0\,.$$

Este teorema reduce el estudio de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ al caso particular $y'' + by = 0$. Hemos encontrado soluciones no triviales de esta ecuación pero, salvo para el caso $b = 0$, no hemos demostrado que se han hallado *todas* las soluciones.

8.11 Teorema de unicidad para la ecuación $y'' + by = 0$

El problema de determinar todas las soluciones de la ecuación $y'' + by = 0$ puede resolverse con el siguiente *teorema de unicidad.*

TEOREMA 8.5. *Supongamos dos funciones* f *y* g *que satisfagan la ecuación diferencial* $y'' + by = 0$ *en* $(-\infty, +\infty)$. *Supongamos también que satisfacen las condiciones iniciales*

$$f(0) = g(0), \qquad f'(0) = g'(0).$$

Entonces es $f(x) = g(x)$ *para todo* x.

Demostración. Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Queremos probar que $h(x) = 0$ para todo x. Haremos esto expresando h en función de sus aproximaciones por polinomios de Taylor.

Observamos primero que h es también una solución de la ecuación diferencial $y'' + by = 0$ y satisface las condiciones iniciales $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Toda función y que satisfaga la ecuación diferencial tiene derivadas de cualquier orden en $(-\infty, +\infty)$ y pueden calcularse por derivación reiterada de la ecuación diferencial. Por ejemplo, puesto que $y'' = -by$, tenemos $y''' = -by'$, e $y^{(4)} = -by'' = b^2y$. Por inducción encontramos que las derivadas de orden par vienen dadas por

$$y^{(2n)} = (-1)^n b^n y,$$

en tanto que las de orden impar son $y^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}b^{n-1}y'$. Puesto que $h(0)$ y $h'(0)$ son ambas 0, resulta que todas las derivadas $h^{(n)}(0)$ son nulas. Por consiguiente, cada polinomio de Taylor engendrado por h en el punto $x = 0$ tiene todos sus coeficientes nulos.

Apliquemos ahora la fórmula de Taylor con resto (teorema 7.6), usando un polinomio de aproximación de grado impar $2n - 1$, y encontramos que

$$h(x) = E_{2n-1}(x),$$

donde $E_{2n-1}(x)$ es el término de error en la fórmula de Taylor. Para completar la demostración, hacemos patente que el error puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande.

Utilizamos el teorema 7.7 para estimar la magnitud del término de error. Para ello necesitamos estimar la magnitud de la derivada $h^{(2n)}$. Consideremos cualquier intervalo cerrado finito $[-c, c]$, siendo $c > 0$. Ya que h es continua en ese intervalo, es acotada en él, sea por ejemplo $|h(x)| \leq M$ en $[-c, c]$. Ya que

$h^{(2n)}(x) = (-1)^n b^n h(x)$, tenemos la estimación $|h^{(2n)}(x)| \leq M|b|^n$ en $[-c, c]$. El teorema 7.7 nos da $|E_{2n-1}(x)| \leq M|b|^n x^{2n}/(2n)!$ con lo que, en el intervalo $[-c, c]$, tenemos la estimación

$$0 \leq |h(x)| \leq \frac{M\,|b|^n\,x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{M\,|b|^n\,c^{2n}}{(2n)!} = \frac{MA^{2n}}{(2n)!}, \tag{8.26}$$

siendo $A = |b|^{1/2}c$. Demostramos ahora que $A^m/m!$ tiende hacia 0 cuando $m \to +\infty$. Esto es obvio si $0 \leq A \leq 1$. Si $A > 1$, podemos escribir

$$\frac{A^m}{m!} = \frac{A}{1} \cdot \frac{A}{2} \cdots \frac{A}{k} \cdot \frac{A}{k+1} \cdots \frac{A}{m} \leq \frac{A^k}{k!}\left(\frac{A}{k+1}\right)^{m-k},$$

siendo $k < m$. Si elegimos para k el mayor entero $\leq A$, entonces $A < k + 1$ y el último factor tiende a 0 cuando $m \to +\infty$. Luego $A^m/m!$ tiende a 0 cuando $m \to \infty$, con lo que la desigualdad (8.26) prueba que $h(x) = 0$ para todo x en $[-c, c]$. Pero, ya que c es arbitrario, se deduce que $h(x) = 0$ para todo x real. Esto completa la demostración.

Nota: El teorema 8.5 nos dice que dos soluciones de la ecuación diferencial $y'' + by = 0$ que tienen el mismo valor y la misma derivada en 0 deben coincidir para todo x. La elección del punto 0 no es esencial. El mismo razonamiento muestra que el teorema también es cierto si el punto 0 se reemplaza por un punto c cualquiera. En la demostración anterior, basta utilizar aproximaciones polinómicas de Taylor en c en lugar de hacerlo en 0.

8.12 Solución completa de la ecuación $y'' + by = 0$

El teorema de unicidad nos permite caracterizar todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + by = 0$.

TEOREMA 8.6. *Sean b un número real y dos funciones u_1 y u_2 en $(-\infty, +\infty)$ definidas como sigue:*

a) *Si $b = 0$, $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$.*

b) *Si $b < 0$, ponemos $b = -k^2$ y definimos $u_1(x) = e^{kx}$, $u_2(x) = e^{-kx}$.*

c) *Si $b > 0$, ponemos $b = k^2$ y definimos $u_1(x) = \cos kx$, $u_2(x) = \operatorname{sen} kx$.*

Entonces toda solución de la ecuación diferencial $y'' + by = 0$ en $(-\infty, +\infty)$ tiene la forma

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x), \tag{8.27}$$

siendo c_1 y c_2 constantes.

Demostración. En la Sección 8.9 demostramos que para cada par c_1 y c_2 la función y dada en (8.27) es una solución de la ecuación $y'' + by = 0$. Probamos

ahora que todas las soluciones tienen esta forma. El caso $b = 0$ fue establecido en la Sección 8.9, de modo que podemos suponer que $b \neq 0$.

La idea de la demostración es esta: Sea $y = f(x)$ una solución cualquiera de $y'' + by = 0$. Si podemos demostrar que existen constantes c_1 y c_2 que satisfacen el par de ecuaciones

$$c_1u_1(0) + c_2u_2(0) = f(0)\,, \qquad c_1u_1'(0) + c_2u_2'(0) = f'(0)\,, \tag{8.28}$$

entonces f y $c_1u_1 + c_2u_2$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + by = 0$ que tienen el mismo valor y la misma derivada en 0. Según el teorema de unicidad, resulta que $f = c_1u_1 + c_2u_2$.

En el caso b), tenemos $u_1(x) = e^{kx}$, $u_2(x) = e^{-kx}$, con lo que $u_1(0) = u_2(0) = 1$ y $u_1'(0) = k$, $u_2'(0) = -k$. Con ello las ecuaciones (8.28) se convierten en $c_1 + c_2 = f(0)$, y $c_1 - c_2 = f'(0)/k$. Tienen la solución $c_1 = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f'(0)/k$, $c_2 = \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f'(0)/k$.

En el caso c), tenemos $u_1(x) = \cos kx$, $u_2(x) = \operatorname{sen} kx$, y así es $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u_2'(0) = k$, y las soluciones son $c_1 = f(0)$, y $c_2 = f'(0)/k$. Puesto que siempre existen c_1 y c_2 que satisfacen (8.28), la demostración es completa.

8.13 Solución completa de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$

El teorema 8.4 nos dice que y satisface la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ si y sólo si u satisface $u'' + \frac{1}{4}(4b - a^2)u = 0$, siendo $y = e^{-ax/2}u$. Según el teorema 8.6 sabemos que la naturaleza de cada solución u depende del signo algebraico del coeficiente de u, esto es, del signo de $4b - a^2$ o de $a^2 - 4b$. Al número $a^2 - 4b$ le llamamos *discriminante* de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ y lo designamos por d. Cuando combinamos los resultados de los teoremas 8.4 y 8.6 obtenemos el siguiente.

TEOREMA 8.7. *Sea $d = a^2 - 4b$ el discriminante de la ecuación diferencial lineal $y'' + ay' + by = 0$. Toda solución de esta ecuación en $(-\infty, +\infty)$ tiene la forma*

$$y = e^{-ax/2}[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)]\,, \tag{8.29}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes, y las funciones u_1 y u_2 se determinan según el signo algebraico del discriminante del modo siguiente:

a) *Si $d = 0$, $u_1(x) = 1$ y $u_2(x) = x$.*
b) *Si $d > 0$, $u_1(x) = e^{kx}$ y $u_2(x) = e^{-kx}$, siendo $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$.*
c) *Si $d < 0$, $u_1(x) = \cos kx$, y, $u_2(x) = \operatorname{sen} kx$, siendo $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$.*

Nota: En el caso b), en el que el discriminante d es positivo, la solución y en (8.29) es una combinación lineal de dos funciones exponenciales,

$$y = e^{-ax/2}(c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x},$$

en donde

$$r_1 = -\frac{a}{2} + k = \frac{-a + \sqrt{d}}{2}, \qquad r_2 = -\frac{a}{2} - k = \frac{-a - \sqrt{d}}{2}.$$

Los dos números r_1 y r_2 tienen como suma $r_1 + r_2 = -a$ y como producto $r_1r_2 = \frac{1}{4}(a^2 - d) = b$. Por consiguiente, son las raíces de la ecuación cuadrática

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Esta es la denominada *ecuación característica* asociada a la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0.$$

El número $d = a^2 - 4b$ también se llama discriminante de esta ecuación cuadrática su signo algebraico determina la naturaleza de las raíces. Si $d \geq 0$, la ecuación cuadrática tiene raíces reales dadas por $(-a \pm \sqrt{d})/2$. Si $d < 0$, no tiene raíces reales pero debe tenerlas *complejas* r_1 y r_2. La definición de la función exponencial puede ampliarse de manera que e^{r_1x} y e^{r_2x} tengan significado cuando r_1 y r_2 son números complejos. Esta ampliación, expuesta en el capítulo 9, se hace de modo que la combinación lineal (8.29) pueda también escribirse como una combinación lineal de e^{r_1x} y e^{r_2x}, cuando r_1 y r_2 sean complejos.

Concluimos esta Sección haciendo varias observaciones. Puesto que todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ están contenidas en la fórmula (8.29), la combinación lineal del segundo miembro se llama a menudo la *solución general* de la ecuación diferencial. Una solución cualquiera obtenida particularizando los valores de las constantes c_1 y c_2 se denomina una *solución particular.*

Por ejemplo, tomando $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, y luego $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, obtenemos las dos soluciones particulares

$$v_1 = e^{-ax/2}u_1(x), \qquad v_2 = e^{-ax/2}u_2(x).$$

Estas dos soluciones son de especial importancia porque las combinaciones lineales construidas con ellas nos dan todas las soluciones. Un par de soluciones cualesquiera con esta propiedad es una *base* del conjunto de todas las soluciones.

Una ecuación diferencial tiene siempre más de una base. Por ejemplo, la ecuación $y'' = 9y$ tiene la base $v_1 = e^{3x}$, $v_2 = e^{-3x}$. Pero también tiene la base $w_1 = \cosh 3x$, $w_2 = \operatorname{senh} 3x$. En efecto, puesto que $e^{3x} = w_1 + w_2$ y

$e^{-3x} = w_1 - w_2$, toda combinación lineal de e^{3x} y e^{-3x} es también una combinación lineal de w_1 y w_2. Luego, el par w_1, w_2 es otra base.

Puede demostrarse que todo par de soluciones v_1 y v_2 de una ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ será una base si la razón v_2/v_1 no es constante. Si bien aquí no vamos a necesitar esta propiedad, la mencionamos porque tiene importancia en la teoría de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes no constantes. En el Ejercicio 23 de la Sección 8.14 se esboza una demostración.

8.14 Ejercicios

Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales en $(-\infty, +\infty)$.

1. $y'' - 4y = 0$.
2. $y'' + 4y = 0$.
3. $y'' - 4y' = 0$.
4. $y'' + 4y' = 0$.
5. $y'' - 2y' + 3y = 0$.
6. $y'' + 2y' - 3y = 0$.
7. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
8. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
9. $y'' + 2y' + y = 0$.
10. $y'' - 2y' + y = 0$.

En los Ejercicios 11 al 14, hallar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

11. $2y'' + 3y' = 0$, con $y = 1$ e $y' = 1$ cuando $x = 0$.
12. $y'' + 25y = 0$, con $y = -1$ e $y' = 0$ cuando $x = 3$.
13. $y'' - 4y' - y = 0$, con $y = 2$ e $y' = -1$ cuando $x = 1$.
14. $y'' + 4y' + 5y = 0$, con $y = 2$ e $y' = y''$ cuando $x = 0$.
15. La gráfica de una solución u de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 29y = 0$ corta la gráfica de una solución v de la ecuación $y'' + 4y' + 13y = 0$ en el origen. Las dos curvas tienen la misma pendiente en el origen. Determinar u y v si $u'(\frac{1}{2}\pi) = 1$.
16. La gráfica de una solución u de la ecuación diferencial $y'' - 3y' - 4y = 0$ corta la gráfica de una solución v de la ecuación $y'' + 4y' - 5y = 0$ en el origen. Determinar u y v si las dos curvas tienen pendientes iguales en el origen y si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{v(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}.$$

17. Hallar todos los valores de la constante k tales que la ecuación diferencial $y''+ky = 0$ tenga una solución no trivial $y = f_k(x)$ para la cual $f_k(0) = f_k(1) = 0$. Para cada valor admisible de k, determinar la correspondiente solución $y = f_k(x)$. Considérense los valores positivos y negativos de k.
18. Si (a, b) es un punto dado del plano y si m es un número real dado, demostrar que la ecuación diferencial $y'' + k^2y = 0$ tiene exactamente una solución cuya gráfica pasa por (a, b) y tiene en él la pendiente m. Discutir también el caso $k = 0$.
19. a) Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos en el plano tales que $a_1 - a_2 \neq n\pi$, siendo n entero. Demostrar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos dos puntos.
b) La proposición de la parte a), ¿es cierta siempre si $a_1 - a_2$ es un múltiplo de π?

c) Generalizar el resultado de la parte *a*) para la ecuación $y'' + k^2y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

20. En cada caso, hallar una ecuación diferencial lineal de segundo orden que se satisfaga para u_1 y u_2.

(a) $u_1(x) = e^x,\ u_2(x) = e^{-x}$.
(b) $u_1(x) = e^{2x},\ u_2(x) = xe^{2x}$.
(c) $u_1(x) = e^{-x/2}\cos x,\ u_2(x) = e^{-x/2}\operatorname{sen} x$.
(d) $u_1(x) = \operatorname{sen}(2x + 1),\ u_2(x) = \operatorname{sen}(2x + 2)$.
(e) $u_1(x) = \cosh x,\ u_2(x) = \operatorname{senh} x$.

Wronskiano. Dadas las funciones u_1 y u_2, la función W definida por $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$ es su *Wronskiano,* denominación usada en atención a J. M. H. Wronski (1778-1853) que fue quien la introdujo. Los Ejercicios que siguen se refieren a propiedades del Wronskiano.

21. a) Si el Wronskiano $W(x)$ de u_1 y u_2 es nulo para todo valor de x en un intervalo abierto I, demostrar que el cociente u_2/u_1 es constante en I. Dicho de otro modo, si u_2/u_1 no es constante en I, entonces $W(c) \neq 0$ por lo menos para un c de I.
b) Demostrar que la derivada del Wronskiano es $W' = u_1u_2'' - u_2u_1''$.

22. Sea W el Wronskiano de dos soluciones u_1, u_2 de la ecuación diferencial $y''+ay'+by=0$, siendo a y b constantes.
a) Demostrar que W satisface la ecuación de primer orden $W' + aW = 0$ y por tanto $W(x) = W(0)e^{-ax}$. Esta fórmula prueba que si $W(0) \neq 0$, entonces $W(x)\neq 0$ para todo x.
b) Suponiendo que u_1 no es idénticamente nula, demostrar que $W(0) = 0$ si y sólo si u_2/u_1 es constante.

23. Sean v_1 y v_2 dos soluciones cualesquiera de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ tales que v_2/v_1 no es constante.
a) Sea $y = f(x)$ una solución de la ecuación diferencial. Utilizar propiedades del Wronskiano para demostrar que existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1v_1(0) + c_2v_2(0) = f(0), \qquad c_1v_1'(0) + c_2v_2'(0) = f'(0).$$

b) Demostrar que toda solución es de la forma $y = c_1v_1 + c_2v_2$. Dicho de otro modo, forman una base para el conjunto de todas las soluciones.

8.15 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Volvamos a discutir las ecuaciones no homogéneas de la forma

$$y'' + ay' + by = R, \tag{8.30}$$

en las que los coeficientes a y b son constantes y el segundo miembro R es una función cualquiera continua en $(-\infty, +\infty)$. La discusión puede simplificarse mediante el uso de un operador. Para cualquier función f con derivadas f' y f'',

podemos definir un operador L que transforma f en otra función $L(f)$ definida por la ecuación

$$L(f) = f'' + af' + bf .$$

Mediante este operador, la ecuación diferencial (8.30) se escribe en la forma sencilla

$$L(y) = R .$$

Es fácil comprobar que $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$, y que $L(cy) = cL(y)$ para cualquier constante c. Por consiguiente, para cualquier par de constantes c_1 y c_2, tenemos

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) .$$

Esta es la llamada *propiedad de linealidad* del operador L.

Supongamos ahora que y_1 e y_2 son dos soluciones cualesquiera de la ecuación $L(y) = R$. Puesto que $L(y_1) = L(y_2) = R$, la linealidad nos da

$$L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) = R - R = 0 ,$$

por lo que $y_2 - y_1$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Por lo tanto, será $y_2 - y_1 = c_1v_1 + c_2v_2$, en donde $c_1v_1 + c_2v_2$ es la solución general de la ecuación homogénea, o sea

$$y_2 = c_1v_1 + c_2v_2 + y_1 .$$

Esta ecuación debe satisfacerse para *todo* par de soluciones y_1 e y_2 de la ecuación no homogénea $L(y) = R$. Por consiguiente, si podemos determinar una *solución particular* y_1 de la ecuación no homogénea, *todas* las soluciones están contenidas en la fórmula

$$y = c_1v_1 + c_2v_2 + y_1 , \tag{8.31}$$

siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Cada una de tales y es evidentemente una solución de $L(y) = R$ porque $L(c_1v_1 + c_2v_2 + y_1) = L(c_1v_1 + c_2v_2) + L(y_1) = 0 + R = R$. Ya que todas las soluciones de $L(y) = R$ se encuentran en (8.31), la expresión $c_1v_1 + c_2v_2 + y_1$ se llama *solución general* de (8.30). Así que, hemos demostrado el teorema que sigue.

TEOREMA 8.8. *Si y_1 es una solución particular de la ecuación no homogénea $L(y) = R$, la solución general se obtiene sumando a y_1 la solución general de la correspondiente ecuación homogénea $L(y) = 0$.*

El teorema 8.7 nos dice cómo se encuentra la solución general de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Esa tiene la forma $y = c_1v_1 + c_2v_2$, en donde

$$v_1(x) = e^{-ax/2}u_1(x)\,, \qquad v_2(x) = e^{-ax/2}u_2(x)\,, \tag{8.32}$$

determinándose las funciones u_1 y u_2 por medio del discriminante de la ecuación, como se explicó en el teorema 8.7. Ahora demostramos que v_1 y v_2 pueden usarse para construir una solución particular y_1 de la ecuación no homogénea $L(y) = R$.

En la construcción interviene una función W definida por la igualdad

$$W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)\,.$$

Ésta se llama el *wronskiano* de v_1 y v_2; algunas de sus propiedades se expusieron en los Ejercicios 21 y 22 de la Sección 8.14. Necesitaremos la propiedad de que $W(x)$ nunca es cero. Ésta puede demostrarse mediante los métodos indicados en los Ejercicios o puede comprobarse directamente y en particular para las funciones v_1 y v_2 dadas en (8.32).

TEOREMA 8.9. *Sean v_1 y v_2 las soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ dadas en (8.32), siendo $L(y) = y'' + ay' + by$. Sea W el wronskiano de v_1 y v_2. Entonces la ecuación no homogénea $L(y) = R$ tiene una solución particular y_1 dada por la fórmula*

$$y_1(x) = t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x)\,,$$

siendo

$$t_1(x) = -\int v_2(x)\,\frac{R(x)}{W(x)}\,dx\,, \qquad t_2(x) = \int v_1(x)\,\frac{R(x)}{W(x)}\,dx\,. \tag{8.33}$$

Demostración. Intentemos hallar funciones t_1 y t_2 tales que la combinación $y_1 = t_1v_1 + t_2v_2$ satisfaga la ecuación $L(y_1) = R$. Tenemos

$$y' = t_1v_1' + t_2v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)\,,$$

$$y_1'' = t_1v_1'' + t_2v_2'' + (t_1'v_1' + t_2'v_2') + (t_1'v_1 + t_2'v_2)'\,.$$

Cuando formamos la combinación lineal $L(y_1) = y_1'' + ay_1' + by_1$, los términos que contienen t_1 y t_2 desaparecen debido a que $L(v_1) = L(v_2) = 0$. Los términos restantes nos dan la relación

$$L(y_1) = (t_1'v_1' + t_2'v_2') + (t_1'v_1 + t_2'v_2)' + a(t_1'v_1 + t_2'v_2)\,.$$

Queremos elegir t_1 y t_2 de modo que $L(y_1) = R$. Esto podemos conseguirlo si elegimos t_1 y t_2 de modo que

$$t_1'v_1 + t_2'v_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad t_1'v_1' + t_2'v_2' = R\,.$$

Se trata de un par de ecuaciones algebraicas con las incógnitas t_1' y t_2'. El determinante del sistema es el Wronskiano de v_1 y v_2. Puesto que éste nunca es cero, el sistema tiene una solución dada por

$$t_1' = -v_2R/W \qquad \text{y} \qquad t_2' = v_1R/W\,.$$

Integrando esas relaciones, obtenemos las fórmulas (8.33), completando así la demostración.

El método por el que hemos obtenido la solución y_1 se llama a veces de *variación de constantes.* Fue utilizado primero por Johann Bernoulli en 1697 para resolver ecuaciones lineales de primer orden, y luego por Lagrange en 1774 para ecuaciones lineales de segundo orden.

Nota: Puesto que las funciones t_1 y t_2 del teorema 8.9 se expresan como integrales indefinidas, cada una de ellas está determinada salvo una constante aditiva. Si sumamos una constante c_1 a t_1 y una constante c_2 a t_2 cambiamos la función y_1 en una nueva función $y_2 = y_1 + c_1v_1 + c_2v_2$. En virtud de la linealidad. tenemos

$$L(y_2) = L(y_1) + L(c_1v_2 + c_2v_2) = L(y_1)\,,$$

lo cual nos dice que la nueva función y_2 también es una solución particular de la ecuación no homogénea.

EJEMPLO 1. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + y = \operatorname{tg} x$ en $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

Solución. Las funciones v_1 y v_2 de las igualdades (8.32) vienen dadas por

$$v_1(x) = \cos x\,, \qquad v_2(x) = \operatorname{sen} x\,.$$

Su Wronskiano es $W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Por tanto, de (8.33) obtenemos

$$t_1(x) = -\int \operatorname{sen} x \tan x \, dx = \operatorname{sen} x - \log|\sec x + \tan x|\,,$$

y

$$t_2(x) = \int \cos x \tan x \, dx = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x\,.$$

Así que, una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_1 = t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x) = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x \log|\sec x + \tan x| - \operatorname{sen} x \cos x =$$
$$= -\cos x \log|\sec x + \tan x|\,.$$

Según el teorema 8.8, su solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \log|\sec x + \tan x|\,.$$

Aunque el teorema 8.9 proporciona un método general para determinar una solución particular de $L(y) = R$, hay métodos especiales que con frecuencia son de aplicación más fácil cuando la función R tiene ciertas formas particulares. En la Seccion siguiente exponemos un método adecuado si R es un polinomio o el producto de un polinomio por una exponencial.

8.16 Métodos particulares para la determinación de una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + ay' + by = R$

CASO 1. El segundo miembro R es un polinomio de grado n. Si $b \neq 0$, siempre podemos encontrar un polinomio de grado n que satisface la ecuación. Ensayemos un polinomio de la forma

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

con coeficientes indeterminados. Sustituyendo en la ecuación diferencial $L(y) = R$ e igualando los coeficientes de las potencias semejantes de x, podemos determinar $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ en forma sucesiva. A continuación aplicamos el método a un ejemplo.

EJEMPLO 1. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + y = x^3$.

Solución. La solución general de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ viene dada por $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. A ella tenemos que sumar una solución particular de la ecuación no homogénea. Puesto que el segundo miembro es un polinomio cúbico y que el coeficiente de y no es nulo, intentamos encontrar una solución particular de la forma $y_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Derivando dos veces, encontramos que $y''(x) = 6Ax + 2B$. La ecuación diferencial conduce a la relación

$$(6Ax + 2B) + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3\,.$$

Identificando coeficientes de las potencias análogas de x, obtenemos $A = 1, B = 0, C = -6$, y $D = 0$, de modo que una solución particular es $y_1(x) = x^3 - 6x$. Así que, la solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x^3 - 6x .$$

Puede ser interesante la comparación de este método con el de variación de constantes. Las igualdades (8.33) nos dan

$$t_1(x) = -\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -(3x^3 - 6) \operatorname{sen} x + (x^3 - 6x) \cos x$$

y

$$t_2(x) = \int x^3 \cos x \, dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \operatorname{sen} x .$$

Cuando formamos la combinación $t_1 v_1 + t_2 v_2$, encontramos la solución particular $y_1(x) = x^3 - 6x$, como antes. En este caso, el uso del método de variación de constantes exige el cálculo de las integrales $\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx$ e $\int x^3 \cos x \, dx$. Con el método de los coeficientes indeterminados, no se precisa la integración.

Si el coeficiente b es cero, la ecuación $y'' + ay' = R$ no puede satisfacerse con un polinomio de grado n, pero sí con uno de grado $n + 1$ si $a \neq 0$. Si son nulos a y b, la ecuación es $y'' = R$; su solución general es un polinomio de grado $n + 2$ obtenido con dos integraciones sucesivas.

CASO 2. El segundo miembro tiene la forma $R(x) = p(x)e^{mx}$, *siendo* p *un polinomio de grado* n, *y* m *una constante.*

En este caso el cambio de variable $y = u(x)e^{mx}$ transforma la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = R$ en una nueva ecuación

$$u'' + (2m + a)u' + (m^2 + am + b)u = p .$$

Esta es del tipo discutido en el caso 1, de modo que siempre tiene un polinomio solución u_1. Luego, la ecuación original tiene una solución particular de la forma $y_1 = u_1(x)e^{mx}$, donde u_1 es un polinomio. Si $m^2 + am + b \neq 0$, el grado de u_1 es el mismo que el grado de p. Si $m^2 + am + b = 0$ pero $2m + a \neq 0$, el grado de u_1 es una unidad mayor que el de p. Si $m^2 + am + b = 0$ y $2m + a = 0$, el grado de u_1 es de dos unidades mayor que el de p.

EJEMPLO 2. Hallar una solución particular de la ecuación $y'' + y = xe^{3x}$.

Solución. El cambio de variable $y = ue^{3x}$ nos conduce a la nueva ecuación $u'' + 6u' + 10u = x$. Ensayando $u_1(x) = Ax + B$, encontramos la solución particular $u_1(x) = (5x - 3)/50$, con lo que una solución particular de la ecuación original es $y_1 = e^{3x}(5x - 3)/50$.

El método de los coeficientes indeterminados también puede usarse si R tiene la forma $R(x) = p(x)e^{mx} \cos \alpha x$, o $R(x) = p(x)e^{mx} \operatorname{sen} \alpha x$, siendo p un polinomio y m y α constantes. En ambos casos, existe siempre una solución particular de la forma $y_1(x) = e^{mx}[q(x) \cos \alpha x + r(x) \operatorname{sen} \alpha x]$, en donde q y r son polinomios.

8.17 Ejercicios

Hallar la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales de los Ejercicios 1 al 17. Si la solución no es válida en todo el eje vertical, dar un intervalo en el que sea válida.

1. $y'' - y = x$.
2. $y'' - y' = x^2$.
3. $y'' + y' = x^2 + 2x$.
4. $y'' - 2y' + 3y = x^3$.
5. $y'' - 5y' + 4y = x^2 - 2x + 1$.
6. $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$.
7. $y'' - 4y = e^{2x}$.
8. $y'' + 4y = e^{-2x}$.
9. $y'' + y' - 2y = e^x$.
10. $y'' + y' - 2y = e^{2x}$.
11. $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$.
12. $y'' - 2y' + y = x + 2x\,e^x$.
13. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x^2$.
14. $y'' + y = \cot^2 x$.
15. $y'' - y = 2/(1 + e^x)$.
16. $y'' + y' - 2y = e^x/(1 + e^x)$.
17. $y'' + 6y' + 9y = f(x)$, donde $f(x) = 1$ para $1 \leq x \leq 2$, y $f(x) = 0$ para todos los demás x.
18. Si k es una constante no nula, demostrar que la ecuación $y'' - k^2y = R(x)$ tiene una solución particular y_1 dada por

$$y_1 = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \operatorname{senh} k(x - t)\, dt\,.$$

Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 9y = e^{3x}$.

19. Si k es una constante no nula, demostrar que la ecuación $y'' + k^2y = R(x)$ tiene una solución particular y_1 dada por

$$y_1 = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \operatorname{sen} k(x - t)\, dt\,.$$

Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x$.

En cada uno de los Ejercicios 20 al 25, determinar la solución general.

20. $y'' + y = \operatorname{sen} x$.
21. $y'' + y = \cos x$.
22. $y'' + 4y = 3x \cos x$.
23. $y'' + 4y = 3x \operatorname{sen} x$.
24. $y'' - 3y' = 2e^{2x} \operatorname{sen} x$.
25. $y'' + y = e^{2x} \cos 3x$.

8.18 Ejemplos de problemas físicos que conducen a ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

EJEMPLO 1. *Movimiento armónico simple.* Supongamos que una partícula está obligada a moverse en una recta con su aceleración dirigida hacia un punto

fijo de la recta y proporcional a la distancia a ese punto fijo. Si tomamos el origen en el punto fijo y es y la distancia en el instante x, entonces la aceleración y'' debe ser negativa cuando y es positiva, y positiva cuando y es negativa. Por consiguiente podemos escribir $y'' = -k^2y$, o

$$y'' + k^2y = 0,$$

siendo k^2 una constante positiva. Esta es la ecuación diferencial del *movimiento armónico simple*. Se emplea a menudo como modelo matemático para el movimiento de un punto en un mecanismo vibrante tal como una cuerda tensa o un diapasón vibrante. La misma ecuación se presenta en la teoría de circuitos eléctricos en donde se llama ecuación del oscilador armónico.

El teorema 8.6 nos dice que todas las soluciones tienen la forma

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx, \tag{8.34}$$

en donde A y B son constantes arbitrarias. Podemos expresar las soluciones en función del seno o del coseno tan sólo. Por ejemplo, podemos introducir nuevas constantes C y α, en donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \arctan \frac{B}{A},$$

entonces tenemos (ver figura 8.4) $A = C \cos \alpha$, $B = C \operatorname{sen} \alpha$, y la ecuación (8.34) se convierte en

$$y = C \cos \alpha \operatorname{sen} kx + C \operatorname{sen} \alpha \cos kx = C \operatorname{sen} (kx + \alpha).$$

Cuando la solución se escribe en esta forma, las constantes C y α tienen una sencilla interpretación geométrica (ver figura 8.5). Los valores extremos de y, que se presentan cuando $\operatorname{sen}(kx + \alpha) = \pm 1$, son $\pm C$. Cuando $x = 0$, el desplazamiento inicial es $C \operatorname{sen} \alpha$. Cuando x crece, la partícula oscila entre los valores extremos $+C$ y $-C$ con período $2\pi/k$. El ángulo $kx + \alpha$ se llama el *ángulo de fase* y el mismo x es el valor inicial del ángulo de fase.

EJEMPLO 2. *Vibraciones amortiguadas.* Si una partícula sujeta a un movimiento armónico simple súbitamente es sometida a una fuerza externa proporcional a su velocidad, el nuevo movimiento satisface una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + 2cy' + k^2y = 0,$$

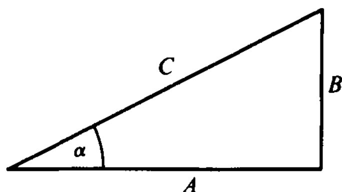


FIGURA 8.4

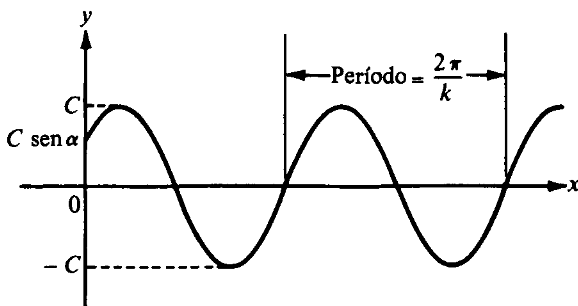


FIGURA 8.5 *Movimiento armónico simple.*

en donde c y k^2 son constantes, $c \neq 0$, $k > 0$. Si $c > 0$, veremos que todas las soluciones tienden a cero cuando $x \to +\infty$. En este caso, se dice que la ecuación diferencial es *estable.* La fuerza externa origina una *amortiguación* del movimiento. Si $c < 0$, veremos que algunas soluciones tienen valores tan grandes como se quiera cuando $x \to +\infty$. En este caso, se dice que la ecuación es *inestable.*

Puesto que el discriminante de la ecuación es $d = (2c)^2 - 4k^2 = 4(c^2 - k^2)$, la naturaleza de las soluciones está determinada por las magnitudes relativas de c^2 y k^2. Los tres casos $d = 0$, $d > 0$, y $d < 0$ pueden ser analizados como sigue:

a) *Discriminante cero:* $c^2 = k^2$. En este caso, todas las soluciones tienen la forma

$$y = e^{-cx}(A + Bx).$$

Si $c > 0$, todas las soluciones tienden a 0 cuando $x \to +\infty$. Este caso se cita como *amortiguamiento crítico.* Si $B \neq 0$, cada solución cambiará de signo exactamente una vez debido al factor lineal $A + Bx$. En la figura 8.6(a) se representa un ejemplo. Si $c < 0$, cada solución no trivial tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ cuando $x \to +\infty$.

b) *Discriminante positivo:* $c^2 > k^2$. Según el teorema 8.7 todas las soluciones tienen la forma

$$y = e^{-cx}(Ae^{hx} + Be^{-hx}) = Ae^{(h-c)x} + Be^{-(h+c)x},$$

en donde $h = \frac{1}{2}\sqrt{d} = \sqrt{c^2 - k^2}$. Puesto que $h^2 = c^2 - k^2$, tenemos $h^2 - c^2 < 0$ con lo que $(h - c)(h + c) < 0$. Por consiguiente, los números $h - c$ y $h + c$ tienen signos opuestos. Si $c > 0$, entonces $h + c$ es positivo con lo que $h - c$ es negativo, y por tanto ambas exponenciales $e^{(h-c)x}$ y $e^{-(h+c)x}$ tienden a cero cuando $x \to +\infty$. En este caso, citado como *amortiguamiento exponencial,* todas las solu-

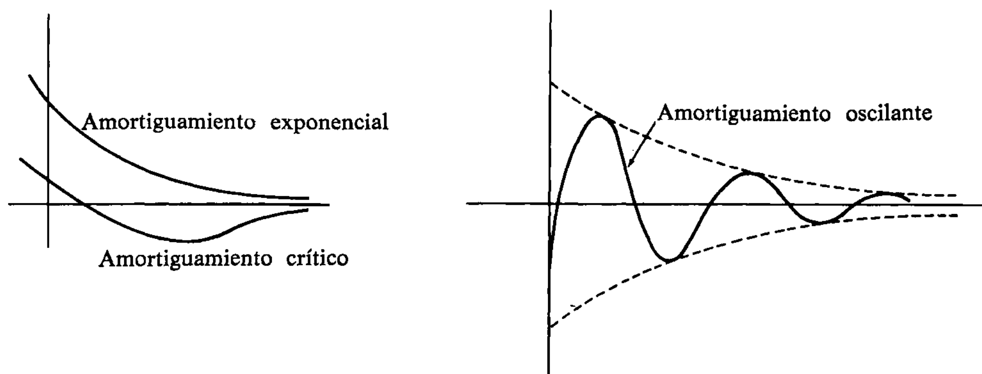
ciones tienden a 0 para $x \to +\infty$. En la figura 8.6(a) se representa un ejemplo. Cada solución puede cambiar de signo por lo menos una vez.

Si $c < 0$, entonces $h - c$ es positivo pero $h + c$ es negativo. Así que, ambas exponenciales $e^{(h-c)x}$ y $e^{-(h+c)x}$ tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, con lo que nuevamente existen soluciones con valores absolutos tan grandes como se quiera.

c) *Discriminante negativo:* $c^2 < k^2$. En este caso, todas las soluciones tienen la forma

$$y = Ce^{-cx}\,\text{sen}(hx + \alpha)\,,$$

en donde $h = \frac{1}{2}\sqrt{-d} = \sqrt{k^2 - c^2}$. Si $c > 0$, toda solución no trivial oscila, pero la amplitud de la oscilación tiende hacia cero cuando $x \to +\infty$. Este caso se llama *amortiguamiento oscilante* y se representa en la figura 8.6(b). Si $c < 0$, todas las soluciones no triviales toman valores positivos y negativos tan grandes como se quiera cuando $x \to +\infty$.



a) Discriminante 0 o positivo b) Discriminante negativo

FIGURA 8.6 *Vibraciones amortiguadas que se presentan como soluciones de* $y'' + 2cy' + k^2y = 0$, *con* $c > 0$, *y discriminante* $4(c^2 - k^2)$.

EJEMPLO 3. *Circuitos eléctricos.* Si intercalamos una capacidad (por ejemplo, un condensador) en el circuito eléctrico del ejemplo 5 de la Sección 8.6, la ecuación diferencial que sirve de modelo para este circuito viene dada por

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = V(t)\,,$$

siendo C una constante positiva llamada *capacidad*. La derivación de esta ecuación da una ecuación lineal de segundo orden de la forma

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = V'(t)\,.$$

Si el voltaje aplicado $V(t)$ es constante, el segundo miembro es cero y la ecuación toma la forma

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0\,.$$

Este es el mismo tipo de ecuación analizado en el ejemplo 2, salvo que $2c$ está reemplazado por R/L, y k^2 por $1/(LC)$. En este caso, el coeficiente c es positivo y la ecuación es siempre estable. Dicho de otro modo, la intensidad $I(t)$ siempre tiende a 0 cuando $t \to +\infty$. La terminología del ejemplo 2 también se utiliza aquí. Se dice que la corriente es amortiguada críticamente cuando el discriminante es cero ($CR^2 = 4L$), exponencialmente cuando el discriminante es positivo ($CR^2 > 4L$), y oscilante cuando el discriminante es negativo ($CR^2 < 4L$).

EJEMPLO 4. *Movimiento de un cohete con masa variable.* Un cohete es impulsado mediante la ignición del carburante en una cámara de combustión, al permitir la expulsión hacia atrás de los productos de la combustión. Supongamos que el cohete parte del reposo y se mueve verticalmente hacia arriba a lo largo de una recta. Designemos la altura del cohete en el instante t por $r(t)$, la masa del cohete (incluido el carburante) por $m(t)$, y la velocidad de la materia expulsada, con relación al cohete, por $c(t)$. En ausencia de fuerzas externas, la ecuación

$$m(t)r''(t) = m'(t)c(t) \tag{8.35}$$

se utiliza como modelo matemático para discutir el movimiento. El primer miembro, $m(t)r''(t)$, es el producto de la masa del cohete por su aceleración. El segundo miembro, $m'(t)c(t)$, es la fuerza de aceleración en el cohete motivada por el empuje desarrollado por el mecanismo de impulsión. En los ejemplos que aquí se consideran, $m(t)$ y $c(t)$ son conocidos o pueden expresarse en función de $r(t)$ o su derivada $r'(t)$ (la velocidad del cohete). La ecuación (8.35) se convierte en una ecuación diferencial de segundo orden respecto a la función posición r.

Si están también presentes fuerzas externas, tales como la gravedad, entonces en lugar de (8.35), usamos la ecuación

$$m(t)r''(t) = m'(t)c(t) + F(t)\,, \tag{8.36}$$

en donde $F(t)$ representa la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cohete en el instante t.

Antes de considerar ejemplos particulares, haremos un razonamiento que puede servir para justificar la ecuación (8.35). A tal fin consideramos primero un cohete que quema su carburante con intermitencias, en forma parecida a las balas de un arma de fuego. En particular, consideramos un intervalo de tiempo $[t, t + h]$, en donde h es un número positivo pequeño; supongamos que una cierta cantidad de materia de propulsión es expelida en el tiempo t, y que no es expulsada cantidad alguna en el intervalo semiabierto $(t, t + h]$. Con estos supuestos, obtenemos una fórmula cuyo límite, cuando $h \to 0$, es la ecuación (8.35).

Inmediatamente antes de la expulsión de materia en el instante t, el cohete tiene una masa $m(t)$ y una velocidad $v(t)$. Al final del intervalo $[t, t + h]$, el cohete tiene masa $m(t + h)$ y velocidad $v(t + h)$. La masa de la materia expulsada es $m(t) - m(t + h)$, y su velocidad durante el intervalo es $v(t) + c(t)$, puesto que $c(t)$ es la velocidad de expulsión con relación al cohete. Justamente antes de la expulsión de materia propulsora en el instante t, el cohete es un sistema con momento $m(t)v(t)$. En el instante $t + h$, este sistema consta de dos partes, un cohete con momento $m(t + h)v(t + h)$ y la materia expulsada con momento $[m(t) - m(t + h)][v(t) + c(t)]$. La ley de conservación de momentos establece que el momento del nuevo sistema debe ser igual al del antiguo. Por consiguiente, tenemos

$$m(t)v(t) = m(t + h)v(t + h) + [m(t) - m(t + h)][v(t) + c(t)]\,,$$

de la que obtenemos

$$m(t + h)[v(t + h) - v(t)] = [m(t + h) - m(t)]c(t)\,.$$

Dividiendo por h y haciendo que $h \to 0$, encontramos que

$$m(t)v'(t) = m'(t)c(t)\,,$$

que es equivalente a la ecuación (8.35).

Consideremos un caso particular en el que el cohete parte del reposo con un peso inicial de w kilos (incluyendo b kilos de carburante) y que se mueve verticalmente hacia arriba siguiendo una recta. Supongamos que el carburante se consume en forma constante a razón de k kilos por segundo y que los productos de la combustión son descargados directamente hacia atrás con una velocidad constante de c metros por segundo con relación al cohete. Supongamos que la única fuerza externa que actúa sobre el cohete es la atracción terrestre. Queremos saber a qué altura llegará el cohete antes de que todo su carburante se consuma.

Puesto que todo el combustible se consume cuando $kt = b$, restringimos t al intervalo $0 \leq t \leq b/k$. La única fuerza externa que actúa sobre el cohete es $-m(t)g$, la velocidad $c(t) = -c$, con lo que la ecuación (8.36) se transforma en

$$m(t)r''(t) = -m'(t)c - m(t)g\,.$$

El peso del cohete en el instante t es $w - kt$, y su masa $m(t)$ es $(w - kt)/g$; luego tenemos $m'(t) = -k/g$ y la ecuación anterior toma la forma

$$r''(t) = -\frac{m'(t)}{m(t)}c - g = \frac{kc}{w - kt} - g\,.$$

Integrando, y utilizando la condición inicial $r'(0) = 0$, encontramos

$$r'(t) = -c \log \frac{w - kt}{w} - gt\,.$$

Integrando nuevamente y empleando la condición inicial $r(0) = 0$, obtenemos la relación

$$r(t) = \frac{c(w - kt)}{k} \log \frac{w - kt}{w} - \frac{1}{2} gt^2 + ct\,.$$

Todo el combustible se ha consumido cuando $t = b/k$. En este instante la altura es

$$(8.37) \qquad r\left(\frac{b}{k}\right) = \frac{c(w - b)}{k} \log \frac{w - b}{w} - \frac{1}{2}\frac{gb^2}{k^2} + \frac{cb}{k}\,.$$

Esta fórmula es válida si $b < w$. Para ciertos cohetes, el peso del cohete vacío de carburante es pequeño respecto al peso de dicho carburante, y es interesante considerar el caso límite $b = w$. No podemos poner $b = w$ en (8.37) por la presencia del término $\log (w - b)/w$. No obstante, si hacemos que $b \to w$, el primer término de (8.37) es una forma indeterminada con límite 0. Por consiguiente, cuando $b \to w$, el valor límite del segundo miembro de (8.37) es

$$\lim_{b \to w} r\left(\frac{b}{k}\right) = -\frac{1}{2}\frac{gw^2}{k^2} + \frac{cw}{k} = -\frac{1}{2} gT^2 + cT,$$

en donde $T = w/k$ es el tiempo necesario para que todo el peso w se consuma.

8.19 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 5, se supone que una partícula se mueve con movimiento armónico simple, de acuerdo con la ecuación $y = C \operatorname{sen}(kx + \alpha)$. La *velocidad* de la partícu-

la se define como la derivada y'. *La frecuencia* del movimiento es el recíproco del período. (Período $= 2\pi/k$; frecuencia $= k/2\pi$.) La frecuencia representa el número de ciclos efectuados en la unidad de tiempo, con tal que $k > 0$.

1. Hallar la amplitud C si la frecuencia es $1/\pi$ y los valores iniciales de y e y' (cuando $x = 0$) son 2 y 4, respectivamente.
2. Hallar la velocidad cuando y es cero, sabiendo que la amplitud es 7 y la frecuencia 10.
3. Demostrar que la ecuación del movimiento puede también escribirse del modo siguiente:

$$y = A\cos(mx + \beta)\,.$$

Hallar ecuaciones que relacionen las constantes A, m, β, y C, k, α.
4. Hallar la ecuación del movimiento sabiendo que $y = 3$ e $y' = 0$ y que el período es $\frac{1}{2}$.
5. Hallar la amplitud del movimiento si el período es 2π y la velocidad es $\pm v_0$ cuando $y = y_0$.
6. Una partícula está sometida a un movimiento armónico simple. Inicialmente su desplazamiento es 1, su velocidad 2 y su aceleración -12. Calcular su desplazamiento y su aceleración cuando la velocidad es $\sqrt{8}$.
7. Para un cierto número positivo k, la ecuación diferencial del movimiento armónico simple $y'' + k^2y = 0$ tiene soluciones de la forma $y = f(x)$ con $f(0) = f(3) = 0$ y $f(x) < 0$ para todo x en el intervalo abierto $0 < x < 3$. Calcular k y hallar todas las soluciones.
8. La intensidad $I(t)$ de la corriente que circula en el instante t en un circuito eléctrico obedece a la ecuación diferencial $I''(t) + I(t) = G(t)$, en donde $G(t)$ es una función escalonada dada por $G(t) = 1$ si $0 \le t \le 2\pi$, $G(t) = 0$ para todos los demás valores de t. Determinar la solución que satisface las condiciones iniciales $I(0) = 0$, $I'(0) = 1$.
9. La intensidad $I(t)$ de la corriente que circula en el instante t en un circuito eléctrico obedece a la ecuación diferencial

$$I''(t) + RI'(t) + I(t) = \operatorname{sen}\omega t\,,$$

siendo R y ω constantes positivas. La solución puede expresarse en la forma $I(t) = F(t) + A\operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, donde $F(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, y A y α son constantes que dependen de R y ω, con $A > 0$. Si existe un valor de ω que haga A tan grande como sea posible, entonces $\omega/(2\pi)$ se llama *frecuencia de resonancia* del circuito.
a) Hallar todas las frecuencias de resonancia cuando $R = 1$.
b) Hallar aquellos valores de R para los cuales el circuito tendrá una frecuencia de resonancia.
10. Una nave espacial regresa a la Tierra. Supongamos que la única fuerza externa que actúa sobre ella es la gravedad, y que cae siguiendo una recta dirigida hacia el centro de la Tierra. El efecto de la gravedad es parcialmente contrarrestado encendiendo un cohete que actúa como freno. El combustible de este cohete es consumido en forma constante a razón de k kilos por segundo y el material expulsado tiene una velocidad constante de c metros por segundo con relación al cohete. Encontrar una fórmula para la distancia recorrida por la nave espacial en su caída en el instante t si parte del reposo en $t = 0$ con un peso inicial de k kilos.
11. Un cohete de w kilos de peso inicial parte del reposo en el espacio libre (sin fuerzas externas) y se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea. El carburante se consume a la razón constante de k kilos por segundo y los productos de la combustión son descargados hacia atrás a la velocidad constante de c metros por segundo con relación al cohete. Hallar la distancia recorrida en el instante t.
12. Resolver el Ejercicio 11 si la velocidad inicial del cohete es v_0 y los productos de la combustión son quemados con velocidad tal que la materia expulsada quede en reposo en el espacio.

8.20 Observaciones relativas a las ecuaciones diferenciales no lineales

Puesto que las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes se presentan en tan amplia variedad de problemas científicos, es realmente ventajoso que dispongamos de métodos sistemáticos para resolverlas. Muchas ecuaciones no lineales surgen espontáneamente en problemas físicos y geométricos, pero no existe una teoría completa comparable a la de las ecuaciones lineales. En la introducción de este capítulo mencionamos una «bolsa de trucos» que ha sido desarrollada para tratar muchos casos particulares de ecuaciones no lineales. Terminamos este capítulo con la discusión de algunos de esos «trucos» y algunos de los problemas que resolvemos con su ayuda. Sólo consideraremos ecuaciones de primer orden en las que puede despejarse la derivada y' y se pueden expresar en la forma

$$y' = f(x, y)\,. \tag{8.38}$$

Recordemos que una solución de (8.38) en un intervalo I es cualquier función, $y = Y(x)$, derivable en I y que satisface la relación $Y'(x) = f[x, Y(x)]$ para todo x de I. En el caso lineal, demostramos un teorema de existencia y unicidad que nos dice que existe una y sólo una solución que satisface una condición inicial asignada. Además, disponemos de una fórmula para determinar esa solución.

Esto no sucede en el caso general. Una ecuación no lineal puede *no* tener solución que satisfaga una condición inicial dada, o puede tener *más de una.* Por ejemplo, la ecuación $(y')^2 - xy' + y + 1 = 0$ no tiene solución con $y = 0$ cuando $x = 0$, ya que esto exigiría que $(y')^2 = -1$ cuando $x = 0$. Por otra parte, la ecuación $y' = 3y^{2/3}$ tiene dos soluciones distintas, $Y_1(x) = 0$ e $Y_2(x) = x^3$, que satisfacen la condición inicial $y = 0$ cuando $x = 0$.

Así pues, el estudio de las ecuaciones no lineales ofrece más dificultades a causa de la no existencia o no unicidad de las soluciones. También, incluso cuando existen soluciones, puede que no sea posible determinarlas explícitamente en función de funciones sencillas. A veces podemos eliminar la derivada y' de la ecuación diferencial y llegar a una relación de la forma

$$F(x, y) = 0$$

que se satisface para algunas, o quizás todas, las soluciones. Si esta ecuación puede resolverse respecto a y en función de x, llegamos a una fórmula explícita para la solución. Con mayor frecuencia, no obstante, la ecuación es demasiado complicada para despejar en ella y. Por ejemplo, en una Sección posterior estudiaremos la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y - x}{y + x}\,,$$

y encontraremos que toda solución satisface necesariamente la relación

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}+C=0 \tag{8.39}$$

para una cierta constante C. Sería inútil intentar despejar en esta ecuación la y en función de x. En un caso parecido a éste, decimos que la relación (8.39) es una *fórmula implícita* para las soluciones. Comúnmente se dice que la ecuación diferencial ha sido «resuelta» o «integrada» cuando se llega a una fórmula implícita del tipo $F(x, y) = 0$ en la que no aparecen derivadas de la función incógnita. A veces esa fórmula revela información útil acerca de las soluciones. Por otra parte, el lector comprobará que tal relación implícita puede ser menos útil que la misma ecuación diferencial para estudiar propiedades de las soluciones.

En la siguiente Sección mostramos cómo puede obtenerse, con frecuencia, información cualitativa acerca de las soluciones directamente a partir de la ecuación diferencial sin un conocimiento de fórmulas explícitas o implícitas de las soluciones.

8.21 Curvas integrales y campos direccionales

Consideremos una ecuación diferencial de primer orden, tal como $y' = f(x, y)$, y supongamos que alguna de las soluciones satisfacen una relación implícita de la forma

$$F(x, y, C) = 0\,, \tag{8.40}$$

siendo C una constante. Si introducimos un sistema de coordenadas rectangular y señalamos todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen (8.40) para un cierto valor de C, obtenemos una curva llamada *curva integral* de la ecuación diferencial. Ordinariamente valores distintos de C dan curvas integrales distintas, pero todas ellas tienen una propiedad geométrica común. La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ liga la pendiente y' en cada punto (x, y) de la curva a las coordenadas x e y. Al tomar C todos los valores, la colección de curvas integrales obtenida se llama familia de curvas que depende de *un solo parámetro.*

Por ejemplo, cuando la ecuación diferencial es $y' = 3$, la integración nos da $y = 3x + C$, y las curvas integrales forman una familia de rectas, todas con pendiente igual a 3. La constante C representa el segmento que cada una de esas rectas intercepta sobre el eje y.

Si la ecuación diferencial es $y'=x$, la integración produce $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, y las curvas integrales forman una familia de parábolas como se ve en la figura 8.7. Otra vez, la constante C nos indica la intersección de cada curva con el eje y.

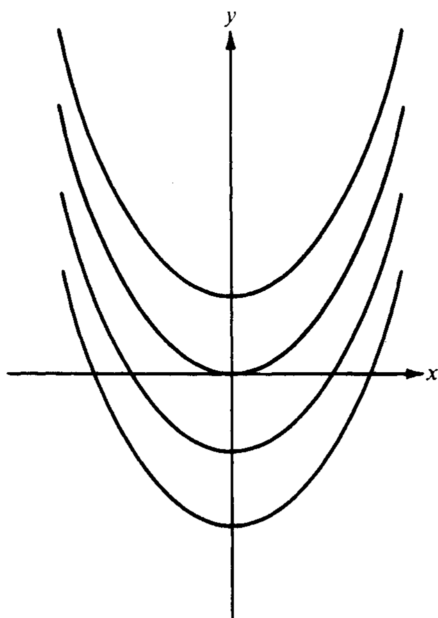


FIGURA 8.7 *Curvas integrales de la ecuación diferencial* $y' = x$.

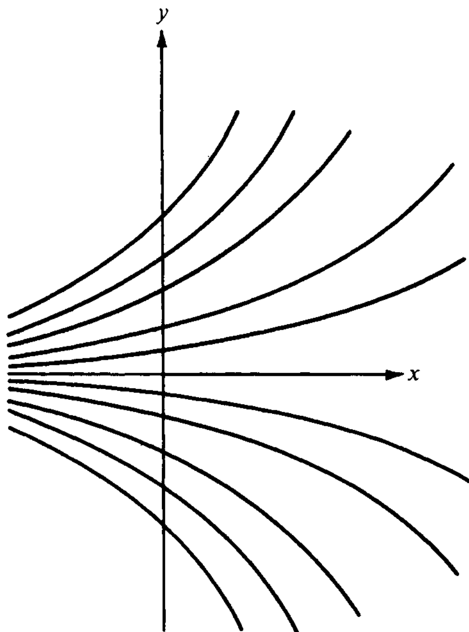


FIGURA 8.8 *Curvas integrales de la ecuación diferencial* $y' = y$.

La figura 8.8 representa la familia de curvas exponenciales, $y = Ce^x$, que son curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = y$. Una vez más, C representa el segmento interceptado sobre el eje y. En este caso, C es también igual a la pendiente de la curva en el punto en que corta al eje y.

En la figura 8.9 se ha representado una familia de rectas no paralelas. Son las curvas integrales de la ecuación

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \tag{8.41}$$

y la ecuación

$$y = Cx - \tfrac{1}{4}C^2. \tag{8.42}$$

da una familia de soluciones que depende de un solo parámetro.

Esta es una familia que posee una *envolvente,* esto es, una curva que tiene la propiedad de que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva de la fa-

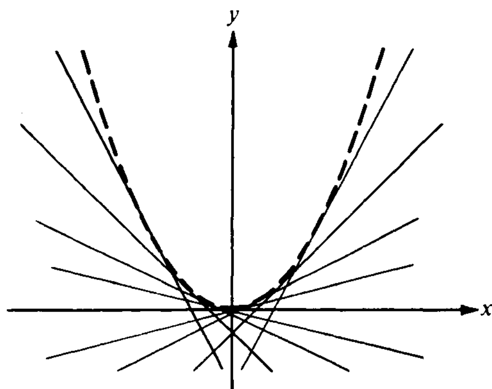


FIGURA 8.9 *Curvas integrales de la ecuación diferencial* $y = x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

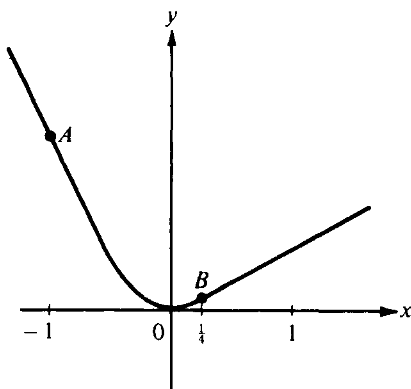


FIGURA 8.10 *Solución de la ecuación* (8.41) *que no pertenece a la familia de la ecuación* (8.42)

milia. (*) Aquí la envolvente es $y = x^2$ y su gráfica es la curva de trazos de la figura 8.9. La envolvente de una familia de curvas integrales es a su vez una curva integral debido a que la pendiente y las coordenadas en un punto de la envolvente coinciden con las de una de las curvas integrales de la familia. En este ejemplo, es fácil comprobar directamente que $y = x^2$ es una solución de (8.41). Obsérvese que esta solución particular no pertenece a la familia (8.42). Pueden obtenerse otras soluciones que no pertenecen a la familia uniendo porciones de curvas de la familia con porciones de la envolvente. En la figura 8.10 se muestra un ejemplo. La recta tangente en A resulta de tomar $C = -2$ en (8.42) y la tangente en B *de* $C = \frac{1}{2}$. La solución resultante, $y = f(x)$, viene dada así:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si} \quad x \le -1\,, \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x \le \frac{1}{4}\,, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} & \text{si} \quad x \ge \frac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Esta función admite derivada y satisface la ecuación diferencial (8.41) para todo valor real de x. Resulta evidente que por el mismo procedimiento podrían construirse infinidad de ejemplos parecidos. Este ejemplo hace ver que puede no ser fácil dar todas las soluciones posibles de una ecuación diferencial.

Es posible a veces encontrar una ecuación diferencial de primer orden que se satisfaga por todas las curvas de una familia de un solo parámetro. Veamos dos ejemplos.

(*) Y recíprocamente, cada curva de la familia es tangente a la envolvente.

EJEMPLO 1. Hallar una ecuación diferencial de primer orden a la que satisfacen todas las circunferencias con centro en el origen.

Solución. Una circunferencia con centro en el origen y radio C tiene por ecuación $x^2 + y^2 = C^2$. Cuando C va tomando todos los valores positivos, obtenemos todas las circunferencias con centro en el origen. Para encontrar una ecuación diferencial de primer orden que tenga esas circunferencias como curvas integrales, basta derivar la ecuación cartesiana obteniendo $2x + 2yy' = 0$. Así pues, cada circunferencia satisface la ecuación diferencial $y' = -x/y$.

EJEMPLO 2. Hallar una ecuación diferencial de primer orden para la familia de todas las circunferencias que pasan por el origen y que tienen sus centros sobre el eje x.

Solución. Si el centro de una circunferencia está en $(C, 0)$ y pasa por el origen, el teorema de Pitágoras nos dice que cada punto (x, y) de la circunferencia satisface la ecuación cartesiana $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, que puede escribirse como sigue

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0 \tag{8.43}$$

Para encontrar la ecuación diferencial que tenga esas circunferencias como curvas integrales, derivamos (8.43) obteniendo $2x + 2yy' - 2C = 0$, o

$$x + yy' = C . \tag{8.44}$$

Puesto que esta ecuación contiene C, se satisface únicamente para la circunferencia (8.43) correspondiente al mismo C. Para obtener una ecuación diferencial que se satisfaga para todas las curvas (8.43), debemos eliminar C. Podríamos derivar (8.44) y obtendríamos $1 + yy'' + (y')^2 = 0$. Esta es una ecuación diferencial de segundo orden que se satisface para todas las curvas (8.43). Podemos obtener una ecuación de primer orden eliminando C algebraicamente entre (8.43) y (8.44). Sustituyendo $x + yy'$ por C en (8.43), obtenemos $x^2 + y^2 - 2x(x + yy')$, ecuación de primer orden que podemos poner en la forma $y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$.

La figura 8.11 representa lo que se llama un *campo direccional* de una ecuación diferencial. Es simplemente un conjunto de pequeños segmentos rectilíneos tangentes a varias curvas integrales. El ejemplo particular representado en la figura 8.11 es un campo direccional de la ecuación $y' = y$.

Puede construirse un campo direccional sin resolver la ecuación diferencial. Se elige un punto, por ejemplo (a, b), y se calcula el número $f(a, b)$ obtenido por sustitución en el segundo miembro de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Si existe una curva integral que pase por ese punto, su pendiente en él debe ser igual

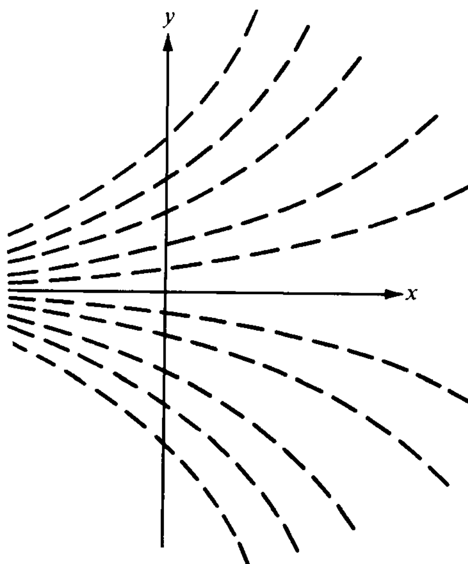


FIGURA 8.11 *Campo direccional de la ecuación diferencial $y' = y$.*

a $f(a, b)$. Por consiguiente, si dibujamos un trazo rectilíneo por el citado punto (a, b) y que tenga esa pendiente, dicho pequeño segmento de recta formará parte de un campo direccional de la ecuación diferencial. Dibujando varios de esos trazos, podemos conseguir una idea clara del comportamiento general de las curvas integrales. A veces tal información cualitativa puede ser la que se precise. Adviértase que puntos distintos $(0, b)$ en el eje y originan curvas integrales distintas. Esto nos da una razón geométrica de la aparición de una constante arbitraria al integrar una ecuación de primer orden.

8.22 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 12, encontrar una ecuación diferencial de primer orden que tenga como curvas integrales la familia de curvas dada.

1. $2x + 3y = C$.
2. $y = Ce^{-2x}$.
3. $x^2 - y^2 = C$.
4. $xy = C$.
5. $y^2 = Cx$.
6. $x^2 + y^2 + 2Cy = 1$.
7. $y = C(x - 1)e^x$.
8. $y^4(x + 2) = C(x - 2)$.
9. $y = C \cos x$.
10. $\arctan y + \operatorname{arcsen} x = C$.
11. Todas las circunferencias que pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.
12. Todas las circunferencias que pasan por los puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

En la construcción del campo direccional de una ecuación diferencial, a veces el trabajo puede abreviarse considerablemente si situamos primero aquellos puntos en los que la pen-

diente y' tenga un valor constante C. Para cada C, esos puntos están en una curva llamada *isoclina.*

13. Dibujar las isoclinas, correspondientes a las pendientes constantes $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ y 2 para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$. Con la ayuda de las isoclinas, construir un campo direccional para la ecuación e intentar la determinación de la forma de la curva integral que pasa por el origen.
14. Demostrar que las isoclinas de la ecuación diferencial $y' = x + y$ forman una familia de rectas dependiente de un parámetro. Trazar las isoclinas correspondientes a las pendientes constantes 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, ± 2. Con la ayuda de las isoclinas, construir un campo direcccional y esbozar la curva integral que pasa por el origen. Una de las curvas integrales es también una isoclina; hallarla.
15. Trazar varias isoclinas y construir un campo direccional para la ecuación.

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Si se dibuja con cuidado el campo direccional, se puede determinar una familia de soluciones dependiente de un parámetro a partir del aspecto del campo direccional.

8.23 Ecuaciones separables de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma $y' = f(x, y)$ en la que el segundo miembro $f(x, y)$ se escinde en el producto de dos factores, uno dependiente de x tan sólo y el otro únicamente de y, se denomina *ecuación separable.* Ejemplos pueden ser $y' = x^3$, $y' = y$, $y' = \operatorname{sen} y \log x$, $y' = x/\operatorname{tg} y$, etc. Así una ecuación separable puede expresarse en la forma

$$y' = Q(x)R(y),$$

donde Q y R son funciones dadas. Cuando $R(y) \neq 0$, podemos dividir por $R(y)$ y poner la ecuación en la forma

$$A(y)y' = Q(x),$$

siendo $A(y) = 1/R(y)$. El teorema que sigue nos indica cómo encontrar una fórmula implícita que se satisfaga para cualquier solución de una tal ecuación.

TEOREMA 8.10. *Sea $y = Y(x)$ una solución cualquiera de la ecuación diferencial separable*

(8.45) $$A(y)y' = Q(x)$$

tal que Y' sea continua en un intervalo abierto I. Supongamos que Q y la función compuesta $A \circ Y$ son ambas continuas en I. Sea G cualquier primitiva de A, esto

es, cualquier función tal que $G' = A$. Entonces la solución Y satisface la fórmula implícita.

(8.46)
$$G(y) = \int Q(x)\, dx + C$$

para un cierto valor de C. Recíprocamente, si y satisface (8.46) *entonces y es una solución de* (8.45).

Demostración. Puesto que Y es una solución de (8.45), debe ser

(8.47)
$$A[Y(x)]Y'(x) = Q(x)$$

para cada x de I. Ya que $G' = A$, esa ecuación se convierte en

$$G'[Y(x)]Y'(x) = Q(x).$$

Pero, según la regla de la cadena, el primer miembro es la derivada de la función compuesta $G \circ Y$. Por consiguiente $G \circ Y$ es una primitiva de Q, lo cual significa que

(8.48)
$$G[Y(x)] = \int Q(x)\, dx + C$$

para un cierto valor de C. Esta es la relación (8.46). Recíprocamente, si $y = Y(x)$ satisface (8.46), la derivación nos da (8.47), lo que demuestra que Y es una solución de la ecuación diferencial (8.45).

Nota: La fórmula implícita (8.46) también puede expresarse en función de A. A partir de (8.47) tenemos

$$\int A[Y(x)]Y'(x)\, dx = \int Q(x)\, dx + C.$$

Si hacemos la sustitución, $y = Y(x)$, $dy = Y'(x)\, dx$ en la integral de la izquierda, la ecuación se transforma en

(8.49)
$$\int A(y)\, dy = \int Q(x)\, dx + C.$$

Puesto que la integral indefinida $\int A(y)\, dy$ representa una primitiva cualquiera de A, la ecuación (8.49) es otra manera de escribir (8.46).

En la práctica, la fórmula (8.49) se obtiene directamente de (8.45) por un proceso mecánico. En la ecuación diferencial (8.45) ponemos la derivada y' en la forma dy/dx y la consideramos como un cociente obteniendo la relación $A(y)\, dy = Q(x)\, dx$. Ponemos luego los signos de integración en ambos miembros de esa ecuación y sumamos la cons-

tante C obteniendo (8.49). El teorema 8.10 proporciona la justificación de este proceso mecánico, el cual es otro ejemplo de la eficacia de la notación de Leibniz.

EJEMPLO. La ecuación no lineal $xy' + y = y^2$ es separable ya que puede escribirse en la forma

$$\frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x}, \tag{8.50}$$

con tal que $y(y-1) \neq 0$ y $x \neq 0$. En este caso las dos funciones $y = 0$ e $y = 1$ son evidentemente soluciones de $xy' + y = y^2$. Las restantes soluciones, si existen, satisfacen (8.50) y, por tanto, según el teorema 8.10 también satisfacen

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + K$$

para un cierto valor de la constante K. Puesto que el integrando del primer miembro es $1/(y-1) - 1/y$, cuando integramos, encontramos que

$$\log|y-1| - \log|y| = \log|x| + K.$$

Esto nos da $|(y-1)/y| = |x|e^K$ o $(y-1)/y = Cx$ para un cierto valor de C. Despejando y, obtenemos la fórmula explícita

$$y = \frac{1}{1 - Cx}. \tag{8.51}$$

El teorema 8.10 nos dice que para un valor cualquiera de C que elijamos, esa y es una solución; por consiguiente en este ejemplo hemos determinado todas las soluciones: las funciones constantes $y = 0$ e $y = 1$ y todas las funciones definidas por (8.51). Obsérvese que para $C = 0$ se obtiene la solución constante $y = 1$.

8.24 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 12, suponer que existen soluciones y encontrar una fórmula implícita a la que satisfagan las soluciones.

1. $y' = x^3/y^2$.
2. $\tan x \cos y = -y' \tan y$.
3. $(x + 1)y' + y^2 = 0$.
4. $y' = (y - 1)(y - 2)$.
5. $y\sqrt{1 - x^2}\, y' = x$.
6. $(x - 1)y' = xy$.
7. $(1 - x^2)^{1/2}y' + 1 + y^2 = 0$.
8. $xy(1 + x^2)y' - (1 + y^2) = 0$.
9. $(x^2 - 4)y' = y$.
10. $xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$.
11. $yy' = e^{x+2y} \operatorname{sen} x$.
12. $x\,dx + y\,dy = xy(x\,dy - y\,dx)$.

En los Ejercicios 13 al 16 encontrar funciones f, continuas en todo el eje real, que satisfagan las condiciones dadas. Cuando sea fácil hallarlas todas, hacerlo; en todo caso, hallar el mayor número posible.

13. $f(x) = 2 + \int_1^x f(t)\,dt$.
14. $f(x)f'(x) = 5x, \quad f(0) = 1$.
15. $f'(x) + 2xe^{f(x)} = 0, \quad f(0) = 0$.
16. $f^2(x) + [f'(x)]^2 = 1$. *Nota:* $f(x) = -1$ es una solución.
17. Una función f no negativa, continua en todo el eje real, tiene la propiedad de que su conjunto de ordenadas correspondiente a un intervalo arbitrario tiene área proporcional a la longitud del intervalo. Hallar f.
18. Resolver el Ejercicio 17 si el área es proporcional a la diferencia de los valores de la función en los extremos del intervalo.
19. Resolver el Ejercicio 18 sustituyendo «diferencia» por «suma».
20. Resolver el Ejercicio 18 sustituyendo «diferencia» por «producto».

8.25 Ecuaciones homogéneas de primer orden

Consideremos ahora un tipo especial de ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y), \tag{8.52}$$

en la que el segundo miembro tiene una propiedad conocida por *homogeneidad,* la cual consiste en

$$f(tx, ty) = f(x, y) \tag{8.53}$$

para todo x, y, y todo $t \neq 0$. Es decir, sustituyendo x por tx e y por ty no cambia el valor de $f(x, y)$. Las ecuaciones de la forma (8.52) que tienen esta propiedad se denominan *homogéneas* (algunas veces también se llaman *homogéneas de grado cero*). Por ejemplo:

$$y' = \frac{y - x}{y + x}, \qquad y' = \left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)^3, \qquad y' = \frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, \qquad y' = \log x - \log y\,.$$

Aplicando (8.53) con $t = 1/x$, la ecuación diferencial en (8.52) se transforma en:

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{8.54}$$

La presencia del cociente y/x en el segundo miembro, sugiere la idea de introducir una nueva función incógnita v con $v = y/x$. Entonces $y = vx$, $y' = v'x + v$, y esta sustitución transforma (8.54) en:

$$v'x + v = f(1, v) \qquad \text{o} \qquad x\frac{dv}{dx} = f(1, v) - v\,.$$

La última ecuación es separable de primer orden con la incógnita v. Podemos utilizar el teorema 8.10 y obtener una fórmula implícita para v y reemplazar entonces v por y/x con lo que se obtiene una fórmula implícita para y.

EJEMPLO. Resolver la ecuación diferencial $y' = (y - x)/(y + x)$.

Solución. La ecuación se escribe en la forma

$$y' = \frac{y/x - 1}{y/x + 1}.$$

La sustitución $v = y/x$ la transforma en

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = -\frac{1+v^2}{v+1}.$$

Aplicando el teorema 8.10 se obtiene

$$\int \frac{v}{1+v^2}\,dv + \int \frac{1}{1+v^2}\,dv = -\int \frac{dx}{x} + C.$$

La integración da

$$\tfrac{1}{2}\log(1+v^2) + \arctan v = -\log|x| + C.$$

Reemplazando v por y/x, tenemos

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}\log x^2 + \arctan\frac{y}{x} = -\log|x| + C,$$

y puesto que $\log x^2 = 2\log|x|$, resulta

$$\tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \arctan\frac{y}{x} = C.$$

Las soluciones de una ecuación homogénea $y' = f(x, y)$ tienen algunas propiedades geométricas interesantes. Ante todo, fácilmente se demuestra que las rectas que pasan por el origen son isoclinas de la ecuación. Recordemos que una isoclina de $y' = f(x, y)$ es una curva a lo largo de la cual la pendiente y' es constante. Esta propiedad se observa en la figura 8.12 que muestra un campo direccional de la ecuación diferencial $y' = -2y/x$.

La isoclina correspondiente a la pendiente c tiene de ecuación $-2y/x=c$, o $y=-\frac{1}{2}cx$, y por tanto es una recta que pasa por el origen y de pendiente $-\frac{1}{2}c$. Para demostrar la propiedad en general considérese la recta de pendiente m que pasa por el origen, cuya ecuación es $y=mx$ para todo (x, y) y en particular, el punto $(1, m)$ pertenece a la recta. Supóngase ahora, por razón de simplicidad, que por cada punto de la recta $y = mx$ pasa una curva integral. La pendiente de la curva integral que pasa por el punto (a, b) de esta recta es $f(a, b) = f(a, ma)$. Si $a\neq 0$ se puede utilizar la propiedad de homogeneidad (8.53) escribiendo $f(a, ma)=$

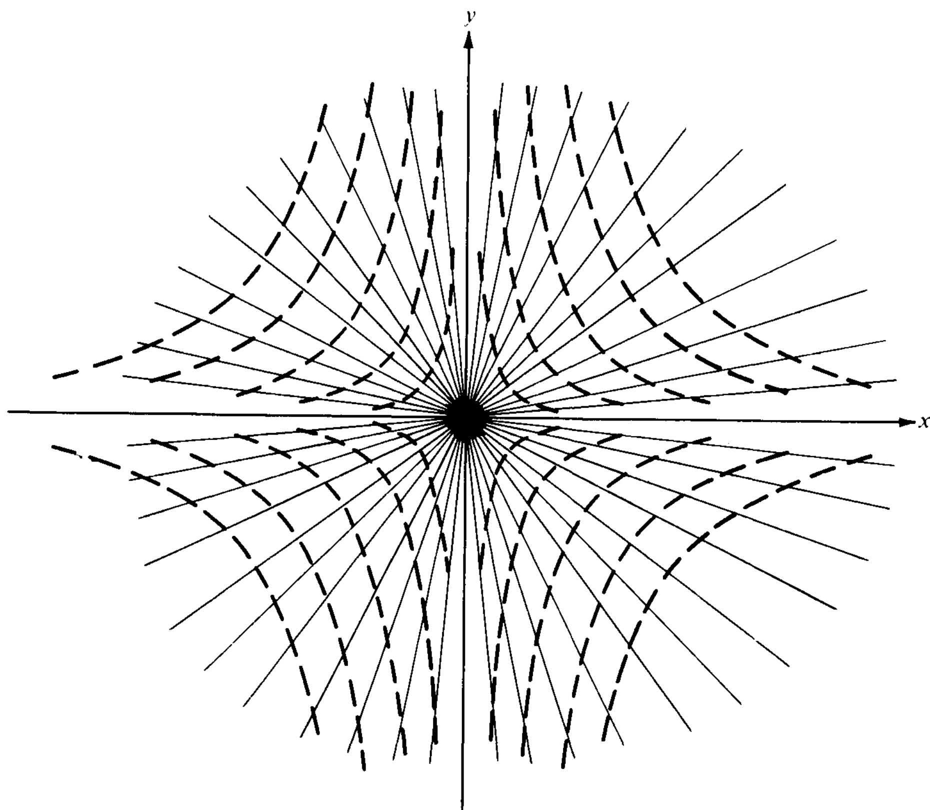


FIGURA 8.12 *Campo direccional de la ecuación diferencial $y' = -2y/x$. Las isoclinas son rectas que pasan por el origen.*

$= f(1, m)$. Es decir, si $(a, b) \neq (0, 0)$ la curva integral que pasa por (a, b) tiene la misma pendiente que la curva integral que pasa por $(1, m)$. Por tanto, la recta

$y = mx$ es una isoclina, como se había dicho. (Se podría probar también que éstas son las únicas isoclinas de una ecuación homogénea.)

Esta propiedad de las isoclinas sugiere una propiedad de las curvas integrales conocida por *invariancia respecto a las transformaciones por semejanza.* Recuérdese que una semejanza transforma un conjunto S en un nuevo conjunto kS obtenido multiplicando las coordenadas de cada punto de S por un factor constante $k > 0$. Cada recta que pasa por el origen se transforma en sí misma por una semejanza. Por tanto, las isoclinas de las ecuaciones diferenciales homogéneas quedan invariantes por transformaciones de semejanza, y en consecuencia lo mismo debe ocurrir al campo direccional. Esto sugiere que las transformaciones por semejanza transforman curvas integrales en curvas integrales. Para demostrarlo analíticamente supóngase que S es una curva integral definida por una fórmula explícita:

$$y = F(x)\,. \tag{8.55}$$

Decir que S es una curva integral de $y' = f(x, y)$ significa que:

$$F'(x) = f(x, F(x)) \tag{8.56}$$

para cada x en consideración. Sea ahora (x, y) un punto cualquiera de kS. Puesto que el punto $(x/k, y/k)$ pertenece a S, sus coordenadas satisfacen (8.55), de donde $y/k = F(x/k)$ o $y = kF(x/k)$. Es decir, la curva kS está definida por la ecuación $y = G(x)$, donde $G(x) = kF(x/k)$. Obsérvese que la derivada de G está dada por:

$$G'(x) = kF'\left(\frac{x}{k}\right) \cdot \frac{1}{k} = F'\left(\frac{x}{k}\right).$$

Para probar que kS es una curva integral de $y' = f(x, y)$ basta probar que $G'(x) = f(x, G(x))$ o lo que es lo mismo, que

$$F'\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(x, kF\left(\frac{x}{k}\right)\right). \tag{8.57}$$

Pero, si se sustituye x por x/k en la ecuación (8.56) y se aplica la propiedad de homogeneidad con $t = k$ se obtiene:

$$F'\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(\frac{x}{k}, F\left(\frac{x}{k}\right)\right) = f\left(x, kF\left(\frac{x}{k}\right)\right),$$

lo cual demuestra (8.57); es decir, kS es una curva integral siempre que lo sea S. Un ejemplo sencillo en el que esta propiedad geométrica es evidente es la ecua-

ción homogénea $y' = -x/y$, cuyas curvas integrales forman una familia de circunferencias concéntricas con un parámetro, dada por la ecuación $x^2 + y^2 = C$.

Se puede demostrar también que si las curvas integrales de una ecuación de primer orden son invariantes por las transformaciones de semejanza, la ecuación diferencial es necesariamente homogénea.

8.26 Ejercicios

1. Probar que la sustitución $y = x/v$ transforma la ecuación homogénea $y' = f(x, y)$ en una ecuación de primer orden en v en la que las variables están separadas. Algunas veces esta sustitución conduce a integrales que son más fáciles de calcular que las obtenidas por la sustitución $y = xv$ estudiada en el texto.

Resolver las ecuaciones diferenciales de los Ejercicios 2 al 11.

2. $y' = \dfrac{-x}{y}$.
3. $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$.
4. $y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$.
5. $(2y^2 - x^2)y' + 3xy = 0$.
6. $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$.
7. $x^2y' + xy + 2y^2 = 0$.
8. $y^2 + (x^2 - xy + y^2)y' = 0$.
9. $y' = \dfrac{y(x^2 + xy + y^2)}{x(x^2 + 3xy + y^2)}$.
10. $y' = \dfrac{y}{x} + x \operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$.
11. $x(y + 4x)y' + y(x + 4y) = 0$.

8.27 Algunos problemas físicos y geométricos que conducen a ecuaciones de primer orden

Seguidamente comentamos algunos ejemplos de problemas físicos y geométricos que conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden que son homogéneas o separables.

Trayectorias ortogonales. Decimos que dos curvas se cortan *ortogonalmente* en un punto si sus tangentes con él son perpendiculares. Una curva que corta ortogonalmente a todas las curvas de una familia se llama trayectoria ortogonal de la familia. La figura 8.13 muestra algunos ejemplos. Los problemas relativos a trayectorias ortogonales son importantes en Matemática pura y aplicada. Por ejemplo, en la teoría de flujo de fluidos, dos familias ortogonales de curvas se llaman *líneas equipotenciales* y *líneas de corriente* respectivamente. En la teoría del calor, se llaman *líneas isotermas* y *líneas de flujo.*

Supongamos dada una familia de curvas que satisfacen una ecuación diferencial de primer orden, por ejemplo

$$y' = f(x, y)\,. \tag{8.58}$$

El número $f(x, y)$ es la pendiente de una curva integral que pasa por (x, y). La pendiente de cada trayectoria ortogonal en ese punto es el recíproco negativo $-1/f(x, y)$, de modo que las trayectorias ortogonales satisfacen la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}\,. \tag{8.59}$$

Si (8.58) es separable, entonces (8.59) es también separable. Si (8.58) es homogénea, también (8.59) lo es.

EJEMPLO 1. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de todas las circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros en el eje x.

Solución. En el ejemplo 2 de la Sección 8.21 se encontró que esta familia tiene por ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$ y que satisface la ecuación diferencial $y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$. Reemplazando el segundo miembro por su recíproco negativo, encontramos que las trayectorias ortogonales satisfacen la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}\,.$$

Esta ecuación homogénea puede integrarse con la sustitución $y = vx$, y se llega a la familia de curvas integrales

$$x^2 + y^2 - 2Cy = 0\,.$$

Esta es una familia de circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros en el eje y. Algunas de esas circunferencias están dibujadas en la figura 8.13.

Problemas de persecución. Un punto Q está sujeto a moverse a lo largo de una curva plana C_1. Otro punto P en el mismo plano «persigue» el punto Q. Esto es, P se mueve de tal manera que su dirección de movimiento está siempre orientada hacia Q. El punto P por tanto describe otra curva C_2 llamada *curva de persecución*. En el ejemplo representado en la figura 8.14, la curva C_1 es el eje y. En un problema de persecución se desea encontrar la curva C_2 cuando se conoce

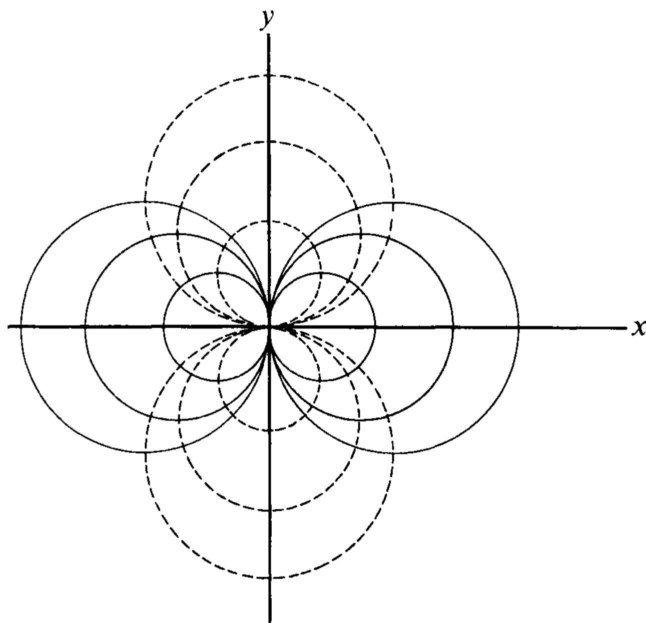


FIGURA 8.13 *Circunferencias ortogonales.*

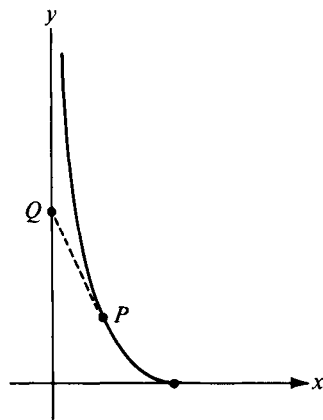


FIGURA 8.14 *La tractriz como curva de persecución. La distancia entre P y Q es constante*

la curva C_1 y cierta información adicional relativa a P y Q, por ejemplo, una relación entre sus posiciones o sus velocidades.

Cuando decimos que la dirección de movimiento de P está siempre orientada hacia Q, queremos significar que la tangente a C_2 en P pasa por Q. Por lo tanto, si designamos con (x, y) las coordenadas rectangulares de P en un instante dado, y por (X, Y) las de Q en el mismo instante, debe ser

$$y' = \frac{Y - y}{X - x}. \tag{8.60}$$

La información adicional ordinariamente nos permite considerar X e Y como funciones conocidas de x e y, en cuyo caso la ecuación (8.60) se convierte en una ecuación diferencial de primer orden con la incógnita y. Consideremos ahora un ejemplo en el que esa ecuación es separable.

EJEMPLO 2. Un punto Q se mueve sobre una recta C_1, y un punto P persigue a Q de manera que la distancia de P a Q tenga un valor constante $k > 0$. Si P no está inicialmente sobre C_1, hallar la curva de persecución.

Solución. Tomemos C_1 como eje y y situemos P inicialmente en el punto $(k, 0)$. Puesto que la distancia de P a Q es k, debe ser $(X - x)^2 + (Y - y)^2 = k^2$. Pero $X = 0$ sobre C_1, con lo que tenemos $Y - y = \sqrt{k^2 - x^2}$, y la ecuación diferencial (8.60) se convierte en

$$y' = \frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{-x}.$$

Integrándola con la ayuda de la sustitución $x = k \cos t$ y utilizando el hecho de que $y = 0$ cuando $x = k$. obtenemos la relación

$$y = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2}.$$

La curva de persecución en este ejemplo se llama *tractriz;* está dibujada en la figura 8.14.

Salida de un líquido por un orificio. Se supone que un depósito (no necesariamente cilíndrico) contiene un líquido. El líquido sale del depósito a través de un orificio de bordes perfectamente pulimentados. Si no hubiera rozamiento (y por tanto no hubiera pérdida de energía) la velocidad de salida sería igual a $\sqrt{2gy}$ metros por segundo, donde y expresa la altura (en metros) desde el orificio a la superficie libre del líquido. (*) (Véase fig. 8.15.) Si A_0 es el área (en metros cuadrados) del orificio, entonces $A_0\sqrt{2gy}$ representa el número de metros cúbicos por segundo de líquido que sale por el orificio. A causa del rozamiento, el chorro se contrae un poco, y la velocidad de descarga es aproximadamente $cA_0\sqrt{2gy}$, donde c es un número determinado experimentalmente y que se denomina *coeficiente de descarga.* Ordinariamente, para orificios pulidos el valor aproximado de c es 0,60. Haciendo uso de estos datos y tomando $g = 9{,}8$ se encuentra que la velocidad de salida es aproximadamente igual a $2{,}65\sqrt{y}$ metros por segundo y que la velocidad de descarga es $2{,}65\, A_0 \sqrt{y}$ metros cúbicos por segundo.

Sea $V(y)$ el volumen de líquido contenido en el depósito cuando la altura del líquido es y. Si el área de la sección recta del depósito a la altura u es $A(u)$, se tiene $V(y) = \int_0^y A(u)\, du$, de donde resulta $dV/dy = A(y)$. De lo dicho en el párrafo anterior resulta que el coeficiente de variación del volumen con respecto al tiempo es $dV/dt = 2{,}65A_0\sqrt{y}$ metros cúbicos por segundo, donde el signo menos se debe a que el volumen decrece. Aplicando la regla de la cadena, resulta:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = A(y)\frac{dy}{dt}.$$

(*) Si una partícula de masa m cae libremente a lo largo de una distancia y y alcanza una velocidad v, su energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ ha de ser igual a la energía potencial mgy (el trabajo realizado para elevarla a la altura y). Resolviendo respecto a v se tiene $v = \sqrt{2gy}$.

Combinando ésta con la ecuación $dV/dt = -2{,}65A_0\sqrt{y}$ se obtiene la ecuación diferencial

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -2{,}65A_0\sqrt{y}\,.$$

Esta ecuación separable se utiliza como modelo matemático para problemas relativos a la salida de fluidos por un orificio. La altura y de la superficie está ligada al tiempo t por una ecuación de la forma

(8.61)
$$\int \frac{A(y)}{\sqrt{y}}\,dy = -2{,}65A_0\int dt + C\,.$$

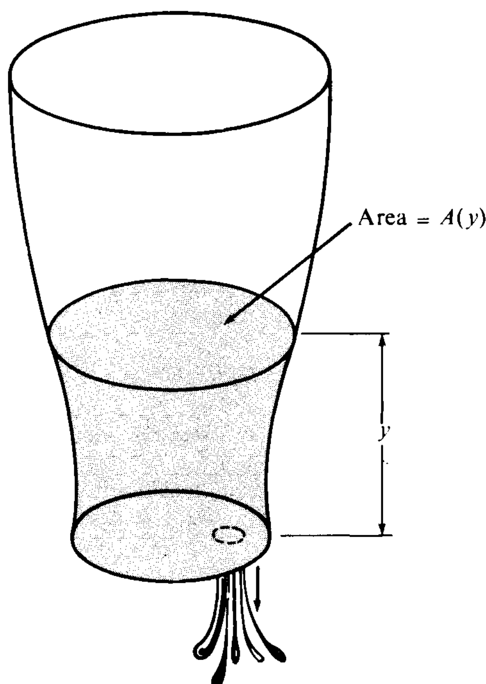


FIGURA 8.15 *Salida de un líquido por un orificio*

EJEMPLO 3. Considérese ahora el caso particular en que $A(y)$ es constante, es decir $A(y) = A$ para todo y, y que el nivel del líquido ha bajado de 10 metros

a 9 metros en 10 minutos (600 segundos). Estos datos se pueden introducir en los límites de las integraciones, y de la ecuación diferencial (8.61) se deduce:

$$-\int_{10}^{9} \frac{dy}{\sqrt{y}} = k\int_{0}^{600} dt\,,$$

donde $k = 2{,}65A_0/A$. De la ecuación anterior se puede determinar k pues

$$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{\frac{1}{2}} = 600k \qquad \text{o} \qquad k = \frac{\sqrt{10} - 3}{300}\,.$$

Ahora se puede calcular el tiempo necesario para que el nivel descienda de un valor a otro dado. Por ejemplo, si en el instante t_1 el nivel es 7 metros y en el instante t_2 es 1 metro (t_1 y t_2 medidos en minutos) entonces ha de ser:

$$-\int_{7}^{1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = k\int_{60t_1}^{60t_2} dt\,,$$

de donde resulta:

$$t_2 - t_1 = \frac{2(\sqrt{7} - 1)}{60k} = 10\,\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{10} - 3} = \frac{10(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{10} + 3)}{10 - 9} = (10)(1{,}645)(6{,}162) =$$

$$= 101{,}3 \text{ minutos.}$$

8.28 Ejercicios de repaso

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 10 encontrar las trayectorias ortogonales de las familias de curvas dadas

1. $2x + 3y = C.$
2. $xy = C.$
3. $x^2 + y^2 + 2Cy = 1.$
4. $y^2 = Cx.$
5. $x^2y = C.$
6. $y = Ce^{-2x}.$
7. $x^2 - y^2 = C.$
8. $y = C\cos x.$
9. Todas las circunferencias que pasan por los puntos (1, 0) y (– 1, 0).
10. Todas las circunferencias que pasan por los puntos (1, 1) y (– 1, – 1).
11. Un punto Q se mueve hacia arriba siguiendo el eje y positivo. Un punto P, inicialmente en (1, 0), persigue Q de manera que su distancia al eje y es $\frac{1}{2}$ de la distancia a Q desde el origen. Hallar la ecuación cartesiana de la curva de persecución.
12. Resolver el Ejercicio 11 cuando la fracción $\frac{1}{2}$ se reemplaza por un número positivo cualquiera k.
13. Una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ pasa por el origen. Trazando rectas paralelas a los ejes por un punto arbitrario de la curva se forma un rectángulo con dos lados sobre los ejes. La curva divide cualquiera de esos rectángulos en dos regiones A y B, una de las cuales tiene un área igual a n veces la otra. Hallar la función f.

14. Resolver el Ejercicio 13 si las dos regiones A y B tienen la propiedad de que, cuando giran alrededor del eje x, describen sólidos uno de los cuales tiene un volumen n veces mayor que el del otro.
15. La gráfica de una función f derivable y no negativa pasa por el origen y por el punto $(1, 2/\pi)$. Si, para todo $x > 0$, el conjunto de ordenadas de f situado por encima del intervalo $[0, x]$ describe un sólido de volumen $x^2 f(x)$ cuando gira alrededor del eje x, hallar la función f.
16. Una función f derivable y no negativa está definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$ siendo $f(1) = 0$. Para cada a, $0 < a < 1$, la recta $x = a$ corta el conjunto de ordenadas de f en dos regiones que tienen áreas A y B respectivamente, siendo A el área de la región de la parte izquierda. Si $A - B = 2f(a) + 3a + b$, siendo b una constante independiente de a, hallar la función f y la constante b.
17. La gráfica de una función f pasa por los dos puntos $P_0 = (0, 1)$ y $P_1 = (1, 0)$. Para todo punto $P = (x, y)$ de la gráfica, la curva está situada por encima de la cuerda P_0P, y el área $A(x)$ de la región comprendida entre la curva y la cuerda PP_0 es igual a x^3. Determinar la función f.
18. Un depósito con paredes verticales tiene una sección cuadrada de 4 metros cuadrados de área. El agua sale del depósito por un orificio de $\frac{5}{3}$ centímetros cuadrados. Si el nivel del agua está inicialmente 2 metros por encima del orificio, hallar el tiempo necesario para que descienda 1 metro.
19. Un depósito tiene la forma de un cono circular recto con su vértice hacia arriba. Hallar el tiempo necesario para vaciarlo, del líquido que lo llena, por un orificio practicado en su base. Expresar el resultado en función de las dimensiones del cono y del área A_0 del orificio.
20. La ecuación $xy'' - y' + (1 - x)y = 0$ tiene una solución de la forma $y = e^{mx}$, donde m es constante. Determinar esta solución explícitamente.
21. Resolver la ecuación diferencial $(x + y^3) + 6xy^2y' = 0$ haciendo un cambio de variable adecuado que la convierta en lineal.
22. Resolver la ecuación diferencial $(1 + y^2e^{2x})y' + y = 0$ introduciendo el cambio de variables de la forma $y = ue^{mx}$ donde m es una constante y u es una nueva función incógnita.
23. (a) Dada una función f que satisface las relaciones

$$2f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x > 0, \qquad f(1) = 2\,,$$

si es $y = f(x)$, probar que y satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$x^2y'' + axy' + by = 0\,,$$

donde a y b son constantes. Determinar a y b.
(b) Encontrar una solución de la forma: $f(x) = Cx^n$.
24. (a) Sea u una solución no nula de la ecuación de segundo orden:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0\,.$$

Probar que la sustitución $y = uv$ transforma la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

en una ecuación lineal de primer orden en v'.

(b) Obtener por tanteo una solución no nula de la ecuación $y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 0$ y aplicar el método dado en (a) para encontrar una solución de

$$y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 2xe^{-x^3/3}$$

tal que $y = 0$ e $y' = 4$ si $x = 0$.

25. Científicos del Ajax Atomics Works aislaron un gramo de un nuevo elemento radiactivo llamado deteriorum. Se encontró que se desintegraba con una velocidad proporcional al cuadrado de la cantidad existente. Después de un año quedaba $\frac{1}{2}$ gramo.
(a) Establecer y resolver la ecuación diferencial que da la masa del deteriorum que queda en el instante t.
(b) Calcular la constante de desintegración en unidades de gm^{-1} y $año^{-1}$.
26. Supóngase que en el ejercicio precedente se sustituye la palabra *cuadrado* por *raíz cuadrada,* quedando los otros datos los mismos. Probar que en este caso la sustancia se desintegraría totalmente en un tiempo finito y hallar este tiempo.
27. Al principiar la fiebre del oro, la población de Coyote Gulch, Arizona, era 365. A partir de este momento, la población hubiera ido creciendo, quedando cada año multiplicada por e, salvo el gran número de muertes «accidentales» que es de una víctima diaria por cada 100 ciudadanos. Resolviendo la ecuación diferencial adecuada determinar como funciones del tiempo, (a) la población que tendría Coyote Gulch t años después del comienzo de la fiebre del oro, y (b) el número total de muertes al cabo de t años.
28. ¿Con qué velocidad tendría que ser lanzado hacia arriba un cohete para que no volviera nunca a la tierra? (Sólo se tiene en cuenta la fuerza de la gravedad terrestre.)
29. Sea $y = f(x)$ la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2y^2 + x}{3y^2 + 5}$$

que satisface la condición inicial $f(0) = 0$. (No intentar la resolución de esa ecuación.)
a) La ecuación diferencial muestra que $f''(0) = 0$. Discutir si f tiene un máximo o un mínimo relativos en 0 o bien ni uno ni otro.
b) Obsérvese que $f'(x) \geq 0$ para cada $x \geq 0$ y que $f'(x) \geq \frac{2}{3}$ para cada $x \geq \frac{10}{3}$. Determinar dos números positivos a y b tales que $f(x) > ax - b$ para cada $x \geq \frac{10}{3}$.
c) Demostrar que $x/y^2 \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Detallar el razonamiento.
d) Demostrar que y/x tiende a un límite finito cuando $x \to +\infty$ y determinarlo.
30. Dada una función f que satisfaga la ecuación diferencial

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$$

para todo x real. (No resolver la ecuación.)
a) Si f tiene un extremo en un punto $c \neq 0$, demostrar que tal extremo es un mínimo.
b) Si f tiene un extremo en 0 ¿es un máximo o un mínimo? Justificar la conclusión.
c) Si $f(0) = f'(0) = 0$, hallar la menor constante A tal que $f(x) \leq Ax^2$ para todo $x \geq 0$.

9

NÚMEROS COMPLEJOS

9.1 Introducción histórica

La ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el sistema de los números reales porque no existe un número real cuyo cuadrado sea -1. Han sido introducidos nuevos tipos de números, llamados *números complejos*, para conseguir las soluciones de tales ecuaciones. En este breve capítulo tratamos de los números complejos y vemos que son importantes en la resolución de ecuaciones algebraicas y en cálculo diferencial e integral.

Ya en el siglo XVI se introdujo el símbolo $\sqrt{-1}$ para procurarse las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Este símbolo, más tarde representado con la letra i, se consideró como un número ficticio o imaginario que debía tratarse algebraicamente como cualquier número real, salvo que su cuadrado era -1. Así, por ejemplo, el polinomio cuadrático $x^2 + 1$ fue factorizado escribiendo $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$, y las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ se dieron como $x = \pm i$, sin preocuparse del significado o validez de tales fórmulas. Expresiones tales como $2 + 3i$ se llamaron números complejos, y se utilizaron de modo puramente formal casi 300 años antes de que fueran descritos de una manera que puede ser considerada como satisfactoria en la actualidad.

A principios del siglo XIX, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y William Rowan Hamilton (1805-1865) independientemente y casi al mismo tiempo propusieron la idea de definir los números complejos como pares ordenados (a, b) de números reales dotados de ciertas propiedades especiales. Esta idea hoy se acepta totalmente y la exponemos en la Sección siguiente.

9.2. Definiciones y propiedades

DEFINICIÓN. *Si a y b son número reales, el par (a, b) se llama número complejo, si la igualdad, la adición y la multiplicación de pares se definen del modo siguiente:*

a) *Igualdad:* $(a, b) = (c, d)$ *significa* $a = c$ y $b = d$.
b) *Suma:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
c) *Producto:* $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

La definición de igualdad nos dice que el par (a, b) se considera como un par *ordenado*. Así, el número complejo (2, 3) no es igual al (3, 2). Los números a y b se llaman *componentes* de (a, b). El primer componente, a, es la *parte real* del número complejo; el segundo componente, b, se llama *parte imaginaria*.

Obsérvese que el símbolo $i = \sqrt{-1}$ no aparece en esta definición. Dentro de poco introduciremos i como un número complejo particular con todas las propiedades algebraicas que atribuían al símbolo ficticio $\sqrt{-1}$ los antiguos matemáticos. No obstante, antes de esto, discutiremos las propiedades básicas de las operaciones que acabamos de definir.

TEOREMA 9.1. *Las operaciones de adición y multiplicación de números complejos satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Esto es, si* x, y, z, *son números complejos cualesquiera, tenemos*

Ley conmutativa: $x + y = y + x, \quad xy = yx.$
Ley asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z.$
Ley distributiva: $x(y + z) = xy + xz.$

Demostración. Todas esas leyes se verifican con facilidad directamente a partir de la definición de suma y producto. Por ejemplo, para demostrar la ley asociativa para la multiplicación, escribimos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ y observamos que

$$\begin{aligned} x(yz) &= (x_1, x_2)(y_1z_1 - y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1) \\ &= (x_1(y_1z_1 - y_2z_2) - x_2(y_1z_2 + y_2z_1), x_1(y_1z_2 + y_2z_1) + x_2(y_1z_1 - y_2z_2)) = \\ &= ((x_1y_1 - x_2y_2)z_1 - (x_1y_2 + x_2y_1)z_2, (x_1y_2 + x_2y_1)z_1 + (x_1y_1 - x_2y_2)z_2) = \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)(z_1, z_2) = (xy)z. \end{aligned}$$

De manera semejante se demuestran las leyes conmutativa y distributiva.

El teorema 9.1 demuestra que el conjunto de todos los números complejos satisface los tres primeros axiomas del sistema de los números reales, como se dieron en la Sección I 3,2. Ahora demostraremos que los axiomas 4, 5 y 6 también se satisfacen.

Puesto que $(0, 0) + (a, b)$ para todos los complejos (a, b), el número complejo $(0, 0)$ es el elemento neutro para la adición. Se le llama el número complejo

cero. Análogamente, el complejo (1, 0) es el elemento neutro para la multiplicación porque

$$(a, b)(1, 0) = (a, b)$$

para todo (a, b). Así que, el axioma 4 se satisface con (0, 0) como neutro o idéntico para la adición y (1, 0) como neutro para la multiplicación.

Para verificar el axioma 5, observemos solamente que $(-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$, así que $(-a, -b)$ es el opuesto de (a, b). Escribimos $-(a, b)$ en lugar de $(-a, -b)$.

Finalmente, demostramos que cada número complejo no nulo tiene un recíproco respecto al elemento neutro (1, 0). Esto es, si $(a, b) \neq (0, 0)$, existe un número complejo (c, d) tal que

$$(a, b)(c, d) = (1, 0).$$

En efecto, esta ecuación equivale al par de ecuaciones

$$ac - bd = 1, \qquad ad + bc = 0,$$

que tienen la solución única

(9.1)
$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

La condición $(a, b) \neq (0, 0)$ asegura que $a^2 + b^2 \neq 0$, por lo que el recíproco está bien definido. Escribimos $(a, b)^{-1}$ o $1/(a, b)$ para representar el recíproco de (a, b). Así pues, tenemos

(9.2)
$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \qquad \text{si} \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

La discusión anterior muestra que el conjunto de los números complejos satisface los seis axiomas del sistema de los números reales. Por consiguiente, todas las leyes del Álgebra que se deducen del conjunto de axiomas también son válidas para los números complejos. En particular, los teoremas del I.1 al I.15 de la Sección I 3.2 son todos válidos para los números complejos lo mismo que para los números reales. El teorema I.8 nos dice que existen los cocientes de números complejos. Esto es, si (a, b) y (c, d) son dos números complejos siendo $(a, b) \neq (0. 0)$, existe exactamente un número complejo (x, y) tal que $(a, b)(x, y) = (c, d)$. En efecto, tenemos $(x, y) = (c, d)(a, b)^{-1}$.

9.3 Los números complejos como una extensión de los números reales

Designemos con **C** el conjunto de los números complejos. Consideremos el subconjunto $\mathbf{C}_0$ de **C** constituido por los números complejos de la forma $(a, 0)$, esto es, los que tienen nula la parte imaginaria. La suma o el producto de dos elementos de $\mathbf{C}_0$ también pertenece a $\mathbf{C}_0$. En efecto, tenemos

$$(9.3) \qquad (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \qquad \text{y} \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)\,.$$

Esto demuestra que podemos sumar o multiplicar dos números complejos de $\mathbf{C}_0$ sumando o multiplicando sólo las partes reales. O lo que es lo mismo, respecto a la adición y a la multiplicación, los números de $\mathbf{C}_0$ se comportan del mismo modo que si fueran números reales. Lo mismo es válido para la sustracción y la división, ya que $-(a, 0) = (-a, 0)$ y $(b, 0)^{-1} = (b^{-1}, 0)$ si $b \neq 0$. Por este motivo, normalmente no hacemos distinción entre el número real x y el número complejo $(x, 0)$ cuya parte real es x; convenimos en identificar x y $(x, 0)$, y escribimos $x = (x, 0)$. En particular, escribimos $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, $-1 = (-1, 0)$, y así sucesivamente. De este modo, podemos imaginar el sistema de los números complejos como una extensión del de los números reales.

La relación entre $\mathbf{C}_0$ y el sistema de los números reales puede establecerse en forma ligeramente distinta. Sea **R** el conjunto de los números reales, y designemos con f la función que aplica cada número real x en el número complejo $(x, 0)$. Esto es, si $x \in \mathbf{R}$, ponemos

$$f(x) = (x, 0)\,.$$

La función f así definida tiene como dominio **R** y como recorrido $\mathbf{C}_0$, y aplica elementos distintos de **R** en elementos distintos de $\mathbf{C}_0$. Por verificar estas propiedades, se dice que f establece una *corrrespondencia uno a uno* entre **R** y $\mathbf{C}_0$. Las operaciones de adición y multiplicación se conservan a través de esta correspondencia. Esto es, tenemos

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \qquad \text{y} \qquad f(ab) = f(a)f(b)\,,$$

siendo estas igualdades tan sólo una nueva formulación de (9.3). Puesto que **R** satisface los seis axiomas, lo mismo le ocurre a $\mathbf{C}_0$. Los dos cuerpos de números **R** y $\mathbf{C}_0$ se dice que son *isomorfos*; la función f que los liga como antes se ha descrito, se denomina *isomorfismo*. En lo concerniente a las operaciones de adición y multiplicación, no hacemos distinciones entre cuerpos isomorfos. Por esto identificamos el número real x con el número complejo $(x, 0)$. El sistema de números complejos **C** es una *extensión* del de los números reales **R** porque contiene un subconjunto $\mathbf{C}_0$ isomorfo a **R**.

El cuerpo $\mathbf{C}_0$ puede ser *ordenado* de modo que se satisfagan los tres axiomas de orden de la Sección I 3.4. En efecto, definimos $(x, 0)$ como positivo si y sólo si $x > 0$. Es muy sencillo comprobar que los axiomas 7, 8 y 9 se satisfacen, por lo que $\mathbf{C}_0$ es un cuerpo ordenado. El isomorfismo f antes descrito conserva también el orden ya que aplica los elementos positivos de $\mathbf{R}$ sobre los elementos positivos de $\mathbf{C}_0$.

9.4 La unidad imaginaria i

Los números complejos tienen algunas propiedades de las que no gozan los números reales. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, que no tiene solución en el campo real, puede ahora resolverse con el uso de los números complejos. En efecto, el número complejo $(0, 1)$ es una solución, puesto que tenemos

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 .$$

El número complejo $(0, 1)$ lo representamos con la letra i y se llama *unidad imaginaria*. Tiene la propiedad de que su cuadrado es -1, $i^2 = -1$. El lector puede comprobar fácilmente que $(-i)^2 = -1$, así que $x = -i$ es otra solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Ahora podemos relacionar la idea de par ordenado con la notación empleada por los antiguos matemáticos. Observemos primero que la definición de multiplicación de números complejos nos da $(b, 0)(0, 1) = (0, b)$, y tenemos por tanto

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) .$$

Por consiguiente, si escribimos $a = (a, 0)$, $b = (b, 0)$, e $i = (0, 1)$, conseguimos $(a, b) = a + bi$. Es decir, hemos demostrado el siguiente

TEOREMA 9.2. *Todo número complejo (a, b) puede expresarse en la forma $(a, b) = a + bi$.*

La ventaja de esta notación consiste en que nos ayuda en el manejo algebraico de las fórmulas en las que interviene la adición y la multiplicación. Por ejemplo, si multiplicamos $a + bi$ por $c + di$, utilizando las leyes distributiva y asociativa, y reemplazando i^2 por -1, encontramos que

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i ,$$

que, naturalmente, está de acuerdo con la definición de multiplicación. Análogamente, para calcular el recíproco de un número complejo no nulo $a + bi$, podemos escribir

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}.$$

Esta fórmula está de acuerdo con la dada en (9.2).

Con la introducción de los números complejos, hemos ganado más que lo que supone poder resolver la sencilla ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$. Consideremos, por ejemplo, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, en la que a, b, c son reales y $a \neq 0$. Completando el cuadrado, podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0\,.$$

Si $4ac - b^2 \leq 0$, la ecuación tiene las raíces reales $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$. Si $4ac - b^2 > 0$, el primer miembro es positivo para todo valor real de x y la ecuación no tiene raíces reales. En este caso, no obstante, existen dos raíces complejas, dadas por las fórmulas

$$(9.4) \qquad r_1 = -\frac{b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = -\frac{b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

En 1799, Gauss demostró que toda ecuación algebraica de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0\,,$$

en la que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera, con $a_n \neq 0$, tiene una solución compleja si $n \geq 1$. Además, incluso en el caso en que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sean complejos, existe una solución compleja. Este hecho se conoce con el nombre de *Teorema fundamental del álgebra.* (*) En él se demuestra que no es necesario construir números más generales que los complejos para resolver ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos.

(*) En cualquier libro de teoría de funciones de variable compleja puede encontrarse una demostración del teorema fundamental del álgebra. Por ejemplo, véase K. Knopp, *Theory of Functions*, Dover Publications, New York, 1945, o E. Hille, *Analytic Function Theory*, Vol. I, Blasdell Publishing Co., 1959. Puede verse una demostración más elemental en O. Schreier y E. Sperner, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, Chelsea Publishing Company New York,. 1951.

9.5 Interpretación geométrica. Módulo y argumento

Puesto que un número complejo (x, y) es un par ordenado de números reales, puede representarse geométricamente mediante un punto del plano, o por una flecha o vector geométrico que una el origen con el punto (x, y), como muestra la figura 9.1. Por ello, al plano xy, se le llama a menudo plano complejo. El eje x es el eje real; el eje y es el eje imaginario. Ordinariamente las palabras *número complejo* y *punto* se usan indistintamente. Así que diremos el punto z en lugar de decir el punto correspondiente al número complejo z.

Las operaciones de adición y sustracción de números complejos tienen una sencilla interpretación geométrica. Si dos números complejos z_1 y z_2 se representan mediante flechas que unen el origen con z_1 y z_2, respectivamente, entonces la suma $z_1 + z_2$ está determinada por la *ley del paralelógramo*. La flecha que une el origen con el punto $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelógramo determinado por 0, z_1 y z_2, como se ve en la figura 9.2. La otra diagonal está relacionada con la diferencia de z_1 y z_2. La flecha de z_1 a z_2 es paralela y de igual longitud que la que une 0 con $z_2 - z_1$; la flecha en el sentido opuesto, de z_2 a z_1, se relaciona del mismo modo con $z_1 - z_2$.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, podemos expresar x e y en coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

y obtenemos

$$x + iy = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \tag{9.5}$$

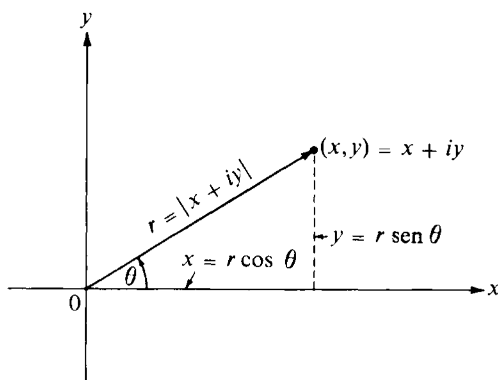


FIGURA 9.1 *Representación geométrica del número complejo* $x + iy$.

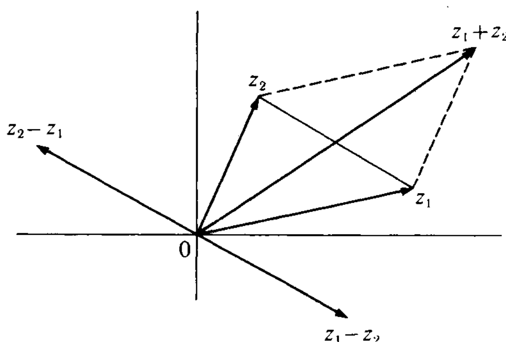


FIGURA 9.2 *Adición y sustracción de números complejos representados geométricamente mediante la ley del paralelógramo.*

El número positivo r, que representa la distancia de (x, y) al origen, se llama *módulo* o *valor absoluto* de $x + iy$ y se representa con $|x + iy|$. Así pues, tenemos

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

El ángulo polar θ es un *argumento* de $x + iy$. Decimos *un* argumento y no *el* argumento porque para un punto dado (x, y) el ángulo θ está determinado salvo múltiplos de 2π. Algunas veces es preferible asignar un argumento único a un número complejo. Esto puede hacerse limitando θ a variar en un intervalo semiabierto de longitud 2π. Los intervalos $[0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi]$ son los más comúnmente usados. Utilizaremos el intervalo $(-\pi, \pi]$ y llamaremos al correspondiente θ el *argumento principal* de $x + iy$; este valor de θ lo representamos con $\arg(x + iy)$. Así pues, si $x + iy \neq 0$ y $r = |x + iy|$, definimos $\arg(x + iy)$ como el único número real θ que satisface las condiciones

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad -\pi < \theta \leq \pi\,.$$

Al número complejo cero, le asignamos el módulo 0 y convenimos en que cualquier número real θ puede usarse como argumento.

Puesto que el valor absoluto de un número complejo z es simplemente la longitud de un segmento, no debe sorprendernos que goce de las propiedades de los valores absolutos de los números reales. Por ejemplo, tenemos

$$|z| > 0 \quad \text{si} \quad z \neq 0, \qquad \text{y} \qquad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|\,.$$

Geométricamente, el valor absoluto $|z_1 - z_2|$ representa la distancia entre los puntos z_1 y z_2 del plano complejo. La desigualdad triangular

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

también es válida. Además, tenemos las fórmulas siguientes para los valores absolutos de productos y cocientes de números complejos:

(9.6)
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

y

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \text{si} \quad z_2 \neq 0\,.$$

Si escribimos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, obtenemos (9.6) como consecuencia inmediata de la identidad

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\,.$$

La fórmula para $|z_1/z_2|$ se deduce de (9.6) si escribimos z_1 como un producto,

$$z_1 = z_2 \frac{z_1}{z_2}.$$

Si $z = x + iy$, el *complejo conjugado* de z es el número complejo $\bar{z} = x - iy$. Geométricamente, $\bar{z}$ representa el simétrico de z respecto al eje real. La definición de conjugado implica que

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2, \qquad z\bar{z} = |z|^2.$$

Dejamos, como ejercicio, al lector la comprobación de esas propiedades.

Si una ecuación cuadrática con coeficientes reales no tiene raíces reales, sus raíces complejas, dadas por (9.4), son conjugadas. Recíprocamente, si r_1 y r_2 son complejos conjugados, por ejemplo $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, siendo α y β reales, entonces r_1 y r_2 son raíces de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. En efecto, tenemos

$$r_1 + r_2 = 2\alpha \qquad \text{y} \qquad r_1 r_2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

con lo que

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2,$$

y la ecuación cuadrática en cuestión es

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

9.6 Ejercicios

1. Expresar los números complejos siguientes en la forma $a+bi$.
   (a) $(1 + i)^2$.
   (b) $1/i$.
   (c) $1/(1 + i)$.
   (d) $(2 + 3i)(3 - 4i)$.
   (e) $(1 + i)/(1 - 2i)$.
   (f) $i^5 + i^{16}$.
   (g) $1 + i + i^2 + i^3$.
   (h) $\frac{1}{2}(1 + i)(1 + i^{-8})$.
2. Calcular los valores absolutos de los números complejos siguientes.
   (a) $1 + i$.
   (b) $3 + 4i$.
   (c) $(1 + i)/(1 - i)$.
   (d) $1 + i + i^2$.
   (e) $i^7 + i^{10}$.
   (f) $2(1 - i) + 3(2 + i)$.
3. Calcular el módulo y el argumento principal de cada uno de los números complejos siguientes.
   (a) $2i$.
   (b) $-3i$.
   (c) -1.
   (d) 1.

(e) $-3 + \sqrt{3}\,i$.
(f) $(1 + i)/\sqrt{2}$.
(g) $(-1 + i)^3$.
(h) $(-1 - i)^3$.
(i) $1/(1 + i)$.
(j) $1/(1 + i)^2$.

4. En cada caso, determinar todos los números reales x e y que satisfacen la relación dada.
(a) $x + iy = x - iy$.
(b) $x + iy = |x + iy|$.
(c) $|x + iy| = |x - iy|$.
(d) $(x + iy)^2 = (x - iy)^2$.
(e) $\dfrac{x + iy}{x - iy} = x - iy$.
(f) $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$.

5. Construir una representación del conjunto de todos los z del plano complejo que satisfagan cada una de las condiciones siguientes.
(a) $|z| < 1$.
(b) $z + \bar{z} = 1$.
(c) $z - \bar{z} = i$.
(d) $|z - 1| = |z + 1|$.
(e) $|z - i| = |z + i|$.
(f) $z + \bar{z} = |z|^2$.

6. Sea f un polinomio de coeficientes reales.
a) Demostrar que $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ para todo complejo z.
b) Utilizar la parte a) para deducir que los ceros no reales de f (si existen) deben presentarse a pares de complejos conjugados.

7. Probar que no se puede introducir una relación de orden en el sistema de los números complejos de manera que se satisfagan los tres axiomas de orden de la Sección I 3.4.

[*Indicación:* Supóngase que se puede introducir una tal ordenación e intentar decidir si la unidad imaginaria i es positiva o negativa.]

8. Definir la siguiente «seudordenación» entre los números complejos. Si $z = x + iy$, decimos que z es positivo si y sólo si $x > 0$. ¿Cuáles de los axiomas de orden de la Sección I 3.4 se satisfacen con esta definición del número z positivo?

9. Resolver el Ejercicio 8 si la seudordenación se define así: decimos que z es positivo si y sólo si $|z| > 0$.

10. Resolver el Ejercicio 8 si la seudordenación se define así: Si $z = x + iy$, decimos que z es positivo si y sólo si $x > y$.

11. Representar el conjunto de todos los complejos z que satisfacen cada una de las condiciones siguientes.
(a) $|2z + 3| < 1$.
(b) $|z + 1| < |z - 1|$.
(c) $|z - i| \leq |z + i|$.
(d) $|z| \leq |2z + 1|$.

12. Sea $w = (az + b)/(cz + d)$, donde a, b, c y d son reales. Demostrar que

$$w - \bar{w} = (ad - bc)(z - \bar{z})/|cz + d|^2 .$$

Si $ad - bc > 0$, probar que las partes imaginarias de z y w tienen el mismo signo.

9.7 Exponenciales complejas

Queremos ahora extender la definición de e^x de modo que tenga significado cuando x se reemplace por un número complejo cualquiera z. Esta extensión la

deseamos de modo que la ley de exponentes, $e^a e^b = e^{a+b}$, sea válida para cualesquiera complejos a y b. Y, naturalmente, necesitamos que e^z coincida con la exponencial usual cuando z sea real. Existen varios métodos equivalentes para llevar a cabo esa extensión. Antes de establecer la definición de e^z que hemos elegido, daremos una discusión heurística que servirá como punto de partida y motivo para esa definición.

Si escribimos $z = x + iy$, entonces, si la ley de exponentes debe ser válida para números complejos, debe ser

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} .$$

Puesto que e^x ha sido ya definida cuando x es real, nuestro primer objetivo es llegar a una definición plausible de e^{iy} cuando y sea real. Pues bien, si e^{iy} debe ser un número complejo, podemos escribir

$$(9.7) \qquad e^{iy} = A(y) + iB(y) ,$$

en donde A y B son funciones reales que deben determinarse. Derivemos ambos miembros de la ecuación (9.7), suponiendo que A y B sean derivables, y manejando el número complejo i como si fuera un número real. Llegamos entonces a

$$(9.8) \qquad ie^{iy} = A'(y) + iB'(y) .$$

Derivando una vez más, encontramos que

$$-e^{iy} = A''(y) + iB''(y) .$$

Comparando esta ecuación con (9.7) vemos que A y B deben satisfacer las ecuaciones

$$A''(y) = -A(y) \qquad \text{y} \qquad B''(y) = -B(y) .$$

Dicho de otro modo, cada una de las funciones A y B es una solución de la ecuación diferencial $f'' + f = 0$. Con lo dicho en el capítulo 8, podemos asegurar que esta ecuación tiene exactamente una solución con valores iniciales asignados $f(0)$ y $f'(0)$. Si ponemos $y = 0$ en (9.7) y (9.8) y recordamos que $e^0 = 1$, encontramos que A y B tienen los valores iniciales

$$A(0) = 1, \qquad A'(0) = 0, \qquad \text{y} \qquad B(0) = 0, \qquad B'(0) = 1 .$$

Según el teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, debe ser

$$A(y) = \cos y \qquad \text{y} \qquad B(y) = \operatorname{sen} y .$$

En otras palabras, si e^{iy} debe ser un número complejo con las propiedades que acabamos de describir, entonces debemos tener $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Esta discusión da origen a la definición siguiente.

DEFINICIÓN. *Si $z = x + iy$, definimos e^z como el número complejo dado por la ecuación*

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)\,. \tag{9.9}$$

Obsérvese que $e^z = e^x$ cuando $y = 0$; luego esta exponencial coincide con la exponencial ordinaria cuando z es real. Utilizaremos ahora esta definición para deducir la ley de exponentes.

TEOREMA 9.3. *Si a y b son números complejos, tenemos*

$$e^a e^b = e^{a+b}\,. \tag{9.10}$$

Demostración. Escribiendo $a = x + iy$ y $b = u + iv$, tenemos

$$e^a = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \qquad e^b = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v)\,,$$

con lo que

$$e^a e^b = e^x e^u[\cos y \cos v - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} v + i(\cos y \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} y \cos v)]\,.$$

Utilicemos ahora las fórmulas de adición para $\cos(y + v)$ y $\operatorname{sen}(y + v)$ y la ley de exponentes para exponenciales reales, con lo que la ecuación anterior se convierte en

$$e^a e^b = e^{x+u}[\cos(y + v) + i \operatorname{sen}(y + v)]\,. \tag{9.11}$$

Puesto que $a + b = (x + u) + i(y + v)$, el segundo miembro de (9.11) es e^{a+b}. Esto demuestra (9.10).

TEOREMA 9.4. *Todo número complejo $z \neq 0$ puede expresarse en la forma*

$$z = re^{i\theta}, \tag{9.12}$$

en donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) + 2n\pi$, siendo n un entero cualquiera. Esta representación se denomina forma polar de z.

Demostración. Si $z = x + iy$, la representación (9,5) nos da

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)\,,$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) + 2n\pi$, siendo n un entero cualquiera. Pero si tomamos $x = 0$ e $y = \theta$ en (9,9), obtenemos la fórmula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

lo que demuestra (9.12).

La representación de los números complejos en la forma polar (9.12) es muy útil en la multiplicación y división de números complejos. Por ejemplo, si $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ y $z_2 = r_2 e^{i\phi}$, tenemos

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta} r_2 e^{i\phi} = r_1 r_2 e^{i(\theta+\phi)} \tag{9.13}$$

Por consiguiente el producto de los módulos, $r_1 r_2$, es el módulo del producto $z_1 z_2$, de acuerdo con la ecuación (9.6), y la suma de los argumentos, $\theta + \phi$, es un argumento del producto $z_1 z_2$.

Cuando $z = re^{i\theta}$, la aplicación reiterada de (9.13) nos da la fórmula

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta),$$

válida para cualquier entero n no negativo. También es válida para valores negativos de n si definimos z^{-m} como $(z^{-1})^m$ cuando m es entero positivo.

Análogamente, tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\phi}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta-\phi)},$$

con lo que el módulo de z_1/z_2 es r_1/r_2 y la diferencia $\theta - \phi$ es un argumento de z_1/z_2.

9.8 Funciones complejas

Una función f cuyos valores son números complejos se denomina función compleja. Si el dominio de f es un conjunto de números reales, f se llama función compleja de variable real. Si el dominio es un conjunto de números complejos, f es una función compleja de variable compleja. Un ejemplo es la función exponencial, definida por la ecuación

$$f(z) = e^z$$

para todo complejo z. Muchas de las funciones elementales del Cálculo, tales como la exponencial, el logaritmo, y las funciones trigonométricas, pueden extenderse y

convertirse en funciones de variable compleja. (Ver Ejercicios 9 y 10 de la Sección 9.10.) En este marco más amplio con frecuencia aparecen nuevas propiedades e interrelaciones. Por ejemplo, la función exponencial compleja es periódica. En efecto, si $z = x + iy$ y si n es un entero cualquiera, tenemos

$$e^{z+2n\pi i} = e^x[\cos(y + 2n\pi) + i\,\mathrm{sen}(y + 2n\pi)] = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = e^z .$$

Vemos así que $f(z + 2n\pi i) = f(z)$, por lo que f tiene el período $2\pi i$. Esta propiedad de la función exponencial sólo se pone de manifiesto cuando estudiamos la exponencial como función de una variable compleja.

El primer estudio sistemático del Cálculo diferencial e integral con funciones de variable compleja fue hecho por Cauchy a principios del siglo XIX. Desde entonces la teoría se ha desarrollado y convertido en una de las ramas más importantes e interesantes de la Matemática. Se ha convertido en un instrumento indispensable para físicos e ingenieros y tiene conexiones casi con cualquier rama de la Matemática pura. Aquí no se expondrá esta teoría; tan sólo haremos un estudio elemental del cálculo con funciones complejas de variable real.

Supongamos que f es una función compleja definida en un cierto intervalo I de números reales. Para cada x de I, la función $f(x)$ toma un valor complejo, así que podemos escribir

$$f(x) = u(x) + iv(x) ,$$

siendo $u(x)$ y $v(x)$ reales. Esta ecuación determina dos funciones reales u y v llamadas partes real e imaginaria de f respectivamente; escribimos la igualdad de forma breve poniendo $f = u + iv$. Los conceptos de continuidad, derivación e integración de f pueden definirse a través de los conceptos análogos para u y v, como se indica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN. *Si $f = u + iv$, decimos que f es continua en un punto a si las funciones u y v son ambas continuas en ese punto. La derivada de f se define por la igualdad*

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

siempre que ambas derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$ existan. Análogamente, definimos la integral de f, por la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

con tal que existan las integrales del segundo miembro.

A la vista de esta definición, no es sorprendente encontrar que muchos de los teoremas del Cálculo diferencial y del integral sean válidos también para fun-

ciones complejas. Por ejemplo, las reglas de derivación de sumas, productos, y cocientes (teorema 4.1) son válidas para funciones complejas. El primero y el segundo teoremas fundamentales del Cálculo (teoremas 5.1 y 5.3) así como el teorema de la derivada nula (teorema 5.2) también se cumplen con funciones complejas. Para ilustrar con qué facilidad pueden demostrarse esos teoremas, consideremos el teorema de la derivada nula:

Si $f'(x) = 0$ para todo x de un intervalo abierto I, entonces f es constante en I.

Demostración. Pongamos $f = u + iv$. Puesto que $f' = u' + iv'$, la hipótesis $f' = 0$ en I significa que u' y v' son ambas nulas en I. Luego, según el teorema 5.2, u y v son ambas constantes en I. Por tanto f es constante en I.

9.9 Ejemplos de fórmulas de derivación e integración

En esta Sección discutimos un ejemplo importante de función compleja de variable real, la función f definida para todo valor real x por la ecuación

$$f(x) = e^{tx},$$

donde t es un número complejo fijo. Cuando t es real, la derivada de esa función viene dada por la fórmula $f'(x) = te^{tx}$. Demostramos ahora que esta fórmula es también válida para t complejo

TEOREMA 9.5. *Si $f(x) = e^{tx}$ para todo x real y un t complejo fijo, $f'(x) = te^{tx}$.*

Demostración. Pongamos $t = \alpha + i\beta$, siendo α y β reales. De la definición de exponencial compleja resulta

$$f(x) = e^{tx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x .$$

Por consiguiente, las partes real e imaginaria de f vienen dadas por

$$(9.14) \qquad u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \qquad \text{y} \qquad v(x) = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x .$$

Esas funciones son derivables para todo valor de x y sus derivadas son

$$u'(x) = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x , \qquad v'(x) = \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x .$$

Puesto que $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$, tenemos

$$f'(x) = \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + i\beta e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) =$$
$$= (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x} = te^{tx} .$$

Esto completa la demostración.

El teorema 9.5 tiene algunas consecuencias interesantes. Por ejemplo, si adoptamos la notación de Leibniz para las integrales indefinidas, podemos poner el teorema 9.5 en la forma

$$\int e^{tx}\,dx = \frac{e^{tx}}{t} \tag{9.15}$$

cuando $t \neq 0$. Si ponemos $t = \alpha + i\beta$ e igualamos las partes real e imaginaria en la ecuación (9.15), obtenemos las fórmulas de integración

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\,\mathrm{sen}\,\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$$

y

$$\int e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2},$$

que son válidas si α y β no son cero.

Otra consecuencia del teorema 9.5 es la conexión entre exponenciales complejas y ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

TEOREMA 9.6. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{9.16}$$

en la que a y b son constantes reales. Las partes real e imaginaria de la función f definida en $(-\infty, +\infty)$ *por la ecuación* $f(x) = e^{tx}$ *son soluciones de la ecuación diferencial* (9.16) *si y sólo si t es una raíz de la ecuación característica*

$$t^2 + at + b = 0.$$

Demostración. Sea $L(y) = y'' + ay' + by$. Puesto que $f'(x) = te^{tx}$, también tenemos $f''(x) = t^2e^{tx}$, con lo que $L(f) = e^{tx}(t^2 + at + b)$. Pero e^{tx} nunca es cero ya que $e^{tx}e^{-tx} = e^0 = 1$. Luego, $L(f) = 0$ si y sólo si $t^2 + at + b = 0$. Pero si escribimos $f = u + iv$, encontramos $L(f) = L(u) + iL(v)$, y por tanto $L(f) = 0$ si y sólo si $L(u) = 0$ y $L(v) = 0$. Esto completa la demostración.

Nota: Si $t = \alpha + i\beta$, las partes real e imaginaria de f vienen dadas por (9.14). Si la ecuación característica tiene dos raíces distintas, reales o complejas, la combinación lineal

$$y = c_1u(x) + c_2v(x)$$

es la solución general de la ecuación diferencial. Esto está de acuerdo con los resultados demostrados en el teorema 8.7.

En los Ejercicios que siguen se discuten otros ejemplos de funciones complejas.

9.10 Ejercicios

1. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

(a) $e^{\pi i/2}$.
(b) $2e^{-\pi i/2}$.
(c) $3e^{\pi i}$.
(d) $-e^{-\pi i}$.
(e) $i + e^{2\pi i}$.
(f) $e^{\pi i/4}$.
(g) $e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}$.
(h) $\dfrac{1 - e^{\pi i/2}}{1 + e^{\pi i/2}}$.

2. En cada caso, hallar todos los valores de x e y que satisfacen la relación dada.

(a) $x + iy = xe^{iy}$.
(b) $x + iy = ye^{ix}$.
(c) $e^{x+iy} = -1$.
(d) $\dfrac{1 + i}{1 - i} = xe^{iy}$.

3. a) Probar que $e^z \neq 0$ para todo complejo z.
b) Hallar todos los complejos z para los que $e^z = 1$.
4. a) Si θ es real, demostrar que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

b) Usar las fórmulas del apartado a) para deducir las identidades

$$\cos^2 \theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

5. a) Demostrar el *Teorema de Moivre,*

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta ,$$

válido para todo valor real θ y todo entero n positivo.
b) Hacer $n = 3$ en la parte a) y deducir las identidades trigonométricas.

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta, \qquad \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta .$$

6. Demostrar que toda suma trigonométrica de la forma

$$S_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

puede expresarse como suma de exponenciales complejas,

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

donde $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Determinar las correspondientes fórmulas para c_{-k}.

7. Si m y n son enteros, demostrar que

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi & \text{si } m = n. \end{cases}$$

b) Utilizar el apartado a) para deducir las relaciones de ortogonalidad para el seno y el coseno (m y n son enteros, $m^2 \neq n^2$):

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi \qquad \text{si} \quad n \neq 0.$$

8. Dado un número complejo $z \neq 0$. Poner $z = re^{i\theta}$, en donde $\theta = \arg(z)$. Sean $z_1 = Re^{i\alpha}$, en donde $R = r^{1/n}$ y $\alpha = \theta/n$, y $\epsilon = e^{2\pi i/n}$, siendo n entero positivo.
a) Demostrar que $z_1^n = z$; esto es, z_1 es una raíz n-ésima de z.
b) Demostrar que z tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas,

$$z_1, \epsilon z_1, \epsilon^2 z_1, \ldots, \epsilon^{n-1} z_1,$$

y que están situadas sobre una circunferencia de radio R como los vértices de un polígono regular.
c) Determinar las tres raíces cúbicas de i.
d) Determinar las cuatro raíces cuartas de i.
e) Determinar las cuatro raíces cuartas de $-i$.

9. Las definiciones de las funciones seno y coseno pueden ampliarse al plano complejo como sigue:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Cuando z es real, esas fórmulas coinciden con las funciones seno y coseno ordinarias. (Ver Ejercicio 4.) Utilizar esas fórmulas para deducir las siguientes propiedades del seno y del coseno complejos. Aquí u, v y z representan números complejos, siendo $z = x + iy$.

(a) $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$.
(b) $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$.
(c) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
(d) $\cos(iy) = \cosh y$, $\quad \operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senh} y$.
(e) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
(f) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$.

10. Si z es un número complejo no nulo, definimos $\operatorname{Log} z$, el logaritmo complejo de z, por la ecuación

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \arg(z) .$$

Cuando z es real y positivo, esta fórmula coincide con el logaritmo ordinario. Emplear esa fórmula para deducir las propiedades siguientes de los logaritmos complejos.

(a) $\operatorname{Log}(-1) = \pi i, \qquad \operatorname{Log}(i) = \pi i/2.$
(b) $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2n\pi i,$ donde n es un entero
(c) $\operatorname{Log}(z_1/z_2) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 + 2n\pi i,$ donde n es un entero
(d) $e^{\operatorname{Log} z} = z.$

11. Si w y z son números complejos, $z \neq 0$, definimos z^w por medio de la ecuación

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z},$$

en donde $\operatorname{Log} z$ está definido como en el Ejercicio 10.
a) Calcular 1^i, i^i , y $(-1)^i$.
b) Demostrar que $z^a z^b = z^{a+b}$ si a, b y z son complejos. $z \neq 0$.
c) Obsérvese que la ecuación

$$(9.17) \qquad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w$$

no se satisface cuando $z_1 = z_2 = -1$ y $w = i$. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir z_1 y z_2 para asegurar que la ecuación (9.17) es válida para todo complejo w?

En los Ejercicios del 12 al 15, L representa el operador lineal definido por $L(y) = y'' + ay' + by$, siendo a y b constantes reales.

12. Demostrar que si R es una función compleja, por ejemplo $R(x) = P(x) + iQ(x)$, entonces una función compleja $f(x) = u(x) + iv(x)$ satisface la ecuación diferencial $L(y) = R(x)$ en un intervalo I si y sólo si u y v satisfacen las ecuaciones $L(u) = P(x)$ y $L(v) = Q(x)$ en I.
13. Si A es complejo y ω es real, demostrar que la ecuación diferencial $L(y) = Ae^{i\omega x}$ tiene soluciones complejas de la forma $y = Be^{i\omega x}$, con tal que $b \neq \omega^2$ o $a\omega \neq 0$. Expresar el número complejo B en función de a, b, A, y ω.
14. Suponer que c es real y $b \neq \omega^2$. Usar los resultados del Ejercicio 13 para demostrar que la ecuación diferencial $L(y) = c \cos \omega x$ tiene una solución particular de la forma $y = A \cos(\omega x + \alpha)$, donde

$$A = \frac{c}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \qquad \text{y} \qquad \tan \alpha = \frac{a\omega}{b - \omega^2}.$$

15. Suponer que c es real y $b \neq \omega^2$. Demostrar que la ecuación diferencial $L(y) = c \operatorname{sen} \omega x$ tiene una solución particular de la forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$ y expresar A y α en función de a, b, c y ω.

10

SUCESIONES, SERIES, INTEGRALES IMPROPIAS

10.1 La paradoja de Zenón

En este capítulo se estudian unos problemas en parte planteados hace unos 2400 años, cuando el filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a. de C.) precipitó una crisis en la Matemática antigua estableciendo algunas paradojas ingeniosas. Una de ellas, llamada frecuentemente la *paradoja del corredor* se puede exponer de la manera siguiente:

> Un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que correr la otra mitad. Cuando haya recorrido la mitad de ésta, le quedará todavía la cuarta parte, cuando haya corrido la mitad de esta cuarta parte, le quedará la octava parte y así sucesiva e *indefinidamente.*

Zenón pensó, evidentemente, en una situación ideal en la que el corredor es una partícula o punto que se mueve de un extremo a otro de un segmento de recta. Para analizar el razonamiento de Zenón con más detalle se supone que el corredor parte del punto marcado con 1 en la figura 10.1 y corre hacia la meta marcada con 0. Las posiciones indicadas por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, . . . , etc., señalan la fracción de carrera que se ha de correr todavía cuando se alcanza el punto marcado. Estas fracciones (cada una de las cuales es la mitad de la anterior) subdividen todo el trayecto en un número indefinido de partes cada vez más pequeñas. Puesto que para recorrer por separado cada una de estas partes se necesita una cantidad positiva de tiempo, parece natural afirmar que el tiempo necesario para el trayecto total ha de ser la suma total de todas estas cantidades de tiempo. Decir que el corredor nunca puede alcanzar la meta equivale a decir que nunca llega a ella en un tiempo finito; o, dicho de otro modo, que la suma de un número infinito de intervalos positivos de tiempo no puede ser finita.

La afirmación de Zenón de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita, fue contradicha 2000 años más tarde

con la creación de la teoría de las series infinitas. En los siglos XVII y XVIII algunos matemáticos empezaron a pensar que era posible extender la idea de suma ordinaria de conjuntos *finitos* de números a conjuntos *infinitos,* de manera que en algunos casos la «suma» de un conjunto de infinitos números sea finita. Para ver cómo se puede hacer esta extensión y tener una idea de las dificultades que pueden presentarse para ello, conviene analizar la paradoja de Zenón con más detalle.

Supóngase que el corredor antes mencionado, corre a *velocidad* constante y que necesita T minutos para la primera mitad del recorrido. Para el siguiente cuarto de recorrido necesitará $T/2$ minutos, para el octavo siguiente $T/4$ minutos y en general para la parte comprendida entre $1/2^n$ y $1/2^{n+1}$ necesitará $T/2^n$ minutos. La «suma» de todos estos intervalos se puede indicar simbólicamente escribiendo la siguiente expresión:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots. \tag{10.1}$$

Éste es un ejemplo de las llamadas *series infinitas* y el problema aquí está en decidir si es posible encontrar una forma natural de asignarle un número que se pueda llamar *suma* de la serie.

La experiencia física dice que el corredor que corre a velocidad constante alcanzará su meta en un tiempo doble del que necesitaba para alcanzar su punto

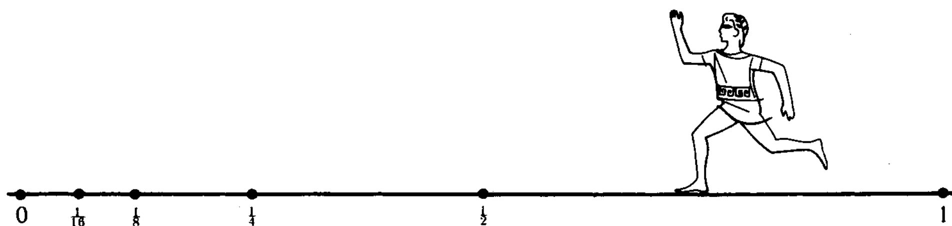


FIGURA 10.1 *La paradoja de Zenón.*

medio. Puesto que necesita T minutos para la mitad del recorrido, había de emplear $2T$ minutos para el recorrido completo. Este razonamiento sugiere que se debe asignar la «suma» $2T$ a la serie en (10.1) esperando que la igualdad

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = 2T \tag{10.2}$$

pueda ser «válida» en algún sentido.

La teoría de las series infinitas precisa cómo se ha de interpretar esta igualdad. La idea es la siguiente: Primero se suman un *número finito* de términos, los n primeros, indicando esta suma por s_n. Así se tiene:

$$s_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^{n-1}}. \tag{10.3}$$

y esta suma se denomina *suma parcial* n-sima. Se estudia después el comportamiento de s_n cuando n toma valores cada vez más grandes. En particular se trata de determinar si las sumas parciales s_n tienden a un límite finito cuando n crece indefinidamente.

En este caso es fácil ver que el valor límite de las sumas parciales es $2T$. En efecto, calculando algunas de estas sumas parciales se tiene:

$$s_1 = T, \qquad s_2 = T + \frac{T}{2} = \frac{3}{2}T, \qquad s_3 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} = \frac{7}{4}T,$$

$$s_4 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{15}{8}T.$$

Se observa que estos resultados se pueden expresar como sigue:

$$s_1 = (2 - 1)T, \qquad s_2 = (2 - \tfrac{1}{2})T, \qquad s_3 = (2 - \tfrac{1}{4})T, \qquad s_4 = (2 - \tfrac{1}{8})T.$$

lo cual conduce a pensar en una fórmula general de la forma:

$$s_n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)T \quad \text{para todo entero positivo } n. \tag{10.4}$$

La fórmula (10.4) se comprueba fácilmente por inducción. Puesto que $1/2^{n-1} \to 0$ cuando n crece indefinidamente, resulta $s_n \to 2T$. Por tanto, la igualdad (10.2) es «cierta» si se interpreta que $2T$ es el *límite* de las sumas parciales s_n. Este proceso de límite parece invalidar la objeción de Zenón que la suma de un número infinito de intervalos de tiempo no puede ser nunca finita.

Ahora daremos un argumento que proporciona un apoyo considerable al punto de vista de Zenón. Supongamos que en el anterior análisis de la paradoja del corredor se hace un pequeño pero importante cambio. En vez de considerar la velocidad constante, supóngase que decrece gradualmente de manera que necesita T minutos para ir de 1 a $1/2$, $T/2$ para ir de $1/2$ a $1/4$, $T/3$ minutos para ir de $1/4$ a $1/8$, y en general T/n minutos para ir de $1/2^{n-1}$ a $1/2^n$.

El «tiempo total» que necesitará para la carrera, vendrá ahora representado por la siguiente serie infinita:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \cdots + \frac{T}{n} + \cdots. \tag{10.5}$$

En este caso, la experiencia física no sugiere ninguna «suma» obvia o natural para asignar a dicha serie y por tanto este ejemplo hay que estudiarlo desde un punto de vista completamente matemático.

Igual que antes, se introducen las sumas parciales s_n; es decir:

$$s_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \cdots + \frac{T}{n}. \tag{10.6}$$

y se trata de ver qué ocurre a s_n cuando n crece indefinidamente. Esta suma parcial no es tan fácil de estudiar como la de (10.3), pues no existe una fórmula análoga a la (10.4) que simplifique la expresión del segundo miembro de (10.6). Sin embargo, por comparación de estas sumas parciales con una integral apropiada se puede ver que toman valores tan grandes como se quiera.

En la figura 10.2 se ve parte de la hipérbola $f(x) = 1/x$ para $x > 0$. (En el eje y se ha modificado la escala.) Los rectángulos dibujados, tienen un área total igual a la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{10.7}$$

El área de la región determinada por la hipérbola y el intervalo $[1, n + 1]$ es $\int_1^{n+1} x^{-1}\, dx = \log(n + 1)$, y puesto que esta área no puede exceder la suma de las áreas de los rectángulos, se tiene la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \log(n + 1). \tag{10.8}$$

Multiplicando ambos miembros por T se obtiene $s_n \geq T \log(n + 1)$. Es decir, si la velocidad del corredor decrece tal como se ha indicado anteriormente, el tiempo necesario para alcanzar el punto $1/2^n$ es por lo menos $T \log(n + 1)$ minutos. Puesto que $\log(n + 1)$ al crecer n toma valores tan grandes como se quiera, se cumple en este caso la paradoja de Zenón, es decir que el corredor no alcanzará la meta en un tiempo finito.

La teoría general de series infinitas hace una distinción entre series como (10.1) cuyas sumas parciales tienden a un límite finito, y series como (10.5) cuyas sumas parciales no tienen límite finito. Las primeras se denominan *convergentes*

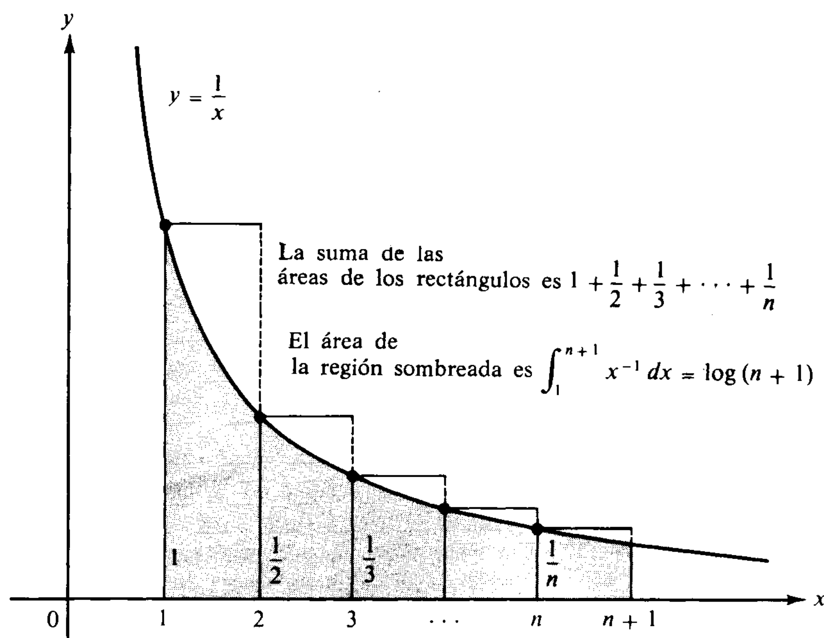


FIGURA 10.2 *Significado geométrico de la desigualdad* $1 + 1/2 + \cdots + 1/n \geq \log(n + 1)$.

y las segundas *divergentes*. Los primeros investigadores en este dominio ponían poca o ninguna atención en las cuestiones de convergencia y divergencia. Trataban las series infinitas como si fueran sumas ordinarias finitas, sujetas a las leyes usuales del Álgebra sin tener en cuenta que estas leyes no pueden extenderse universalmente a las series infinitas. Por eso no es sorprendente que se haya visto más tarde que algunos de los primeros resultados obtenidos fueran incorrectos. Afortunadamente, muchos de aquellos pioneros tenían una intuición y destreza poco frecuentes, que les evitaba llegar a conclusiones falsas, aunque ellos no pudieran justificar sus métodos. Entre los primeros matemáticos que se ocuparon de las series ocupa un lugar preeminente Leonard Euler. Euler descubría fórmula tras fórmula, a cual más interesante, y a la vez utilizaba las series infinitas como concepto unificador de diversas ramas de la Matemática que hasta entonces estaban sin relacionar. La gran cantidad de trabajos de Euler que han sobrevivido al paso del tiempo es un tributo a su notabilísimo instinto de lo matemáticamente correcto.

La extensión del uso de las series infinitas empezó más tarde en el siglo XVII, cerca de cincuenta años después del nacimiento de Euler, coincidiendo con el principio del desarrollo del Cálculo integral Nicholas Mercator (1620-1687) y William Brouncker (1620-1684) descubrieron en 1668 una serie infinita para

el logaritmo al intentar calcular el área de un segmento hiperbólico. Poco después, Newton descubrió la *serie binómica.* Estos descubrimientos constituyen un punto fundamental de la historia de la Matemática. Un caso particular de la serie binómica es el conocido *teorema del binomio* que afirma que:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k ,$$

donde x es un número real arbitrario, n un entero no negativo, y $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial. Newton encontró que esta fórmula, válida para valores *enteros* de n se podía extender a exponentes *reales* cualesquiera, sustituyendo la suma finita del segundo miembro, por una serie finita conveniente, si bien no lo demostró. Efectivamente, en un estudio cuidadoso de la serie binomial surgen algunas cuestiones bastante delicadas de convergencia a las que no se podía responder en la época de Newton.

Poco después de la muerte de Euler en 1783, el caudal de nuevos descubrimientos empezó a disminuir y el período formal en la historia de las series llegó a su término. Un nuevo período, y más crítico, empezó en 1812 cuando Gauss publicó la célebre memoria que contenía, por primera vez en la historia, un estudio riguroso de la convergencia de algunas series infinitas. Pocos años más tarde, Cauchy introdujo una definición analítica del concepto de límite en su tratado *Curso de Análisis algebraico* (publicado en 1821), y expuso los fundamentos de la teoría moderna de convergencia y divergencia. En la Sección que sigue se expondrán los rudimentos de esta teoría.

10.2 Sucesiones

En el lenguaje corriente las palabras «serie» y «sucesión» son sinónimas y se utilizan para designar un conjunto de cosas o sucesos dispuestos en un orden. En Matemática, estas palabras tienen un significado técnico especial. La palabra «sucesión» tiene un sentido análogo al del lenguaje corriente, pues con ella se quiere indicar un conjunto de objetos puestos en orden, pero la palabra «serie» se usa en un sentido completamente distinto. Aquí se estudiará el concepto de sucesión dejando el de serie para definirlo más tarde en el apartado 10.5.

Si a cada entero positivo n está asociado un número real a_n, entonces se dice que el conjunto ordenado

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$$

define una sucesión infinita. Cada término de la sucesión tiene asignado un entero positivo, de manera que se puede hablar del *primer término* a_1, del *segundo término* a_2 y en general del *término n-simo* a_n. Cada término a_n tiene un siguiente a_{n+1} y por tanto no hay un «último» término.

Los ejemplos más corrientes de sucesiones se pueden construir dando alguna regla o fórmula que defina el término n-simo. Así, por ejemplo, la fórmula $a_n = 1/n$ define la sucesión cuyos cinco primeros términos son:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}.$$

Algunas veces se necesitan dos o más fórmulas, por ejemplo:

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = 2n^2,$$

siendo en este caso los primeros términos:

$$1, 2, 1, 8, 1, 18, 1, 32, 1.$$

Otra forma corriente de definir una sucesión es mediante un conjunto de instrucciones que indican cómo se obtiene un término a partir de los anteriores. Así, se tiene por ejemplo:

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Este método particular se conoce por fórmula de *recurrencia* y define una sucesión famosa llamada de *Fibonacci.* * Los primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.$$

En toda sucesión lo esencial es que existe una función f definida en los enteros positivos, tal que $f(n)$ es el término n-simo de la sucesión para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ Efectivamente, éste es el camino más conveniente para establecer una definición técnica de sucesión.

DEFINICIÓN. *Una función f cuyo dominio es el conjunto de todos los enteros positivos* 1, 2, 3, ... *se denomina sucesión infinita. El valor $f(n)$ de la función se denomina el término n-simo de la sucesión.*

El *recorrido* de la función (es decir, el conjunto de valores de la función) se pone muchas veces de manifiesto, escribiendo los términos en orden. Así:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots.$$

* Fibonacci, conocido también por Leonardo de Pisa (1175-1250), encontró esta sucesión al tratar un problema relativo a los procesos hereditarios en los conejos.

Por razones de brevedad se utiliza la notación $\{f(n)\}$ para indicar la sucesión cuyo término n-simo en $f(n)$. Con mucha frecuencia la dependencia de n se indica utilizando subíndices, y se escribe a_n, s_n, x_n, u_n, o notación análoga en vez de $f(n)$.

La cuestión que se quiere considerar, es decidir si los términos $f(n)$ tienden o no a un límite finito cuando n crece indefinidamente. Para ello, se precisa extender el concepto de límite a las sucesiones, lo que se logra con la definición siguiente.

DEFINICIÓN. *Una sucesión $\{f(n)\}$ tiene límite L si, para cada número positivo ϵ, existe otro número positivo N (que en general depende de ϵ) tal que*

$$|f(n) - L| < \epsilon \text{ para todo } n \geq N .$$

En este caso, decimos que la sucesión $\{f(n)\}$ converge hacia L y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L, \qquad \text{o} \qquad f(n) \to L \quad \text{o} \quad n \to \infty .$$

Una sucesión que no converge se llama divergente.

En esta definición los valores de la función $f(n)$ y el límite L pueden ser números reales o complejos. Si f y L son complejos, pueden descomponerse en su parte real e imaginaria, sean éstas $f = u + iv$ y $L = a + ib$. Entonces tenemos $f(n) - L = u(n) - a + i[v(n) - b]$. Las desigualdades

$$|u(n) - a| \leq |f(n) - L| \qquad \text{y} \qquad |v(n) - b| \leq |f(n) - L|$$

prueban que la relación $f(n) \to L$ implica que $u(n) \to a$ y $v(n) \to b$ cuando $n \to \infty$. Recíprocamente, la desigualdad

$$|f(n) - L| \leq |u(n) - a| + |v(n) - b|$$

demuestra que las dos relaciones $u(n) \to a$ y $v(n) \to b$ implican $f(n) \to L$ cuando $n \to \infty$. Dicho de otro modo, una sucesión compleja f converge si y sólo si la parte real u y la parte imaginaria v convergen separadamente, en cuyo caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} u(n) + i \lim_{n\to\infty} v(n) .$$

Es claro, que toda función definida para todos los números x reales y positivos puede servir para construir una sucesión restringiendo x a tomar sólo valores *enteros*. Esto explica la gran analogía entre la definición que se acaba de dar

y la Sección 7.14 para funciones más generales. La analogía se presenta también en los *límites infinitos* y se deja al lector el definir los símbolos

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty$$

como se hizo en la Sección 7.15 cuando f es de valores reales. Si f es compleja, escribimos $f(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ si $|f(n)| \to +\infty$.

La frase «sucesión convergente» se emplea sólo para sucesiones cuyo límite es *finito*. Sucesiones con límite $+\infty$ o $-\infty$ se dice que son divergentes. Las fórmulas que siguen definen algunas sucesiones.

$$f(n) = (-1)^n, \qquad f(n) = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}, \qquad f(n) = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad f(n) = e^{\pi i n/2}.$$

Las reglas básicas para límites de sumas, productos, etc., son válidas también para límites de sucesiones convergentes. El lector no encontrará dificultad en la formulación de dichos teoremas, y sus demostraciones se hacen en forma análoga a las de la Sección 3.5.

La convergencia o divergencia de muchas sucesiones se pueden determinar utilizando propiedades de funciones conocidas que están definidas para todo x positivo. Se dan a continuación algunos ejemplos importantes cuyos límites se pueden encontrar directamente o utilizando algunos de los resultados deducidos en el capítulo 7.

(10.9) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{si} \quad \alpha > 0.$$

(10.10) $$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{si} \quad |x| < 1.$$

(10.11) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b} = 0 \text{ para todo } a > 0,\ b > 0.$$

(10.12) $$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

(10.13) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \qquad \text{para todo real } a.$$

10.3 Sucesiones monótonas de números reales

Una sucesión $\{f(n)\}$ se dice que es *creciente* si

$$f(n) \le f(n+1) \text{ para todo } n \ge 1.$$

Esto se indica brevemente escribiendo $f(n)\nearrow$. Por otra parte, si se tiene:

$$f(n) \geq f(n+1) \qquad \text{para todo } n \geq 1 ,$$

se dice que la sucesión es *decreciente* y se escribe $f(n)\searrow$. Una sucesión se llama monótona cuando es creciente o decreciente.

Es cómodo trabajar con sucesiones monótonas pues su convergencia o divergencia se puede determinar fácilmente. En efecto, se tiene el sencillo criterio siguiente.

TEOREMA 10.1. *Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.*

Nota: Una sucesión $\{f(n)\}$ se dice que está *acotada* si existe un número positivo M tal que $|f(n)| \leq M$ para todo n. Una sucesión que no está acotada se denomina *no acotada*

Demostración. Es claro que una sucesión no acotada no puede converger, por tanto se ha de demostrar solamente que una sucesión monótona y acotada converge.

Supuesto $f(n)\nearrow$ sea L el extremo superior del conjunto de valores de la función. (Puesto que la sucesión está acotada, en virtud del axioma 10 del conjunto de los números reales, tiene un extremo superior.) Entonces $f(n) \leq L$



FIGURA 10.3 *Una sucesión creciente acotada converge hacia su extremo superior.*

para todo n, y se trata de probar que la sucesión converge hacia L.

Sea ϵ un número positivo arbitrario. Como $L - \epsilon$ no puede ser una cota superior de *todos* los números $f(n)$ ha de ser $L - \epsilon < f(N)$ para algún N (este N depende de ϵ). Puesto que $f(n)\nearrow$, si $n \geq N$ es $f(N) \leq f(n)$, por tanto, $L - \epsilon < f(n) \leq L$ para todo $n \geq N$, como se ve en la figura 10.3. De estas desigualdades se deduce:

$$0 \leq L - f(n) < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N$$

lo que significa que la sucesión converge hacia L, como se quería demostrar.

Si $f(n)\searrow$ la demostración es análoga, siendo en este caso el límite el extremo inferior de los valores de la función.

10.4 Ejercicios

En los Ejercicios 1 al 22, se define una sucesión $\{f(n)\}$ por la fórmula dada. En cada caso, (a) determinar si la sucesión converge o diverge, y (b) hallar el límite de cada sucesión convergente. En algunos casos puede ser útil sustituir el entero n por un número real positivo arbitrario x y estudiar la función de x resultante por los métodos del capítulo 7. Se pueden aplicar las fórmulas (10.9) a (10.13) dadas al final del apartado 10.2.

1. $f(n) = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}.$

2. $f(n) = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}.$

3. $f(n) = \cos \dfrac{n\pi}{2}.$

4. $f(n) = \dfrac{n^2+3n-2}{5n^2}.$

5. $f(n) = \dfrac{n}{2^n}.$

6. $f(n) = 1 + (-1)^n.$

7. $f(n) = \dfrac{1+(-1)^n}{n}.$

8. $f(n) = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}.$

9. $f(n) = 2^{1/n}.$

10. $f(n) = n^{(-1)^n}.$

11. $f(n) = \dfrac{n^{2/3}\,\mathrm{sen}\,(n!)}{n+1}.$

12. $f(n) = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}.$

13. $f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$

14. $f(n) = na^n,$ donde $|a| < 1.$

15. $f(n) = \dfrac{\log_a n}{n}, \quad a > 1.$

16. $f(n) = \dfrac{100\,000n}{1+n^2}.$

17. $f(n) = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n.$

18. $f(n) = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}.$

19. $f(n) = \left(1 + \dfrac{i}{2}\right)^n.$

20. $f(n) = e^{-\pi i n/2}.$

21. $f(n) = \dfrac{1}{n}e^{-\pi i n/2}.$

22. $f(n) = ne^{-\pi i n/2}.$

Las sucesiones $\{a_n\}$ de los Ejercicios del 23 al 28 son todas convergentes. Por tanto, para cada $\epsilon > 0$ prefijado existe un entero N (que depende de ϵ), tal que $|a_n - L| < \epsilon$ si $n \geq N$ siendo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Determinar en cada caso el valor de N que corresponde a los siguientes valores de ϵ: $\epsilon = 1$; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

23. $a_n = \dfrac{1}{n}.$

24. $a_n = \dfrac{n}{n+1}.$

25. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}.$

26. $a_n = \dfrac{1}{n!}.$

27. $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}.$

28. $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{9}{10}\right)^n.$

29. Demostrar que una sucesión no puede converger hacia dos límites distintos.
30. Supuesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Aplicando la definición de límite demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$.
31. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ aplicando la definición de límite demostrar que $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$ y $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA$ donde c es una constante.
32. Partiendo de los resultados obtenidos en 30 y 31 demostrar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ es $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = A^2$. Después, haciendo uso de la identidad $2a_nb_n = (a_n + b_n)^2 - a_n^2 - b_n^2$ demostrar que $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = AB$ si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.
33. Si α es un número real y n un entero no negativo, el coeficiente binomial $\binom{\alpha}{n}$ está definido por:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}.$$

(a) Si $\alpha = -\frac{1}{2}$, probar que:

$$\binom{\alpha}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{3}{8}, \quad \binom{\alpha}{3} = -\frac{5}{16}, \quad \binom{\alpha}{4} = \frac{35}{128}, \quad \binom{\alpha}{5} = -\frac{63}{256}.$$

(b) Sea $a_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n}$. Probar que $a_n > 0$ y que $a_{n+1} < a_n$.

34. Sea f una función real monótona creciente y acotada en el intervalo $[0, 1]$. Definamos dos sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ del siguiente modo:

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) Demostrar que $s_n \le \int_0^1 f(x)\,dx \le t_n$ y que $0 \le \int_0^1 f(x)\,dx - s_n \le \dfrac{f(1) - f(0)}{n}$.

b) Demostrar que las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen ambas hacia el límite $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Establecer y demostrar un resultado correspondiente al intervalo [a, b].

35. Utilizar el ejercicio 34 para establecer las siguientes relaciones:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n + k} = \log 2.$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \log(1 + \sqrt{2}).$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi}.$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2}.$

10.5 Series infinitas

A partir de una sucesión de números reales, se puede formar una *nueva* sucesión sumando los términos sucesivamente. Así, si la sucesión dada tiene los términos:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

se forma la sucesión de las «sumas parciales»:

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

y así sucesivamente, estando definida la suma parcial de los n primeros términos como sigue:

(10.14) $$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

La sucesión $\{s_n\}$ de las sumas parciales se llama *serie infinita* o simplemente *serie,* y se indica también por los símbolos siguientes:

(10.15) $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ representa la sucesión $\{s_n\}$ para la cual:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

En los símbolos de (10.15) se quiere recordar que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ se obtiene de la sucesión $\{a_n\}$ por adición de términos sucesivos.

Si existe un número real S tal que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es *convergente* y tiene *suma S* en cuyo caso se escribe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S .$$

Si $\{s_n\}$ diverge se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge* y no tiene suma.

EJEMPLO 1. SERIE ARMÓNICA. En la discusión de la paradoja de Zenón se vio que las sumas parciales s_n de las series $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ satisfacen la desigualdad:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1) .$$

Puesto que $\log(n+1) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ lo mismo ocurre con s_n y por tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ es divergente. La serie se denomina *serie armónica.*

EJEMPLO 2. En la discusión de la paradoja de Zenón se hallaron también las sumas parciales de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ dadas por la fórmula:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

que se demuestra fácilmente por inducción. Cuando $n \to \infty$ estas sumas parciales tienden al límite 2; por tanto, la serie converge y tiene de suma 2. Se puede indicar esto escribiendo:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots = 2 . \tag{10.16}$$

El lector ha de tener en cuenta que aquí la palabra «suma» se usa en un sentido muy especial. La suma de une serie convergente no se obtiene por una adición ordinaria, sino como el *límite de una sucesión de sumas parciales.* También notará el lector que para las series convergentes el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se utiliza para indicar tanto la *serie* como su *suma* a pesar de ser cosas conceptualmente distintas. La suma representa un *número* y por tanto no puede ser ni convergente ni divergente. Una vez hecha la distinción entre una serie y su suma, el uso de un solo símbolo para representar ambas cosas no da lugar a confusión.

Como en el caso de la notación sumación finita, la letra k usada en el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es un «índice ficticio» que se puede sustituir por otro símbolo conveniente y se usan comúnmente las letras m, n, y r. Muchas veces se empieza la suma en $k = 0$ ó $k = 2$ o en cualquier otro valor de k. Así, por ejemplo, la serie en (10.16) podría escribirse $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k$. En general, si $p \geq 0$ se define el símbolo $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ dándole el significado de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, donde $b_k = a_{p+k-1}$. Así $b_1 = a_p$, $b_2 = a_{p+1}$, etc. Cuando no hay peligro de confusión o cuando el punto de partida carece de importancia, se escribe $\sum a_k$ en vez de $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$.

Es fácil probar que las dos series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ son ambas convergentes o ambas divergentes. Sea $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{p+n-1}$.

Si $p = 0$ se tiene $t_{n+1} = a_0 + s_n$ y si $s_n \to S$ cuando $n \to \infty$, entonces $t_n \to \to a_0 + S$ y recíprocamente, si $t_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces $s_n \to T - a_0$. Por tanto, ambas series convergen o divergen cuando $p = 0$. Lo mismo vale si $p \geq 1$. Para $p = 1$, se tiene $s_n = t_n$ y para $p > 1$ se tiene $t_n = s_{n+p-1} - s_{p-1}$, y por tanto se tiene una vez más que ambas series o convergen o divergen. Esto se expresa diciendo que se pueden suprimir o agregar unos cuantos términos al principio de una serie sin que altere su convergencia o divergencia.

10.6 Propiedad de linealidad de las series convergentes

Las sumas finitas ordinarias tienen las propiedades importantes siguientes:

(10.17) $$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{(propiedad aditiva)}$$

y

(10.18) $$\sum_{k=1}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{(propiedad homogénea).}$$

El teorema que sigue da una extensión natural de esta propiedad a las series infinitas convergentes y con ello se justifican muchas operaciones algebraicas efectuadas con las series convergentes tratándolas como si fueran sumas ordinarias. Aditividad y homogeneidad se pueden combinar en una sola propiedad llamada *linealidad* y que se puede expresar como sigue:

TEOREMA 10.2. *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series infinitas convergentes de términos complejos y sean α y β constantes complejas. Entonces la serie $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ también converge, y su suma viene dada por*

(10.19) $$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Demostración. Teniendo en cuenta (10.17) y (10.18) se puede escribir

(10.20) $$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k .$$

Cuando $n \to \infty$, el primer término del segundo miembro de (10.20) tiende a $\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y el segundo a $\beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$; por tanto, el primer miembro tiende a su suma, y esto prueba que la serie $\sum (\alpha a_k + \beta b_k)$ converge hacia la suma indicada por (10.19).

El teorema 10.2 tiene un corolario interesante que se usa con frecuencia para establecer la divergencia de una serie.

TEOREMA 10.3. *Si $\sum a_n$ converge y si $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum (a_n + b_n)$ diverge.*

Demostración. Puesto que $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ y puesto que $\sum a_n$ converge, el teorema 10.2 dice que la convergencia de $\sum (a_n + b_n)$ implica la convergencia de $\sum b_n$. Por tanto, $\sum (a_n + b_n)$ no puede converger si $\sum b_n$ diverge.

EJEMPLO. La serie $\sum (1/k + 1/2^k)$ diverge puesto que $\sum 1/k$ diverge y $\sum 1/2^k$ converge.

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas divergentes, la serie $\sum (a_n + b_n)$ puede converger o no. Por ejemplo, cuando $a_n = b_n = 1$ para todo n, la serie $\sum (a_n + b_n)$ diverge, pero cuando $a_n = 1$ y $b_n = -1$ para todo n, entonces $\sum (a_n + b_n)$ converge.

10.7 Series telescópicas

Otra propiedad importante de las sumas finitas es la llamada propiedad telescópica que afirma que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}\,. \tag{10.21}$$

Cuando se quiere extender esta propiedad a las series infinitas se han de considerar aquellas series $\sum a_n$ tales que cada término se pueda expresar como una diferencia de forma:

$$a_n = b_n - b_{n+1}\,. \tag{10.22}$$

Estas series se denominan *series telescópicas* y su comportamiento está caracterizado por el siguiente teorema:

TEOREMA 10.4. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que*

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad \textit{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{10.23}$$

Entonces la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L\,, \qquad \text{donde} \quad L = \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{10.24}$$

Demostración. Sea s_n la suma parcial n-sima de $\sum a_n$. Entonces se tiene, en virtud de (10.21):

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

Por tanto las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas convergen o ambas divergen, y además si $b_n \to L$ cuando $n \to \infty$ entonces $s_n \to b_1 - L$, lo cual demuestra (10.24).

Nota: Toda serie es telescópica, puesto que se puede siempre verificar (10.22) eligiendo un b_1 arbitrario y haciendo luego $b_{n+1} = b_1 - s_n$ para, $n \geq 1$, donde $s_n = a_1 + + \cdots + a_n$.

EJEMPLO 1. Sea $a_n = 1/(n^2 + n)$. Se tiene entonces:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

y por tanto (10.23) se verifica con $b_n = 1/n$. Puesto que $b_1 = 1$ y $L = 0$ se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 .$$

EJEMPLO 2. Si x no es un entero negativo, se tiene la descomposición

$$\frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+x)(n+x+1)} - \frac{1}{(n+x+1)(n+x+2)}\right)$$

para cada entero $n \geq 1$. Por tanto, por la propiedad telescópica, la siguiente serie converge y tiene por suma la indicada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2(x+1)(x+2)} .$$

EJEMPLO 3. Puesto que los $[n/(n+1] = \log n - \log (n+1)$ y puesto que $\log n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, la serie $\sum \log [n/(n+1)]$ diverge.

Nota: En las series telescópicas se ve claramente la diferencia entre las series infinitas y las sumas finitas. Escribiendo (10.21) desarrollada se tiene:

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

que se puede obtener suprimiendo los paréntesis y simplificando. Si se hace ahora la misma operación en la serie infinita:

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots .$$

b_1 permanece, y se simplifican b_2, b_3 y así sucesivamente se llega a suprimir cada b_n, por tanto se simplifican todos los b_n menos el b_1, llegándose a la conclusión de ser b_1 la suma de la serie. Esta conclusión es falsa, en virtud del teorema 10.4, si no es $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Por tanto, en las series infinitas no se pueden suprimir los paréntesis en las mismas condiciones que en las sumas finitas (véase también el Ejercicio 24 de la Sección 10.9).

10.8 Serie geométrica

La propiedad telescópica de las sumas finitas se puede utilizar para estudiar un ejemplo muy importante conocido por la *serie geométrica.* Esta serie se genera por adiciones sucesivas de los términos de una progresión geométrica y tiene la forma $\sum x^n$ donde el término n-simo x^n es la potencia n-sima de un número real fijo x. Es conveniente empezar esta serie con $n = 0$, entendiendo que el término inicial x^0 es igual a 1.

Sea s_n la suma n-sima parcial de esta serie, de manera que:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

Si $x = 1$, cada término del primer miembro es igual a 1 y $s_n = n$. En este caso la serie diverge puesto que $s_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Si $x \neq 1$ se puede escribir la suma s_n simplificada observando que:

$$(1 - x)s_n = (1 - x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^n ,$$

puesto que la última suma es telescópica. Dividiendo por $1 - x$ se obtiene la fórmula:

$$s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x} \qquad \text{si} \quad x \neq 1 .$$

Esto muestra que el comportamiento de s_n para n grande depende exclusivamente del comportamiento de x^n. Cuando $x < 1$, $x^n \to 0$ para $n \to \infty$ y la serie converge hacia la suma $1/(1-x)$. Puesto que, $s_{n+1} - s_n = x^n$, la convergencia de $\{s_n\}$ implica $x^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $x > 1$ o si $x = 1$ el término x^n no tiende a límite finito y la serie diverge. Con lo cual se ha demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 10.5. *Si x es complejo, con $|x| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge y tiene suma $1/(1 - x)$. Es decir, tenemos*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{si} \quad |x| < 1 . \tag{10.25}$$

Si $x \geq 1$, la serie diverge.

La serie geométrica con $|x| < 1$ es uno de los raros ejemplos cuya suma se puede hallar, a través de una fórmula sencilla de sus sumas parciales. (En la Sección 10.1 en conexión con la paradoja de Zenón se vio el caso particular con $x = 1/2$.) La verdadera importancia de esta serie está en el hecho de poderla tomar como punto de partida para la determinación de la suma de un gran número de interesantes series. Por ejemplo, si se supone $|x| < 1$ y se sustituye x por x^2 en (10.25) se obtiene la fórmula:

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{si} \quad |x| < 1 . \tag{10.26}$$

Obsérvese que esta serie contiene los términos con exponentes *pares* de (10.25). Para hallar la suma de las potencias impares basta multiplicar ambos miembros de (10.26) por x obteniéndose:

$$x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1 - x^2} \quad \text{si} \quad |x| < 1 . \tag{10.27}$$

Si se sustituye x por $-x$ en (10.25) se tiene:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1 + x} \quad \text{si} \quad |x| < 1 \tag{10.28}$$

Sustituyendo x por x^2 en (10.28) se tiene:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{si} \quad |x| < 1 . \tag{10.29}$$

Multiplicando ambos miembros de (10.29) por x, resulta:

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{si} \quad |x| < 1 . \tag{10.30}$$

Si se sustituye x por $2x$ en (10.26) se obtiene:

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1 - 4x^2} ,$$

que es válida si $2x < 1$, o lo que es lo mismo, si $x < \frac{1}{2}$. Evidentemente se pueden construir otros muchos ejemplos de forma análoga.

Todas estas series tienen la forma particular:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

que se conoce por *serie de potencias*. Los números a_0, a_1, a_2, ..., se denominan *coeficientes* de la serie de potencias. La serie geométrica es un ejemplo de serie de potencias con todos los coeficientes iguales a 1. Si x y todos los coeficientes son reales, las series se denominan series de potencia *reales*. Se verá más tarde, al estudiar la teoría general de las series de potencias, que se pueden derivar e integrar ambos miembros de cada una de las ecuaciones desde (10.25) a (10.30), tratando los primeros miembros como si fueran sumas ordinarias finitas. Estas operaciones conducirán a muchas otras fórmulas notables. Por ejemplo, derivando en (10.25) se tiene:

$$(10.31) \qquad 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{si} \quad |x| < 1\,,$$

y la integración de (10.28) conduce a la interesante fórmula:

$$(10.32) \qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \log(1+x)$$

que expresa el logaritmo por medio de una serie de potencias. Éste es el descubrimiento de Mercator y Brouncker (1668) del que se hizo mención anteriormente. A pesar de que cada una de las ecuaciones (10.25) a (10.31) es válida para x en el intervalo abierto $-1 < x < +1$ ocurre que la serie logarítmica en (10.32) es válida también en el extremo $x = +1$.

Otro ejemplo importante, que se puede obtener por integración de (10.29), es la expresión de la función arco tangente por medio de una serie de potencias de la función descubierta en 1671 por James Gregory (1638-1675):

$$(10.33) \qquad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \arctan x\,.$$

La serie de Gregory converge para todo x complejo con $x < 1$ y también para $x = \pm 1$. Cuando x es real la serie concuerda con la función inversa de la tangente, introducida en el capítulo 6. La srie puede utilizarse para extender la definición de la función arco tangente desde los valores reales de x hasta el complejo x con $|x| < 1$.

Muchas otras funciones elementales del Cálculo, tales como seno, coseno y exponencial, pueden ser representadas por series de potencias. Esto no sorprende demasiado si se piensa en la fórmula de Taylor que dice que toda función se puede aproximar por un polinomio en x de grado $\leq n$ si posee derivadas de

orden $n + 1$ en un entorno del origen. En los ejemplos dados anteriormente, las sumas parciales de las series de potencias son precisamente estas aproximaciones por polinomios. Si una función f posee derivadas de *todos* los órdenes en un entorno del origen, para cada entero positivo n de la fórmula de Taylor se deduce una ecuación de la forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + E_n(x)\,, \tag{10.34}$$

donde la suma finita $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ es una aproximación polinomial de Taylor de grado $\leq n$ y $E_n(x)$ es el error correspondiente a esta aproximación. Si se considera ahora x fijo y se hace crecer n indefinidamente en (10.34) las aproximaciones polinomiales de Taylor conducen a una serie de potencias, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, donde cada coeficiente a_k está determinado como sigue:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

Si, para un cierto x, el error $E_n(x)$ tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$, entonces para este x podemos hacer $n \to \infty$ en (10.34) obteniendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \lim_{n\to\infty} E_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,.$$

Dicho de otro modo, la serie de potencias considerada converge hacia $f(x)$. Si x es un punto para el cual $E_n(x)$ no tiende a 0 para $n \to \infty$, entonces las sumas parciales no tenderán hacia $f(x)$. Las condiciones que ha de cumplir f para garantizar que $E_n(x) \to 0$ se estudiarán más adelante en la Sección 11.10.

Para fundamentar mejor la teoría general de las series de potencias, se estudian primero algunas cuestiones generales relativas a la convergencia y divergencia de series cualesquiera. Volveremos al asunto de las series de potencias en el capítulo 11.

10.9 Ejercicios

Cada una de las series en los Ejercicios 1 al 10 es una serie telescópica, o una serie geométrica, o alguna serie cuyas sumas parciales se pueden simplificar. En cada caso probar que la serie converge y que la suma es la indicada.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\,.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3.$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} = 1.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^2(n+1)^2} = 1.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1.$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log[(1 + 1/n)^n(1 + n)]}{(\log n^n)[\log(n+1)^{n+1}]} = \log_2 \sqrt{e}.$

Efectuando diversas operaciones en la serie geométrica, se obtuvieron en el apartado 10.8 las series de potencias para $\log(1 + x)$ y $\operatorname{arctg} x$. De forma análoga y sin intentar justificar los pasos, obtener las fórmulas de los Ejercicios 11 al 19, que son válidas por lo menos para $|x| < 1$. (La justificación teórica se dará en la Sección 11.8.)

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(1-x)^5}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log\frac{1}{1-x}.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!}x^n = \frac{1}{(1-x)^3}.$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$

20. Los resultados de los Ejercicios del 11 al 14 sugieren la existencia de una fórmula del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}},$$

donde $P_k(x)$ es un polinomio de grado k, y el término de menor grado es x y el de mayor grado x^k. Demostrarlo por inducción sin intentar justificar las operaciones formales con series.

21. Los resultados de los Ejercicios 17 al 19 sugieren la fórmula más general:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \quad \text{donde} \quad \binom{n+k}{k} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!}.$$

Demostrarla por inducción sin intentar justificar las operaciones formales con las series.

22. Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ para todo x, hallar las sumas de las siguientes series, suponiendo que se puede operar con series infinitas como si fueran sumas finitas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$. (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!}$.

23. (a) Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ para todo x probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^n}{n!} = (x^2 + x)e^x,$$

suponiendo que se puede operar en estas series como si fueran sumas finitas.

(b) La suma de la series $\sum_{n=1}^{\infty} n^3/n!$ es ke, donde k es un entero positivo. Hallar el valor de k. No se intente justificar los cálculos formales.

24. Dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se dice que son *idénticas* si $a_n = b_n$ para cada $n \geq 1$. Por ejemplo, en las series:

$$0 + 0 + 0 + \cdots \qquad \text{y} \qquad (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

son idénticas, pero las series

$$1 + 1 + 1 + \cdots \qquad \text{y} \qquad 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + \cdots$$

no son idénticas. Determinar cuáles de los siguientes pares de series son idénticas y cuáles no:

(a) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ y $(2 - 1) - (3 - 2) + (4 - 3) - (5 - 4) + \cdots$.

(b) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ y $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$.

(c) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ y $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$.

(d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ y $1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + \cdots$.

25. (a) Aplicar (10.26) para probar que:

$$1 + 0 + x^2 + 0 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \text{si} \quad x < 1 .$$

Obsérvese que, de acuerdo con la definición dada en el Ejercicio 24, esta serie no es idéntica a la de (10.26) si $x \neq 0$.

(b) Aplicar el teorema 10.2 al resultado de la parte (a) y a (10.25) para deducir (10.27).

(c) Probar que el teorema 10.2 si se aplica directamente a (10.25) y (10.26) no conduce a (10.27). En su lugar, conduce a la fórmula $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n}) = x/(1 - x^2)$, válida para $|x| < 1$.

* 10.10 Ejercicios con expresiones decimales

En la Sección I 3.15 se introdujo la representación decimal de los números reales. Se vio que cada número real x positivo tiene una expresión decimal de la forma:

$$x = a_0 . a_1a_2a_3 \ldots ,$$

donde $0 \leq a_k \leq 9$ para cada $k \geq 1$. El número x está relacionado con los dígitos a_0, a_1, a_2, ... por medio de las desigualdades:

(10.35) $$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Si se pone $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k/10^k$ y se resta s_n de cada uno de los miembros de (10.35) se obtiene:

$$0 \leq x - s_n < 10^{-n}.$$

Esto prueba que $s_n \to x$ cuando $n \to \infty$, y por tanto x está dado por la serie convergente:

(10.36) $$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

En los Ejercicios 1 al 5 se considera que cada una de las expresiones decimales se repite indefinidamente en la forma indicada. Expresar cada decimal como una serie infinita, hallar la suma de la serie y con ella expresar x como cociente de dos enteros.

1. $x = 0{,}4444\ldots.$
2. $x = 0{,}51515151\ldots.$
3. $x = 2{,}02020202\ldots.$
4. $x = 0{,}123123123123\ldots.$
5. $x = 0{,}142857142857142857142857\ldots.$
6. Probar que cada decimal periódico representa un número racional.
7. Si un número tiene una expresión decimal que termina en ceros, tal como $\frac{1}{8} = 0{,}1250000\ldots$, este número se puede escribir también como un decimal que termina en nueves, si se disminuye el último dígito no nulo en una unidad. Por ejemplo $\frac{1}{8} = 0{,}1249999\ldots$ Demostrarlo haciendo uso de las series infinitas.

La representación decimal en (10.36) se puede generalizar sustituyendo el entero 10 por otro entero cualquiera $b > 1$. Si $x > 0$, sea a_0 la parte entera de x; supuesto que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b^k} \leq x.$$

Los ejercicios que siguen, se refieren a la sucesión de enteros a_0, a_1, a_2, ..., así obtenida.

8. Probar que $0 \leq a_k \leq b - 1$ para cada $k \geq 1$.
9. Dar un método geométrico para obtener los números a_0, a_1, a_2, ...
10. Probar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k/b^k$ converge y tiene suma x. Esto da una expresión de x en base b. Casos particulares importantes además de $b = 10$, son la representación *binaria* $b = 2$ y la *duodecimal* $b = 12$.

10.11 Criterios de convergencia

En teoría, la convergencia o divergencia de una serie $\sum a_n$ se decide considerando las sumas parciales s_n y viendo si tienden o no a un límite finito cuando

$n \to \infty$. En algunos casos particulares, como por ejemplo la serie geométrica, las sumas parciales s_n se pueden simplificar hasta el punto de poder determinar fácilmente su comportamiento cuando $n \to \infty$. Sin embargo, en la mayoría de los casos esta forma simplificada para s_n no existe y difícilmente se puede establecer la convergencia o divergencia por el método indicado. Ya al principio, los que investigaban en este campo, muy especialmente Cauchy y sus contemporáneos, se dieron cuenta de esta dificultad, y dieron unos «criterios de convergencia», con los que eludían la necesidad de un conocimiento explícito de las sumas parciales. Algunos de estos criterios, los más sencillos y más útiles se estudiarán en este apartado, pero antes se harán algunas observaciones generales acerca de la naturaleza de estos criterios.

Los criterios de convergencia se pueden clasificar a grandes rasgos en tres categorías: (i) condiciones *suficientes,* (ii) condiciones *necesarias,* (iii) condiciones *necesarias* y *suficientes.* Un criterio del tipo (i) se puede expresar simbólicamente como sigue:

«Si C se satisface, entonces $\sum a_n$ converge»,

donde C indica la condición en cuestión. Los criterios del tipo (ii) tienen la forma:

«Si $\sum a_n$ converge, entonces C se satisface,»

mientras que los del tipo (iii) se pueden escribir en la forma:

« $\sum a_n$ converge si y sólo si C se satisface.»

Se verá ahora, que hay criterios del tipo (ii) que no lo son del tipo (i) (y recíprocamente). Los principiantes algunas veces aplican los criterios incorrectamente porque no aprecian la diferencia entre condición *necesaria* y condición *suficiente.* Por tanto, el lector tiene que hacer un esfuerzo para lograr esta distinción cuando aplica un criterio particular en la práctica.

El criterio de convergencia más sencillo es una condición *necesaria* para la convergencia y se expresa como sigue:

TEOREMA 10.6. *Si la serie $\sum a_n$ converge, el término n-ésimo tiende a* 0, *esto es,*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 . \qquad (10.37)$$

Demostración. Sea $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ Entonces $a_n = s_n - s_{n-1}$. Cuando $n \to \infty$, s_n y s_{n-1} tienden ambos al mismo límite y por tanto $a_n \to 0$, lo cual demuestra el teorema.

Esto es un ejemplo de un criterio que es del tipo (ii) y no del tipo (i). La condición (10.37) *no* es suficiente para la convergencia de una serie. Por ejemplo, cuando $a_n = 1/n$ la condición $a_n \to 0$ se satisface y sin embargo la serie $\sum 1/n$ diverge. La verdadera utilidad de este criterio es que da una condición *suficiente* para la *divergencia.* Es decir, si el término a_n de la serie $\sum a_n$ *no* tiende a cero, entonces la serie ha de ser divergente. Esta proposición es lógicamente equivalente al teorema 10-6.

10.12 Criterios de comparación para series de términos no negativos

En esta Sección se tratará de series cuyos términos son *no negativos,* es decir, series de la forma $\sum a_n$, donde cada $a_n \geq 0$. Puesto que las sumas parciales de tales series son monótonas crecientes, se aplicará el teorema 10.1 para obtener la siguiente *condición necesaria y suficiente* de convergencia.

TEOREMA 1.07. *Si $a_n \geq 0$ para cada $n \geq 1$, la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada superiormente.*

Si las sumas parciales están acotadas superiormente por un número M, la suma de la serie no puede entonces exceder a M.

EJEMPLO 1. El teorema 10.7 se puede aplicar para establecer la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ Una cota superior de las sumas parciales se puede obtener haciendo uso de la desigualdad:

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

que es evidentemente cierta para todo $k \geq 1$, puesto que $k!$ es el producto de $k - 1$ factores, cada uno ≥ 2. Por tanto

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

siendo la última serie una serie geométrica. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ es por tanto convergente y tiene su suma ≤ 2. Se verá más tarde que la suma de esta serie es $e - 1$, donde e es el número de Euler.

La convergencia del ejemplo anterior se ha establecido por comparación de los términos de la serie dada con los de una serie que se sabe que converge. Esta idea conduce a unos criterios llamados *criterios de comparación.*

TEOREMA 10.8. CRITERIO DE COMPARACIÓN. *Supuesto que* $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ *para todo* $n \geq 1$. *Si existe una constante positiva* c *tal que*

$$a_n \leq cb_n \tag{10.38}$$

para todo n, *entonces la convergencia de* $\sum b_n$ *implica la de* $\sum a_n$.

Nota. La conclusión se puede formular también como sigue: «La divergencia de $\sum a_n$ implica la divergencia de $\sum b_n$». Esta proposición es lógicamente equivalente al teorema 10.8. Cuando se satisface la desigualdad (10.38) se dice que la serie $\sum b_n$ *domina* a la serie $\sum a_n$.

Demostración. Sea $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + \ldots + b_n$. Entonces (10.38) implica $s_n \leq ct_n$. Si $\sum b_n$ converge, sus sumas parciales están acotadas; si M es una cota, se tiene $s_n \leq cM$ y, por tanto, $\sum a_n$ es también convergente puesto que sus sumas parciales están acotadas por cM, con lo cual queda demostrado el teorema.

Si se suprime un número finito de términos del principio de una serie, la convergencia o divergencia no se afecta. Por tanto, el teorema 10.8 es también válido si se verifica la igualdad (10.38) para todo $n \geq N$, donde N es un número fijo.

TEOREMA 10.9. CRITERIO DE COMPARACIÓN POR PASO AL LÍMITE. *Supuesto que* $a_n > 0$ *y* $b_n > 0$ *para todo* $n \geq 1$, *y que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 . \tag{10.39}$$

Entonces $\sum a_n$ *converge si y sólo si* $\sum b_n$ *converge.*

Demostración. Existe un entero N tal que $n \geq N$ implica $\frac{1}{2} < a_n/b_n < \frac{3}{2}$. Por tanto $b_n < 2a_n$ y $a_n < \frac{3}{2}b_n$ para todo $n \geq N$; aplicando dos veces el teorema 10.8 se tiene demostrado el teorema.

Obsérvese que el teorema 10.9 se verifica también si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$ siempre que $c > 0$, puesto que entonces se tiene $\lim_{n\to\infty} a_n/(cb_n) = 1$ y se puede comparar $\sum a_n$ con $\sum (cb_n)$. Sin embargo, si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$, sólo se puede concluir que la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

DEFINICIÓN. *Se dice que dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *de números complejos son asintóticamente iguales si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 .$$

Esta relación se indica simbólicamente escribiendo

(10.40) $$a_n \sim b_n \quad \text{cuando} \quad n \to \infty .$$

La notación $a_n \sim b_n$ se lee «a_n es asintóticamente igual a b_n» y con ello se quiere indicar que a_n y b_n se comportan de manera análoga cuando n crece indefinidamente. Aplicando esta terminología se puede expresar el criterio de comparación por paso a límite de la manera siguiente.

TEOREMA 10.10. *Dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ de términos positivos y asintóticamente iguales o ambas convergen o ambas divergen.*

EJEMPLO 2. LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN. En el ejemplo 1 del apartado 10.7 se probó que $\sum 1/(n^2 + n)$ es una serie telescópica convergente. Utilizando ésta como serie de comparación se sigue que $\sum 1/n^2$ es convergente, puesto que $1/n^2 \sim 1/(n^2 + n)$ cuando $n \to \infty$. Pero, $\sum 1/n^2$ domina $\sum 1/n^s$ para $s \geq 2$ y, por tanto, $\sum 1/n^s$ converge para todo número real $s \geq 2$. En el apartado siguiente se demostrará que esta serie converge también para todo $s > 1$. Su suma se indica por $\zeta(s)$ (ζ es la letra griega zeta) y define una función importante en Análisis, conocida por la *función zeta de Riemann:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{si} \quad s > 1 .$$

Euler descubrió fórmulas muy bonitas que contienen $\zeta(s)$. En particular encontró que $\zeta(2) = \pi^2/6$, resultado que no es fácil de deducir.

EJEMPLO 3. Puesto que $\sum 1/n$ diverge, cada serie de términos positivos asintóticamente igual a $1/n$ también ha de diverger; por ejemplo, las dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} .$$

La relación $\operatorname{sen} 1/n \sim 1/n$ es consecuencia de que $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ cuando $x \to 0$.

10.13 El criterio integral

Para aplicar efectivamente los criterios de comparación es preciso disponer de algunos ejemplos de series de comportamiento conocido. Son útiles la serie geométrica y la función zeta. Se pueden obtener otros ejemplos aplicando el llamado *criterio integral,* demostrado por Cauchy en 1837.

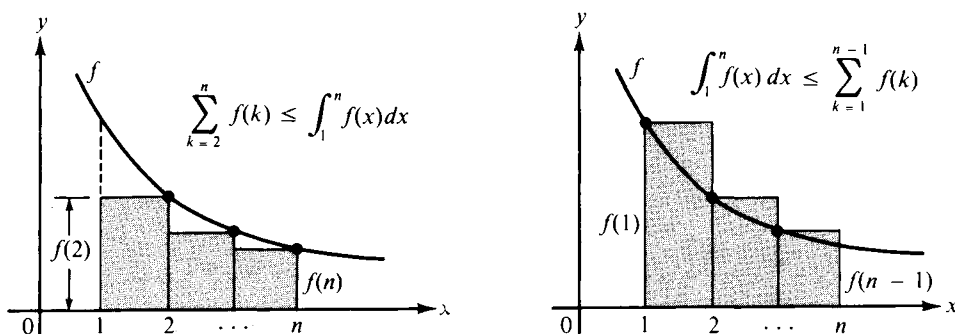


FIGURA 10.4 *Demostración del criterio integral.*

TEOREMA 10.11. CRITERIO INTEGRAL. *Sea f una función positiva decreciente, definida para todo real $x \geq 1$. Para cada $n \geq 1$, sea*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad y \qquad t_n = \int_1^n f(x)\,dx\,.$$

entonces o ambas sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen o ambas divergen.

Demostración. Comparando f con funciones escalonadas adecuadas como se sugiere en la figura 10.4, se obtienen las desigualdades:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

o, $s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}$. Puesto que las dos sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son monótonas crecientes, estas desigualdades prueban que o ambas están acotadas superiormente o ambas no están acotadas. Por tanto, o las dos sucesiones convergen o las dos divergen tal como se había afirmado.

EJEMPLO 1. El criterio integral permite demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{converge si y sólo si} \quad s > 1\,.$$

Tomando $f(x) = x^{-s}$ se tiene:

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{n^{1-s} - 1}{1 - s} & \text{si} \quad s \neq 1\,, \\ \log n & \text{si} \quad s = 1\,. \end{cases}$$

Si $s > 1$, el término $n^{1-s} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por tanto $\{t_n\}$ converge. En virtud del criterio integral, esto implica la convergencia de la serie para $s > 1$.

Si $s < 1$, entonces $t_n \to \infty$ y la serie diverge. El caso particular $s = 1$ (la *serie armónica*) se estudió ya en la sección 10.5. Su divergencia era ya conocida de Leibniz.

EJEMPLO 2. El mismo método se puede aplicar para demostrar que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s} \qquad \text{converge si y sólo si} \quad s > 1\,.$$

(Se empieza la suma por $n = 2$ para evitar la n en la que $\log n$ es cero.)

La integral correspondiente en este caso es:

$$t_n = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(\log n)^{1-s} - (\log 2)^{1-s}}{1-s} & \text{si} \quad s \neq 1\,, \\ \log(\log n) - \log(\log 2) & \text{si} \quad s = 1\,. \end{cases}$$

$\{t_n\}$ converge si y sólo si $s > 1$ y por tanto, en virtud del criterio integral, lo mismo ocurre con la serie en cuestión.

10.14 Ejercicios

Decir si cada una de las series siguientes es convergente o divergente, razonando la respuesta.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}\,.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\,\log(4n+1)}{n(n+1)}\,.$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\,.$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\,.$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} nx|}{n^2}\,.$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}\,.$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}\,.$
8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}\,.$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\,.$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3-1}\,.$

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^s}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{10^n}$, $|a_n| < 10$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n + 1}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 (n\pi/3)}{2^n}$.

15. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^s}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2}\, dx$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

19. Sea f una función no negativa, creciente definida para todo $x \geq 1$. Aplicar el método seguido para la demostración del criterio integral para probar que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)\,.$$

Tomar $f(x) = \log x$ y deducir las desigualdades:

(10.41)
$$e\, n^n\, e^{-n} < n! < e\, n^{n+1} e^{-n}\,.$$

Esto da una estimación grosera del orden de magnitud de $n!$. Teniendo en cuenta (10.41), podemos escribir

$$\frac{e^{1/n}}{e} < \frac{(n!)^{1/n}}{n} < \frac{e^{1/n}\, n^{1/n}}{e}\,.$$

Haciendo que $n \to \infty$, encontramos que

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} \to \frac{1}{e} \qquad \text{o} \qquad (n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e} \quad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

10.15 Criterios de la raíz y del cociente para series de términos no negativos

Usando la serie geométrica con $\sum x^n$ como serie de comparación, Cauchy dio dos criterios útiles conocidos por *criterio de la raíz y criterio del cociente.*

Si $\sum a_n$ es una serie cuyos términos (a partir de uno de ellos) satisfacen una desigualdad de la forma:

(10.42)
$$0 \leq a_n \leq x^n, \qquad \text{donde} \quad 0 < x < 1\,,$$

la aplicación directa del criterio de comparación (teorema 10.8) expresa que $\sum a_n$ converge. Las desigualdades en (10.42) son equivalentes a

(10.43) $$0 \leq a_n^{1/n} \leq x \;;$$

y de aquí el nombre de *criterio de la raíz.*

Si la sucesión $\{a_n^{1/n}\}$ es convergente, el criterio se puede expresar en una forma práctica sin hacer referencia al número x.

TEOREMA 10.12. CRITERIO DE LA RAÍZ. *Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos tales que*

$$a_n^{1/n} \to R \text{ cuando } n \to \infty .$$

(a) *Si $R < 1$, la serie converge.*
(b) *Si $R > 1$, la serie diverge.*
(c) *Si $R = 1$, el criterio no decide.*

Demostración. Si $R < 1$, elíjase x de manera que $R < x < 1$. Entonces (10.43) se ha de satisfacer para todo $n \geq N$ a partir de un N. Por tanto $\sum a_n$ converge en virtud del criterio de comparación. Esto demuestra (a).

Para demostrar (b) se observa que $R > 1$ implica $a_n > 1$ para una infinidad de valores de n y por tanto a_n no puede tender a 0. Por lo cual, en virtud del teorema 10.6, $\sum a_n$ diverge. Esto demuestra (b).

Para demostrar (c), se consideran los dos ejemplos en los que $a_n = 1/n$, y $a_n = 1/n^2$. En ambos casos, $R = 1$, puesto que $n^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$ [ver ecuación (10.12) del apartado 10.2], pero $\sum 1/n$ diverge mientras que $\sum 1/n^2$ converge.

EJEMPLO 1. Con el criterio de la raíz es fácil determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=3}^{\infty} (\log n)^{-n}$ puesto que:

$$a_n^{1/n} = \frac{1}{\log n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty .$$

EJEMPLO 2. Aplicando el criterio de la raíz a $\sum [n/(n+1)]^{n^2}$, se encuentra

$$a_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \to \frac{1}{e} \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

en virtud de la ecuación (10.13) del apartado 10.2. Puesto que $1/e < 1$, la serie converge.

Una aplicación ligeramente distinta del criterio de comparación conduce al criterio del cociente.

TEOREMA 10.13. CRITERIO DEL COCIENTE. *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tales que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty .$$

(a) *Si $L < 1$, la serie converge.*
(b) *Si $L > 1$, la serie diverge.*
(c) *Si $L = 1$, el criterio no decide.*

Demostración. Si $L < 1$, elíjase x de manera que $L < x < 1$. Entonces ha de existir un N tal que $a_{n+1}/a_n < x$ para todo $n \geq N$. Esto implica

$$\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_n}{x^n} \quad \text{para todo} \quad n \geq N .$$

Es decir, la sucesión $\{a_n/x^n\}$ es decreciente para $n \geq N$. En particular, cuando $n \geq N$ ha de ser $a_n/x^n \leq a_N/x^N$, o de otro modo,

$$a_n \leq cx^n , \qquad \text{donde} \qquad c = \frac{a_N}{x^N} .$$

De donde resulta que $\sum a_n$ está dominada por la serie convergente $\sum x^n$ quedando así probado (a).

Para demostrar (b), basta observar que $L > 1$ implica $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq N$, a partir de un N, y por tanto a_n no puede tender a 0.

Finalmente, (c) se prueba utilizando los mismos ejemplos que en el teorema 10 12.

Observación. El que la razón a_{n+1}/a_n sea siempre menor que 1 no implica que el *límite* L sea menor que 1. Por ejemplo, la serie armónica, que diverge, tiene la razón $n/(n + 1)$, que es siempre menor que 1, pero el límite L es igual a 1. Por otra parte, para la divergencia es suficiente que la razón sea mayor que 1 para n suficientemente grande, puesto que entonces es $a_{n+1} > a_n$ y a_n no puede tender a 0.

EJEMPLO 3. Se puede establecer la convergencia de la serie $\sum n!/n^n$ por el criterio del cociente. La razón de dos términos consecutivos es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n + 1)!}{(n + 1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n = \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \to \frac{1}{e} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty ,$$

en virtud de la fórmula (10.13) del apartado 10.2. Puesto que $1/e < 1$ la serie converge. En particular, esto implica que el término general de la serie tienda a cero; es decir:

$$\frac{n!}{n^n} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty . \tag{10.44}$$

lo que se acostumbra expresar diciendo que n^n «crece más rápidamente» que $n!$, para n suficientemente grande. Y también con una extensión natural de la notación o se puede escribir (10.44) como sigue: $n! = o(n^n)$ cuando $n \to \infty$.

Nota. La relación (10.44) se puede probar también directamente escribiendo:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{k}{n} \cdot \frac{k+1}{n} \cdots \frac{n}{n},$$

donde $k = n/2$ si n es par, y $k = (n-1)/2$ si n es impar. Si $n \geq 2$ el producto de los k primeros factores del segundo miembro no excede a $(\frac{1}{2})^k$, y cada uno de los factores restantes no excede a 1. Puesto que $(\frac{1}{2})^k \to 0$ cuando $n \to \infty$, queda demostrado (10.44). También se deduce la relación (10.44) a partir de (10.41).

El lector puede observar que tanto el criterio de la raíz como el del cociente, en realidad no son más que casos particulares de criterios de comparación. En ambos, cuando se presenta el caso (a) la convergencia se deduce del hecho que la serie en cuestión puede ser dominada por una serie geométrica adecuada $\sum x^n$. La utilidad práctica de estos criterios está en que no se requiere el conocimiento explícito de una serie $\sum x^n$ de comparación de otra forma. En los Ejercicios 16 y 17 de la Sección 10.16 se darán otros dos ejemplos importantes conocidos por *criterio de Raabe y criterio de Gauss.* Son útiles en muchos casos en los que falla el criterio del cociente.

10.16 Ejercicios

Decir de cada una de las series siguientes, si es convergente o divergente justificando la respuesta.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/n}}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n + 1/n)^n}$.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n |\operatorname{sen} nx|$, $\quad r > 0$.

15. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones con $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \geq N$, y sea $c_n = b_n - b_{n+1}a_{n+1}/a_n$. Probar que:

(a) Si existe una constante positiva r, tal que $c_n \geq r > 0$, para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ converge.

[*Indicación.* Probar que $\sum_{k=N}^{n} a_k \leq a_N b_N / r$.]

(b) Si $c_n \leq 0$ para $n \geq N$ y si $\sum 1/b_n$ diverge, también $\sum a_n$ diverge.

[*Indicación.* Probar que $\sum a_n$ domina $\sum 1/b_n$.]

16. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Probar el *criterio de Raabe*: Si existen un $r > 0$ y un $N \geq 1$ tales que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n} \quad \text{para todo } n \geq N,$$

entonces $\sum a_n$ converge. La serie $\sum a_n$ diverge si:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

[*Indicación.* Aplicar el Ejercicio 15 con $b_{n+1} = n$.]

17. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Demostrar el *criterio de Gauss*: Si existe un $n \geq 1$ y un $s > 1$ y un $M > 0$ tales que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{para } n \geq N,$$

en donde $|f(n)| \leq M$ para todo n, entonces $\sum a_n$ converge si $A > 1$ y diverge si $A \leq 1$.

[*Indicación.* Si $A \neq 1$, utilizar el Ejercicio 16. Si $A = 1$, aplicar el Ejercicio 15 con $b_{n+1} = n \log n$.]

18. Aplicar el criterio de Gauss (del Ejercicio 17) para demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^k$$

converge si $k > 2$ y diverge si $k \leq 2$. En este ejemplo el criterio del cociente no sirve.

10.17 Series alternadas

Hasta ahora se han estudiado series de términos no negativos. En lo que sigue se considerarán series con términos positivos y negativos. El caso más sencillo se presenta cuando los términos de la serie tienen sus signos alternativamente positivos y negativos. Estas series se denominan *series alternadas* y son de la forma:

(10.45) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots,$$

donde cada $a_n > 0$ es positiva.

Ejemplos de series alternadas eran conocidos de los primeros investigadores. Se ha citado ya la serie logarítmica

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Como se demostrará más tarde, esta serie converge y su suma es $\log(1 + x)$ para $-1 < x \leq 1$. Para x positivo es una serie alternada. En particular, si $x = 1$ se obtiene la fórmula:

(10.46) $$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots,$$

que dice que la suma de la serie armónica alternada es log 2. Este resultado es de especial interés teniendo en cuenta que la serie armónica $\sum 1/n$ diverge.

Íntimamente relacionada con (10.46) es la interesante fórmula

(10.47) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

descubierta por James Gregory en 1671. Leibniz encontró de nuevo esta fórmula en 1673 calculando el área del círculo unidad.

Ambas series (10.46) y (10.47) son series alternadas de la forma (10.45) en las que $\{a_n\}$ decrece monótonamente hacia cero. Leibniz observó, en 1705, que esta simple propiedad de a_n implica la convergencia de *toda* serie alternada.

TEOREMA 10.14. REGLA DE LEIBNIZ. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite 0, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n$ converge. Si S designa su suma y s_n su suma parcial n-sima, se tienen las desigualdades*

(10.48) $$0 < (-1)^n(S - s_n) < a_{n+1} \quad \textit{para cada} \geq 1 .$$

Las desigualdades en (10.48) dan una manera de estimar el error que se comete al aproximar la suma S por una suma parcial s_n. La primera desigualdad expresa que el error $S - s_n$ tiene el signo $(-1)^n$, que es el del primer término despreciado, $(-1)^n a_{n+1}$. La segunda desigualdad afirma que el valor absoluto de este error es menor que el del primer término despreciado,

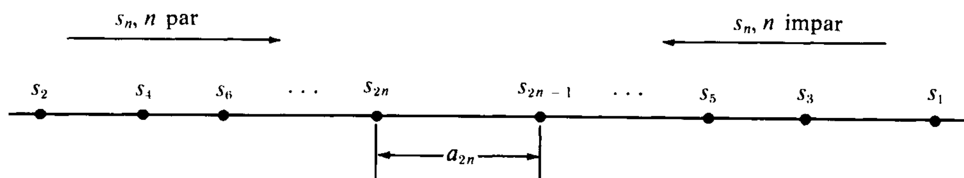


FIGURA 10.5 *Demostración de la regla de Leibniz para series alternadas.*

Demostración. La idea de la demostración de la regla de Leibniz es muy simple y está representada en la figura 10.5. Las sumas parciales s_{2n} (con un número par de términos) forman una sucesión creciente puesto que $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$. Análogamente las sumas parciales s_{2n-1} forman una sucesión decreciente. Ambas sucesiones están acotadas inferiormente por s_2 y superiormente por s_1. Por tanto, cada sucesión $\{s_{2n}\}$ y $\{s_{2n-1}\}$ siendo monótona y acotada, converge hacia un límite, es decir $s_{2n} \to S'$ y $s_{2n-1} \to S''$. Pero $S' = S''$ puesto que:

$$S' - S'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} (-a_{2n}) = 0 .$$

Indicando este límite común por S, es claro que la serie converge y tiene por límite S.

Para deducir las desigualdades en (10.48) se razona como sigue: Puesto que $s_{2n}\nearrow$ y $s_{2n-1}\searrow$ es:

$$s_{2n} < s_{2n+2} \leq S \qquad \text{y} \qquad S \leq s_{2n+1} < s_{2n-1} \quad \text{para todo } n \geq 1 .$$

Por tanto, se tienen las desigualdades:

$$0 < S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \qquad \text{y} \qquad 0 < s_{2n-1} - S \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} ,$$

que consideradas conjuntamente conducen a (10.48). Con lo cual se tiene la demostración completa.

EJEMPLO 1. Puesto que $1/n \searrow$ y $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, la convergencia de la serie armónica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ es una consecuencia inmediata de la regla de Leibniz. La suma de esta serie se calculó ya en el ejemplo 4.

EJEMPLO 2. La serie alternada $\sum (-1)^n (\log n)/n$ converge. Para demostrarlo aplicando la regla de Leibniz se ha de probar que $(\log n)/n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $(\log n)/n \searrow$. Lo primero se deduce de la ecuación (10.11) de la Sección 10.2. Para probar lo segundo se observa que la función f para la cual

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad \text{cuando} \quad x > 0$$

tiene la derivada $f'(x) = (1 - \log x)/x^2$. Cuando $x > e$ ésta es negativa y f es monótona decreciente. En particular $f(n + 1) < f(n)$ para $n \geq 3$.

EJEMPLO 3. Como consecuencia de la regla de Leibniz se puede deducir también un límite importante. Sea:

$$a_1 = 1 , \qquad a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}, \qquad a_3 = \tfrac{1}{2} , \qquad a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x} , \qquad \ldots ,$$

donde, en general,

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Es fácil comprobar que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $a_n \searrow$. Por tanto la serie $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge. Su suma se indica por C y su suma parcial n-sima por s_n. La suma parcial $(2n - 1)$ se puede expresar como sigue:

$$s_{2n-1} = 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n .$$

Puesto que $s_{2n-1} \to C$ cuando $n \to \infty$ se obtiene la siguiente fórmula:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = C. \tag{10.49}$$

El número C definido por este límite se denomina *constante de Euler* (indicada algunas veces por γ). Igual que π y e, este número aparece en muchas fórmulas analíticas. Su valor con diez cifras decimales exactas es: 0,5772156649. Un problema interesante, todavía sin resolver, es averiguar si la constante de Euler es racional o irracional.

La relación (10.49) también puede expresarse como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + o(1) \quad \text{cuando } n \to \infty. \tag{10.50}$$

De esto se deduce que la razón $(1 + \frac{1}{2} + \ldots + 1/n)/\log n \to 1$ cuando $n \to \infty$, de modo que las sumas parciales de la serie armónica son asintóticamente iguales a $\log n$. Esto es, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

La relación (10.50) no sólo explica por qué la serie armónica diverge, sino que también nos proporciona una idea concreta del crecimiento de sus sumas parciales. En el próximo ejemplo utilizamos esa relación para demostrar que la serie armónica alternada tiene suma igual a log 2.

EJEMPLO 4. Sea $s_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}/k$. Sabemos que s_m tiende a un límite cuando $m \to \infty$, y vamos ahora a demostrar que ese límite es log 2. Cuando m es par, sea $m = 2n$, podemos separar los términos positivos y negativos obteniendo

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Aplicando (10.50) a cada suma del último miembro a la derecha, obtenemos

$$s_{2n} = (\log 2n + C + o(1)) - (\log n + C + o(1)) = \log 2 + o(1),$$

con lo que $s_{2n} \to \log 2$ cuando $n \to \infty$. Esto demuestra que la suma de la serie armónica alternada es log 2.

10.18 Convergencia condicional y absoluta

A pesar de ser la serie armónica alternada $\sum (-1)^{n-1}/n$ convergente, la serie que se obtiene sustituyendo cada término por su valor absoluto es divergente. Esto prueba que en general la convergencia de $\sum a_n$ no implica la convergencia $\sum |a_n|$. En sentido contrario se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 10.15. *Si $\sum |a_n|$ converge, también converge $\sum a_n$ y tenemos*

(10.51)
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,.$$

Demostración. Supongamos primero que los términos a_n son reales. Sea $b_n = a_n + |a_n|$. Demostraremos que $\sum b_n$ converge. Se deduce entonces (según el teorema 10.2) que $\sum a_n$ converge debido a que $a_n = b_n - |a_n|$.

Puesto que b_n es 0 ó $2|a_n|$ tenemos $0 \leq b_n \leq 2\,|a_n|$, y por tanto $\sum |a_n|$ domina $\sum b_n$. Por consiguiente $\sum b_n$ converge y, como ya se ha dicho, esto implica la convergencia de $\sum a_n$.

Supongamos ahora que los términos a_n son complejos, pongamos $a_n = u_n + iv_n$ siendo u_n y v_n reales. Puesto que $|u_n| \leq |a_n|$, la convergencia de $\sum |a_n|$ implica la convergencia de $\sum |u_n|$, a su vez implica la convergencia de $\sum u_n$ ya que u_n es real. Análogamente, $\sum v_n$ converge. En virtud de la linealidad, la serie $\sum (u_n + iv_n)$ converge.

Para demostrar (10.51), observemos que $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, y hagamos luego que $n \to \infty$.

DEFINICIÓN. *Una serie $\sum a_n$ se llama absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ converge. Es condicionalmente convergente si $\sum a_n$ converge y en cambio $\sum |a_n|$ diverge.*

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes, lo mismo le ocurre a la serie $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ cualesquiera que sean α y β. Esto se deduce inmediatamente de las desigualdades

$$\sum_{n=1}^{M} |\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha| \sum_{n=1}^{M} |a_n| + |\beta| \sum_{n=1}^{M} |b_n| \leq |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |\beta| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,,$$

que demuestran que las sumas parciales de $\sum |\alpha a_n + \beta b_n|$ están acotadas.

10.19 Criterios de convergencia de Dirichlet y Abel

Los criterios de convergencia vistos en las Secciones anteriores que fueron desarrollados para series de términos no negativos también pueden usarse para

averiguar la convergencia *absoluta* de una serie de términos complejos cualesquiera. En esta Sección exponemos dos criterios que se utilizan a menudo para determinar la convergencia en el caso en que una serie no converja absolutamente. Ambos criterios hacen uso de una identidad algebraica llamada *fórmula de sumación parcial de Abel,* en memoria del matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829). Dicha fórmula es parecida a la de la integración por partes y puede enunciarse como sigue.

TEOREMA 10.16. FÓRMULA DE SUMACIÓN PARCIAL DE ABEL. *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones de números complejos, y llamemos*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Tenemos entonces la identidad

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) . \tag{10.52}$$

Demostración. Si definimos $A_0 = 0$, entonces $a_k = A_k - A_{k-1}$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, así que tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} ,$$

que nos da (10.52).

Si hacemos que $n \to \infty$ en (10.52), vemos que la serie $\sum a_k b_k$ converge si convergen simultáneamente la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ y la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$. Los dos criterios que siguen dan condiciones suficientes para que éstas converjan.

TEOREMA 10.17. CRITERIO DE DIRICHLET. *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos complejos cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada. Sea* $\{b_n\}$ *una sucesión real decreciente que converge hacia* 0. *Entonces la serie* $\sum a_n b_n$ *converge.*

Demostración. Usando la notación del teorema 10.16, existe un $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M$ para todo n. Por consiguiente $A_n b_{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para establecer la convergencia de $\sum a_n b_n$, tenemos que demostrar tan sólo que la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente. Puesto que $b_n \searrow$, tenemos la desigualdad

$$|A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k+1}) .$$

Pero la serie $\sum (b_n - b_{k+1})$ es una serie telescópica convergente que domina

$$\sum A_k(b_k - b_{k+1}) .$$

Esto implica la convergencia absoluta y por tanto la convergencia de $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$.

TEOREMA 10.18. CRITERIO DE ABEL. *Sean $\sum a_n$ una serie convergente de términos complejos y $\{b_n\}$ una sucesión monótona convergente de términos reales. Entonces la serie $\sum a_n b_n$ converge.*

Demostración. Utilizamos otra vez la notación del teorema 10.16. La convergencia de $\sum a_n$ implica la de la sucesión $\{A_n\}$ y por tanto la de la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$. Asimismo, $\{A_n\}$ es una sucesión acotada. El resto de la demostración es semejante a la del criterio de Dirichlet.

Para aplicar el criterio de Dirichlet, necesitamos conocer algunos ejemplos de series con sumas parciales acotadas. Naturalmente, toda serie *convergente* tiene esa propiedad. Un ejemplo importante de serie divergente con sumas parciales acotadas es la serie geométrica $\sum x^n$, en la que x es un número complejo con $|x| = 1$ pero $x \neq 1$. El teorema que sigue nos proporciona una cota superior para las sumas parciales de esta serie. Cuando $|x| = 1$, podemos escribir $x = e^{2i\theta}$, siendo θ real, y tenemos el siguiente

TEOREMA 10.19. *Para todo θ real no múltiplo entero de π, tenemos la identidad*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen} \theta}\, e^{i(n+1)\theta}, \tag{10.53}$$

a partir de la cual obtenemos la acotación

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen} \theta|} . \tag{10.54}$$

Demostración. Si $x \neq 1$, las sumas parciales de la serie geométrica vienen dadas por

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x\, \frac{x^n - 1}{x - 1} .$$

Poniendo $x = e^{2i\theta}$ en esta fórmula, donde θ es real pero no múltiplo entero de π, encontramos

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} = e^{2i\theta}\frac{e^{2in\theta}-1}{e^{2i\theta}-1} = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\,e^{i(n+1)\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,e^{i(n+1)\theta}$$

Esto demuestra (10.53). Para deducir (10.54), observemos tan sólo que $|\operatorname{sen} n\theta| \leq 1$ y $|e^{i(n+1)\theta}| = 1$.

EJEMPLOS. Supongamos que $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales con límite 0. Tomando $a_n = x_n$ en el criterio de Dirichlet, siendo x complejo, $|x| = 1$, $x \neq 1$, encontramos que la serie

(10.55) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

converge. Obsérvese que la regla de Leibniz para series alternadas es tan sólo el caso particular en el que $x = -1$. Si escribimos $x = e^{i\theta}$, siendo θ real pero no múltiplo entero de 2π, y consideremos las partes real e imaginaria de (10.55), deducimos que las dos series trigonométricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\theta$$

convergen. En particular cuando $b_n = n^{-\alpha}$, siendo $x > 0$, encontramos las siguientes series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^{\alpha}}.$$

Cuando $\alpha > 1$, convergen absolutamente ya que están dominadas por $\sum n^{-\alpha}$.

10.20 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 32, determinar la convergencia o divergencia de las series dadas. En caso de convergencia, determinar si la serie converge absoluta o condicionalmente.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right)^3$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log (e^n + e^{-n})}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log^2 (n+1)}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log (1 + 1/n)}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{37}}{(n+1)!}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\log n)$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{2n+1}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan (\log n)\right)$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{|\operatorname{sen} n|}\right)$.

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen} \left(n\pi + \frac{1}{\log n}\right)$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + 1/2 + \cdots + 1/n)}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$.

25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^s}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \left(\frac{n^{100}}{2^n}\right)$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ es un cuadrado} \\ 1/n^2 & \text{si } n \text{ no es un cuadrado} \end{cases}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1/n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)^{3/2}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (1/n)}{n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n \operatorname{sen}(1/n)}{n}$.

En los Ejercicios del 33 al 48, determinar el conjunto de todos los complejos z para los que la serie converge.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{3n}}{n!}$.

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \log \frac{2n+1}{n}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{5n+1}\right)^{n^2} |z|^{17n}$.

40. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(n+2)!}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+3)^n}{n \log (n+1)}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{z}{2z+1}\right)^n$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|z|^2)^n}$.

En los Ejercicios 47 y 48 determinar el conjunto de todos los números reales x para los que la serie converge.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \operatorname{sen}^{2n} x}{n}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^n x}{n^2}$.

En los Ejercicios del 49 al 52, se supone que las series tienen los términos reales.

49. Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge, probar que $\sum 1/a_n$ diverge.

50. Si $\sum |a_n|$ converge, probar que $\sum a_n^2$ converge. Dar un contraejemplo en el que $\sum a_n^2$ converge y sin embargo $\sum |a_n|$ diverge.

51. Dada una serie convergente $\sum a_n$ en la que cada $a_n \geq 0$, probar que $\sum \sqrt{a_n}\, n^{-p}$ converge si $p > \frac{1}{2}$. Dar un contraejemplo para $p = \frac{1}{2}$.

52. Decidir si es cierta o falsa cada una de las siguientes proposiciones:
(a) Si $\sum a_n$ converge absolutamente, también converge absolutamente $\sum a_n^2/(1 + a_n^2)$.
(b) Si $\sum a_n$ converge absolutamente, y para ningún n es $a_n = -1$, entonces $\sum a_n/(1 + a_n)$ converge absolutamente.

* 10.21 Reordenación de series

El orden de los términos en una suma finita puede alterarse sin que por ello quede afectado el valor de la suma. En 1833 Cauchy hizo el sorprendente descu-

brimiento que eso no siempre es cierto para las series. Por ejemplo, consideremos la serie armónica alternada

$$(10.56) \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + - \cdots = \log 2\,.$$

La convergencia de esa serie hacia la suma log 2 se demostró en la Sección 10.17. Si reordenamos los términos de esa serie, tomando alternativamente dos términos positivos seguidos de uno negativo, obtenemos una nueva serie

$$(10.57) \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + + - \cdots.$$

Cada término de la serie armónica alternada se presenta exactamente una sola vez en esta reordenación, y viceversa. No obstante con facilidad se puede demostrar que esta nueva serie tiene una suma mayor que log 2. Se procede así:

Designemos por t_n la suma parcial n-sima de (10.57). Si n es múltiplo de 3, pongamos $n = 3m$, la suma parcial t_{3m} contiene $2m$ términos positivos y m negativos y viene dada por

$$t_{3m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{4m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{4m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\,.$$

En cada una de las tres últimas sumas, utilizamos la relación asintótica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + o(1) \quad \text{cuando } n \to \infty\,,$$

obteniendo

$$t_{3m} = (\log 4m + C + o(1)) - \tfrac{1}{2}(\log 2m + C + o(1)) - \tfrac{1}{2}(\log m + C + o(1)) =$$
$$= \tfrac{3}{2}\log 2 + o(1)\,.$$

Así pues $t_{3m} \to \frac{3}{2}\log 2$ cuando $m \to \infty$. Pero $t_{3m+1} = t_{3m} + 1/(4m+1)$ y $t_{3m-1} = t_{3m} - 1/(2m)$, con lo que t_{3m+1} y t_{3m-1} tienen el mismo límite que t_{3m} cuando $m \to \infty$. Por consiguiente, toda suma parcial t_n tiene como límite $\frac{3}{2}\log 2$ cuando $n \to \infty$, con lo cual la suma de la serie (10.57) es $\frac{3}{2}\log 2$.

El ejemplo anterior demuestra que la reordenación de los términos de una serie convergente puede alterar su suma. A continuación demostraremos que esto puede ocurrir tan sólo si la serie dada es *condicionalmente* convergente. Esto es, la reordenación de una serie absolutamente convergente no altera su suma. Antes de demostrarlo, precisaremos lo que se entiende por reordenación.

DEFINICIÓN. *Designemos por* $\mathbf{P} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *el conjunto de los enteros positivos. Sea* f *una función cuyo dominio sea* $\mathbf{P}$ *y cuyo recorrido sea* $\mathbf{P}$, *y supongamos que* f *tiene la propiedad siguiente:*

$$m \neq n \qquad \textit{implica } f(m) \neq f(n).$$

Una tal función f *se llama permutación de* $\mathbf{P}$, *o aplicación uno a uno de* $\mathbf{P}$ *en sí mismo. Si* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *son dos series tales que para todo* $n \geq 1$ *tenemos*

$$b_n = a_{f(n)}$$

para una cierta permutación f, *entonces la serie* $\sum b_n$ *es una reordenada de la* $\sum a_n$.

EJEMPLO. Si $\sum a_n$ representa la serie armónica alternada (10.56) y $\sum b_n$ es la serie (10.57), tenemos $b_n = a_{f(n)}$, siendo f la permutación definida por las fórmulas

$$f(3n + 1) = 4n + 1\,, \qquad f(3n + 2) = 4n + 3\,, \qquad f(3n + 3) = 2n + 2\,.$$

TEOREMA 10.20. *Sea* $\sum a_n$ *una serie absolutamente convergente que tenga suma s. Entonces toda reordenada de* $\sum a_n$ *también converge absolutamente y tiene suma* S.

Demostración. Sea $\sum b_n$ una reordenada, pongamos $b_n = a_{f(n)}$. Observemos primero que $\sum b_n$ converge absolutamente porque $\sum |b_n|$ es una serie de términos no negativos cuyas sumas parciales están acotadas superiormente por $\sum |a_n|$.

Para demostrar que $\sum b_n$ tiene también suma S, introducimos

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\,, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad A_n^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,, \qquad \text{y} \qquad S^* = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,.$$

Pero $A_n \to S$ y $A_n^* \to S^*$ cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, dado un $\epsilon > 0$ cualquiera, existe un N tal que

$$|A_N - S| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |A_N^* - S^*| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Para este valor N podemos elegir M de modo que

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{f(1), f(2), \ldots, f(M)\}\,.$$

Esto es posible debido a que el recorrido de f contiene todos los enteros positivos. Si $n \geq M$, tenemos

$$(10.58)\quad |B_n - S| = |B_n - A_N + A_N - S| \leq |B_n - A_N| + |A_N - S| \leq |B_n - A_N| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Pero también tenemos

$$|B_n - A_N| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{N} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{N} a_k\right|.$$

Los términos $a_1, \ldots, a_N$ desaparecen en la sustracción, con lo que resulta

$$|B_n - A_N| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots = |A_N^* - S^*| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Combinando este resultado con (10.58), vemos que $|B_n - S| < \epsilon$ para todo $n \geq M$, lo que significa que $B_n \to S$ cuando $n \to \infty$. Esto demuestra que la serie reordenada $\sum b_n$ tiene suma S.

La hipótesis de la convergencia absoluta en el teorema 10.20 es esencial. Riemann descubrió que una serie condicionalmente convergente de términos reales siempre se puede reordenar de manera que resulte una serie que converja y tenga una suma prefijada. El razonamiento de Riemann se basa en una propiedad de las series condicionalmente convergentes de términos reales. Tales series $\sum a_n$ tienen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Consideremos las dos nuevas series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ obtenidas tomando sólo los términos positivos o sólo los negativos. Con mayor precisión, definimos a_n^+ y a_n^- como sigue:

$$(10.59)\qquad a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}.$$

Si a_n es positivo, $a_n^+ = a_n$ y $a_n^- = 0$; si a_n es negativo, $a_n^- = a_n$ y $a_n^+ = 0$. Las dos nuevas series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ están relacionadas a la serie dada $\sum a_n$ del modo siguiente.

TEOREMA 10.21. *Dada una serie $\sum a_n$ de términos reales, definamos a_n^+ y a_n^- mediante* (10.59).

a) *Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, las dos series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ divergen.*

b) *Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, las dos series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ convergen, y tenemos*

(10.60)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- .$$

Demostración. Para demostrar la parte a) observemos que $\sum \frac{1}{2}a_n$ converge y $\sum \frac{1}{2}|a_n|$ diverge. Por lo tanto, en virtud de la propiedad de linealidad (teorema 10.3) $\sum a_n^+$ diverge y $\sum a_n^-$ diverge. Para demostrar la parte b), observamos que las dos series $\sum \frac{1}{2}a_n$ y $\sum \frac{1}{2}|a_n|$ convergen, así que según la linealidad (teorema 10.2) las dos series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ convergen. Puesto que $a_n = a_n^+ + a_n^-$, obtenemos también (10.60).

Podemos ahora demostrar fácilmente el teorema de reordenación de Riemann.

TEOREMA 10.22. *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente de términos reales, y sea S un número real dado. Existe una reordenación $\sum b_n$ de $\sum a_n$ aue converge hacia la suma S.*

Demostración. Definamos a_n^+ y a_n^- como se indicó en (10.59). Las dos series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ divergen ya que $\sum a_n$ es condicionalmente convergente. Reordenamos $\sum a_n$ como sigue:

Tomemos, ordenados, los suficientes términos positivos a_n^+ para que su suma exceda a S. Si p_1 es el número de términos positivos necesarios tenemos

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n > S \quad \text{pero} \quad \sum_{n=1}^{q} a_n \le S \quad \text{si} \quad q < p_1 .$$

Siempre es esto posible ya que las sumas parciales de $\sum a_n^+$ tienden a $+\infty$. A esta suma añadimos los términos negativos a_n^- estrictamente necesarios, por ejemplo n_1 términos negativos, de modo que la suma resultante sea menor que S. Esto es posible ya que las sumas parciales de a_n^- tienden a $-\infty$. Así pues, tenemos

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^- < S \quad \text{pero} \quad \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{m} a_n^- \ge S \quad \text{si} \quad m < n_1 .$$

Repetimos el proceso, añadiendo los términos positivos necesarios para hacer que la suma exceda a S, y luego los negativos precisos para que la suma sea menor que S. Continuando de este modo, obtenemos una reordenada $\sum b_n$. Cada suma parcial de $\sum b_n$ difiere de S a lo sumo en un término a_n^+ o en un a_n^-. Pero $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ ya que $\sum a_n$ converge, con lo que las sumas parciales de $\sum b_n$

tienden a S. Esto prueba que la serie reordenada $\sum b_n$ converge y tiene suma S, como se afirmó.

10.22 Ejercicios varios de repaso

1. a) Sea $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$.
   b) Sea $a_n = (n+1)^c - n^c$, donde c es real. Determinar los valores de c para los que la sucesión $\{a_n\}$ converge y aquellos para los que diverge. En el caso de la convergencia, calcular el límite de la sucesión. Recuérdese que c puede ser positivo, negativo o nulo.
2. a) Si $0 < x < 1$, demostrar que $(1 + x^n)^{1/n}$ converge cuando $n \to \infty$ y calcular su límite.
   b) Dados $a > 0$, $b > 0$, calcular $\lim_{n\to\infty}(a^n + b^n)^{1/n}$.
3. Una sucesión $\{a_n\}$ se define en forma recurrente en función de a_1 y a_2 por las fórmulas

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \qquad \text{para} \quad n \geq 2\,.$$

   a) Suponiendo que $\{a_n\}$ converge, calcular el límite de la sucesión en función de a_1 y a_2.
   El resultado es una media aritmética ponderada de a_1 y a_2.
   b) Demostrar que para cualesquiera a_1 y a_2 la sucesión $\{a_n\}$ converge. Se puede suponer que $a_1 < a_2$. [*Indicación*: Considerar $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{2n+1}\}$ separadamente.]
4. Una sucesión $\{x_n\}$ está definida por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$x_1 = 1\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}\,.$$

   Demostrar que la sucesión converge y hallar su límite.
5. Una sucesión $\{x_n\}$ está definida por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$x_0 = 1\,, \qquad x_1 = 1\,, \qquad \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}\,.$$

   Demostrar que la sucesión converge y hallar su límite.
6. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que para cada n se tiene

$$e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$$

   a) Demostrar que $a_n > 0$ implica $b_n > 0$.
   b) Si $a_n > 0$ para todo n y si $\sum a_n$ converge, demostrar que $\sum (b_n/a_n)$ converge.

En los Ejercicios del 7 al 11, averiguar la convergencia de las series que se dan.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$.
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^8(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$.
9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo $a_n = 1/n$ si n es impar, $a_n = 1/n^2$ si n es par.
12. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n^a + 1} - \sqrt{n^a})$$

converge para $a > 2$ y diverge para $a = 2$.
13. Dado $a_n > 0$ para cada n. Dar una demostración o un contraejemplo para cada una de las proposiciones siguientes.

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ converge.
14. Hallar todos los valores reales de c para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^c/(3n)!$ converge.
15. Hallar todos los enteros $a \geq 1$ para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^3/(an)!$ converge.
16. Sean $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ aquellos enteros positivos que no contienen el 0 en su representación decimal. Así por ejemplo, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $\ldots$, $n_9 = 9$, $n_{10} = 11$, $\ldots$, $n_{18} = 19$, $n_{19} = 21$, etc. Demostrar que la serie de los recíprocos $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ converge y tiene una suma menor que 90.

[*Indicación*: Emplear la serie $9 \sum_{n=0}^{\infty} (9/10)^n$ que domina la serie en estudio.]

17. Si a es un número real arbitrario, sea $s_n(a) = 1^a + 2^a + \cdots + n^a$. Determinar el siguiente límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n(a+1)}{n s_n(a)}.$$

(Considerar los valores positivos y negativos de a así como $a = 0$.)
18. a) Si p y q són enteros fijos, $p \geq q \geq 1$, demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=qn}^{pn} \frac{1}{k} = \log \frac{p}{q}.$$

b) La serie que sigue es una reordenada de la serie armónica alternada en la que aparecen alternativamente tres términos positivos seguidos de dos términos negativos:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + + + - - \cdots.$$

Demostrar que la serie converge y que su suma es $\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$.

[*Indicación*: Considerar la suma parcial s_{5n} y utilizar la parte a).]

c) Reordenar la serie armónica alternada, escribiendo alternativamente p términos positivos seguidos de q términos negativos. Aplicar entonces la parte a) para demostrar que esta serie reordenada converge y tiene como suma $\log 2 + \frac{1}{2} \log(p/q)$.

10.23 Integrales impropias

El concepto de integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se introdujo en el capítulo I con las restricciones de que la función f estuviera *definida y acotada* en un *intervalo finito* $[a, b]$. El objeto de la teoría de la integración se puede extender si se aflojan estas restricciones.

Para empezar, se puede estudiar el comportamiento de $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $b \to +\infty$. Esto conduce a la noción de *integral infinita* o también llamada *integral impropia de primera especie* y que se indica por el símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Otra extensión se obtiene cuando se toma el intervalo $[a, b]$ finito, pero f no está acotada en el intervalo. La nueva integral así obtenida (con un paso a límite adecuado) se denomina *integral impropia de segunda especie*. Para distinguir las integrales del capítulo 1 de las integrales impropias, a las primeras se les suele llamar integrales «propias».

Muchas funciones importantes en el Análisis se presentan como integrales impropias de una u otra clase, y se hace un estudio detallado de estas funciones en cursos superiores de Cálculo. Aquí se considerarán sólo los aspectos más elementales de la teoría, y sólo se darán algunas definiciones, teoremas y ejemplos.

Es evidente que las definiciones correspondientes a las integrales impropias tienen un gran parecido con las de las series infinitas. Por tanto, no es sorprendente que muchos de los teoremas elementales sobre series tengan su réplica en la teoría de las integrales impropias.

Si la integral propia $\int_a^b f(x)\,dx$ existe para cada $b \geq a$, se puede definir una nueva función I como sigue:

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{para cada} \quad b \geq a\,.$$

La función I así definida se denomina *integral infinita* o *integral impropia* de primera especie y se indica por medio del símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$. La integral se dice que es *convergente* si el límite

$$\lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{10.61}$$

existe y es finito. En caso contrario se dice que la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es *divergente*. Si el límite en (10.61) existe y es igual a A, se dice que el número A es el *valor* de la integral y se escribe:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = A\,.$$

Esta definición es análoga a la dada para las series infinitas. Los valores de la función $I(b)$ juegan el mismo papel que las «sumas parciales», por lo que

se las llamará «integrales parciales». Obsérvese que el símbolo $\int_a^\infty f(x)$ se usa tanto para la integral como para el valor de la integral cuando ésta converge. (Compárese con la observación hecha hacia el final de la Sección 10.5.)

EJEMPLO 1. La integral impropia $\int_1^\infty x^{-s}\,dx$ diverge si $s \le 1$ y converge si $s > 1$. Para demostrarlo, obsérvese que:

$$I(b) = \int_1^b x^{-s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{1-s}-1}{1-s} & \text{si} \quad s \ne 1\,, \\ \log b & \text{si} \quad s = 1\,. \end{cases}$$

Por tanto, $I(b)$ tiende a un límite finito si y sólo si $s > 1$, en cuyo caso el límite es:

$$\int_1^\infty x^{-s}\,dx = \frac{1}{s-1}\,.$$

El comportamiento de esta integral es análogo al de la serie correspondiente a la función zeta, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$.

EJEMPLO 2. La integral $\int_0^\infty$ sen $x\,dx$ diverge puesto que:

$$I(b) = \int_0^b \operatorname{sen} x\,dx = 1 - \cos b\,,$$

y no tiende a ningún límite cuando $b \to +\infty$.

Las integrales infinitas de la forma $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se definen de manera análoga. Además, si $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ y $\int_c^\infty f(x)\,dx$ son *ambas convergentes* para un c, se dice que la integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es convergente y su valor se define como la suma:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx\,. \tag{10.62}$$

(Es fácil demostrar que es independiente de la elección de c.) La integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ se dice que diverge si una por lo menos de las integrales del segundo miembro de (10.62) diverge.

EJEMPLO 3. La integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,dx$ converge si $a > 0$. En efecto, si $b > 0$, se tiene:

$$\int_0^b e^{-a|x|}\,dx = \int_0^b e^{-ax}\,dx = \frac{e^{-ab}-1}{-a} \to \frac{1}{a} \quad \text{cuando} \quad b \to \infty .$$

Por tanto, $\int_0^{\infty} e^{-a|x|}$ converge y su valor es $1/a$. Por otra parte, si $b > 0$, se tiene:

$$\int_{-b}^{0} e^{-a|x|}\,dx = \int_{-b}^{0} e^{ax}\,dx = -\int_b^0 e^{-at}\,dt = \int_0^b e^{-at}\,dt .$$

Por tanto, $\int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|}\,dx$ también converge y su valor es $1/a$. Es decir, se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,dx = 2/a$. Obsérvese, sin embargo, que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}\,dx$ *diverge* puesto que $\int_{-\infty}^{0} e^{-ax}\,dx$ diverge.

Como en el caso de las series, se tienen también en el caso de las integrales impropias diversos criterios de convergencia. El más sencillo de ellos se refiere a integrandos positivos.

TEOREMA 10.23. *Si la integral propia $\int_a^b f(x)\,dx$ existe para cada $b \geq a$ y si $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M \qquad \textit{para cada } b \geq a .$$

Este teorema es la base del siguiente criterio de comparación.

TEOREMA 10.24. *Si la integral propia $\int_a^b f(x)\,dx$ existe para cada $b \geq a$ y si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$, donde $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ también converge y*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\,dx .$$

Nota. Se dice que la integral $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *domina* la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

TEOREMA 10.25. CRITERIO DE COMPARACIÓN DEL LÍMITE. *Si las dos integrales propias $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ existen para cada $b \geq a$, siendo $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, y si*

(10.63) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c , \qquad \textit{donde} \quad c \neq 0 ,$$

entonces las integrales $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, y, $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ o convergen ambas o divergen ambas.

Nota. Si el límite en (10.63) es 0, sólo se puede concluir que la convergencia de $\int_a^\infty g(x)\,dx$ implica la convergencia de $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Las demostraciones de los teoremas del 10.23 al 10.25 son análogas a los de los correspondientes de series y se dejan como ejercicios.

EJEMPLO 4. Para cada real s, la integral $\int_1^\infty e^{-x}x^s\,dx$ converge, como resulta de la comparación con $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ puesto que $e^{-x}x^s/x^{-2} \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

Las integrales impropias de segunda especie se pueden introducir como sigue: Se supone que f está definida en el intervalo semiabierto $(a, b]$, y que la integral $\int_x^b f(t)\,dt$ existe para cada x que satisface $a < x \le b$. Se define entonces una nueva función I de la manera siguiente:

$$I(x) = \int_x^b f(t)\,dt \qquad \text{si} \quad a < x \le b\,.$$

La función I así definida se denomina *integral impropia de segunda especie* y se indica por el símbolo $\int_{a+}^b f(t)\,dt$. Se dice que la integral *converge* si el límite

(10.64) $$\lim_{x\to a+} I(x) = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt$$

existe y es finito. Si esto no ocurre se dice que la integral $\int_{a+}^b f(t)\,dt$ *diverge.* Si el límite en (10.64) existe y es igual a A, el número A se dice que es el *valor* de la integral y se escribe:

$$\int_{a+}^b f(t)\,dt = A\,.$$

EJEMPLO 5. Sea $f(t) = t^{-s}$ si $t > 0$. Si $b > 0$ y $x > 0$ se tiene:

$$I(x) = \int_x^b t^{-s}\,dt = \begin{cases} \dfrac{b^{1-s} - x^{1-s}}{1 - s} & \text{si} \quad s \ne 1\,, \\ \log b - \log x & \text{si} \quad s = 1\,. \end{cases}$$

Cuando $x \to 0+$, $I(x)$ tiende a un límite finito si y sólo si $s < 1$. Por tanto, la integral $\int_{0+}^b t^{-s}\,dt$ converge si $s < 1$ y diverge si $s \ge 1$.

Este ejemplo se podría tratar de otra forma. Si se hace la sustitución $t = 1/u$, $dt = -u^{-2}\,du$, se obtiene:

$$\int_x^b t^{-s}\,dt = \int_{1/b}^{1/x} u^{s-2}\,du\,.$$

Cuando $x \to 0+$, $1/x \to +\infty$ y por tanto $\int_{0+}^{b} t^{-s}\,dt = \int_{1/b}^{\infty} u^{s-2}\,du$, siempre que la última integral converja. En virtud del ejemplo 1, ésta converge si y sólo si $s - 2 < -1$, es decir, $s < 1$.

El ejemplo anterior ilustra un hecho geométrico notable. Considérese la función f definida por $f(x) = x^{-3/4}$ para $0 < x \leq 1$. La integral $\int_{0+}^{1} f(x)\,dx$ converge, pero la integral $\int_{0+}^{1} \pi f^2(x)\,dx$ diverge. Geométricamente, esto significa que el conjunto del plano limitado por el eje x, $y = f(x)$, $x = 0$ y $x = 1$ tiene área finita, pero que el sólido obtenido por su rotación alrededor del eje x tiene volumen infinito.

Las integrales impropias de la forma $\int_{a}^{b-} f(t)\,dt$ se definen de manera análoga. Si las dos integrales $\int_{a+}^{c} f(t)\,dt$ y $\int_{c}^{b-} f(t)\,dt$ son *ambas convergentes*, se escribe

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt = \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b-} f(t)\,dt\,.$$

Nota. Algunos autores escriben $\int_{a}^{b}$ en vez de $\int_{a+}^{b-}$.

La definición se puede extender (de manera obvia) a un número finito cualquiera de sumandos. Por ejemplo, si f no está definida en dos puntos $c < d$ interiores a un intervalo $[a, b]$ se dice que la integral impropia $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ converge y tiene el valor $\int_{a}^{c-} f(t)\,dt + \int_{c+}^{d-} f(t)\,dt + \int_{d+}^{b} f(t)\,dt$, siempre que cada una de estas integrales converja. Aún más, se pueden considerar combinaciones «mixtas» tales como $\int_{a+}^{b} f(t)\,dt + \int_{b}^{\infty} f(t)\,dt$ que se escribe $\int_{a+}^{\infty} f(t)\,dt$ o combinaciones «mixtas» de la forma $\int_{a}^{b-} f(t)\,dt + \int_{b+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\,dt$ que se escribe simplemente $\int_{a}^{\infty} f(t)\,dt$.

EJEMPLO 6. *La función gamma.* Si $s > 0$, la integral $\int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\,dt$ converge. Esta integral se ha de interpretar como una suma, de la forma:

$$(10.65) \qquad \int_{0+}^{1} e^{-t} t^{s-1}\,dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\,dt\,.$$

La segunda integral converge para todo real s, en virtud del ejemplo 4. Para estudiar la primera integral se pone $t = 1/u$ y se observa que:

$$\int_{x}^{1} e^{-t} t^{s-1}\,dt = \int_{1}^{1/x} e^{-1/u} u^{-s-1}\,du\,.$$

Pero $\int_{1}^{\infty} e^{-1/u} u^{-s-1}\,du$ converge para $s > 0$ por comparación con $\int_{1}^{\infty} u^{-s-1}\,du$. Por tanto, la integral $\int_{0+}^{1} e^{-t} t^{s-1}\,dt$ converge para $s > 0$. Cuando $s > 0$ la suma en (10.65) se indica por $\Gamma(s)$. La función Γ así definida se llama *función gamma*,

introducida por primera vez por Euler en 1729. Tiene la propiedad importante que $\Gamma(n + 1) = n!$ cuando n es un entero cualquiera ≥ 0. (Para la demostración, véase Ejercicio 19 de la Sección 10.24.)

Los criterios de convergencia dados en los teoremas 10.23 al 10.25 tienen análogos para las integrales impropias de segunda especie. El lector no tendrá dificultad en formular él mismo tales criterios.

10.24 Ejercicios

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 10 estudiar la convergencia de la integral impropia correspondiente.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}\, dx.$

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx.$

5. $\displaystyle\int_{0+}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$

6. $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx.$

7. $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\log x}{1 - x}\, dx.$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x}\, dx.$

9. $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{\sqrt{x}\log x}.$

10. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^s}.$

11. Para un cierto valor real C, la integral

$$\int_2^{\infty} \left(\frac{Cx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x + 1}\right) dx$$

converge. Determinar C y calcular la integral.

12. Para un cierto valor real C, la integral

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2C} - \frac{C}{x + 1}\right) dx$$

converge. Determinar C y calcular la integral.

13. Para un cierto valor real C la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}} - \frac{C}{x + 1}\right) dx$$

converge. Determinar C y calcular la integral.

14. Hallar los valores de a y b tales que

$$\int_1^\infty \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1\right) dx = 1 .$$

15. ¿Para qué valores de las constantes a y b existe y es igual a 1 el límite siguiente?

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{-p}^{p} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x^2 + x + 1} dx .$$

16. a) Demostrar que

$$\lim_{h \to 0+} \left(\int_{-1}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_h^1 \frac{dx}{x} \right) = 0 \qquad \text{y que} \qquad \lim_{h \to +\infty} \int_{-h}^{h} \operatorname{sen} x \, dx = 0 .$$

b) Decir si convergen o divergen las siguientes integrales impropias.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx .$$

17. a) Demostrar que la integral $\int_{0+}^{1} (\operatorname{sen} x)/x \, dx$ converge.
b) Probar que $\lim_{x \to 0+} x \int_x^1 (\cos t)/t^2 \, dt = 1$.
c) Decidir si la integral $\int_{0+}^{1} (\cos t)/t^2 \, dt$ converge o diverge.

18. a) Si f es monótona decreciente para todo $x \geq 1$ y si $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, demostrar que la integral $\int_1^\infty f(x)\, dx$ y la serie $\sum f(n)$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

[*Indicación*: Recuérdese la demostración del criterio de la integral.]

b) Dar un ejemplo de una función f no monótona para la cual la serie $\sum f(n)$ converja y la integral $\int_1^\infty f(x)\, dx$ diverja.

19. Sea $\Gamma(s) = \int_{0+}^{\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt$ para $s > 0$ (función gamma). Aplicar la integración por partes para probar que $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$. Después demostrar por inducción que $\Gamma(n + 1) = n!$ para n entero positivo.

Cada uno de los Ejercicios 20 al 25 contiene una proposición, no necesariamente cierta, sobre una función f definida para todo $x \geq 1$. En cada uno de ellos, n representa un entero positivo, y I_n la integral $\int_1^n f(x)\, dx$ que se supone que existe siempre. De cada una dar la demostración o un contraejemplo.

20. Si f es monótona decreciente y si $\lim_{n \to \infty} I_n$ existe, entonces la integral $\int_1^\infty f(x)\, dx$ converge.
21. Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{n \to \infty} I_n = A$, entonces $\int_1^\infty f(x)\, dx$ converge y su valor es A.
22. Si la sucesión $\{I_n\}$ converge, la integral $\int_1^\infty f(x)\, dx$ converge.
23. Si f es positiva y si $\lim_{n \to \infty} I_n = A$, entonces $\int_1^\infty f(x)\, dx$ converge y vale A.

24. Supuesto que $f'(x)$ existe para cada $x \geq 1$ y que existe una constante $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \geq 1$; si $\lim_{n\to\infty} I_n = A$ la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge y su valor es A.
25. Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

11

SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

11.1 Convergencia puntual de sucesiones de funciones

En el capítulo 10 hemos considerado sucesiones cuyos términos eran números reales o complejos. Ahora queremos considerar sucesiones $\{f_n\}$ cuyos términos sean *funciones* reales o complejas que tengan un dominio común en la recta real o en el plano complejo. Para cada x del dominio, podemos construir otra sucesión $\{f_n(x)\}$ de números cuyos términos son los correspondientes valores de las funciones. Designemos con S el conjunto de puntos x para los que esta sucesión converge. La función f definida en S por la igualdad

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{si} \quad x \in S,$$

se llama la *función límite* de la sucesión $\{f_n\}$, y decimos que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente* hacia f en el conjunto S.

El estudio de tales sucesiones está en principio relacionado con el tipo de pregunta siguiente: Si cada término de una sucesión $\{f_n\}$ tiene una cierta propiedad, como, por ejemplo, la continuidad, la derivabilidad o la integrabilidad, ¿en qué condiciones se conserva esa propiedad en la función límite? Por ejemplo, si cada función f_n es continua en un punto x, ¿lo es también la función límite f? El ejemplo que sigue demuestra que, en general, no lo es.

EJEMPLO 1. *Sucesión de funciones continuas con función límite discontinua.* Sea $f_n(x) = x^n$ si $0 \leq x \leq 1$. En la figura 11.1 se han representado algunos términos. La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente en el intervalo cerrado $[0, 1]$, y su función límite f viene dada por la fórmula

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Obsérvese que la función límite f es discontinua en 1, si bien cada término de la sucesión es continua en todo el intervalo [0, 1].

EJEMPLO 2. *Sucesión para la que* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. Sea $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ para $0 \leq x \leq 1$. En este ejemplo, la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia una función límite f que es cero en todo punto del intervalo cerrado [0, 1]. En la figura 11.2 se han representado los primeros términos de la sucesión. La integral de f_n en el intervalo [0, 1] viene dada por

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = -\frac{n}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}.$$

Por consiguiente tenemos $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, pero $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$. Dicho de otro modo, el límite de las integrales no es igual a la integral del límite. Este

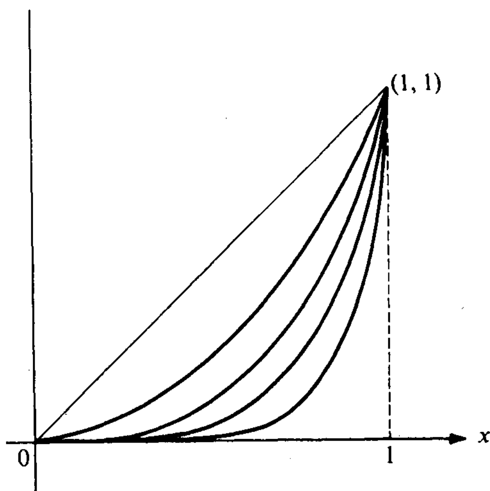


FIGURA 11.1 *Sucesión de funciones continuas con función límite discontinua.*

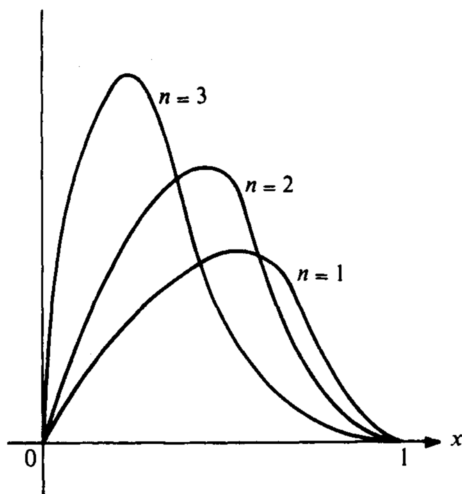


FIGURA 11.2 *Sucesión de funciones para la que* $f_n \to 0$ *en* [0, 1] *pero* $\int_0^1 f_n \to \frac{1}{2}$ *cuando* $n \to \infty$.

ejemplo prueba que las dos operaciones de «paso al límite» e «integración» no siempre son intercambiables. (Ver también los ejercicios 17 y 18 de la sección 11.7)

George G. Stokes (1819-1903), Phillip L. v. Seidel (1821-1896), y Karl Weierstrass fueron los primeros en comprobar que se necesitaba alguna condición

adicional para justificar el intercambio de esas operaciones. En 1848, Stokes y Seidel (independientemente y casi al mismo tiempo) introdujeron un concepto ahora llamado *convergencia uniforme* y demostraron que para una sucesión uniformemente convergente las operaciones de paso al límite e integración pueden intercambiarse. Más tarde Weierstrass demostró que el concepto es de gran importancia en Análisis superior. En la Sección próxima introducimos el concepto y demostramos su relación con la continuidad y la integración.

11.2 Convergencia uniforme de sucesiones de funciones

Sea $\{f_n\}$ una sucesión que converge puntualmente en un conjunto S hacia una función límite f. Según la definición de límite, eso significa que para cada x de S y para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N, que depende de x y de ϵ, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ con tal que $n \geq N$. Si el mismo N sirve para *todos* los puntos x de S, entonces la convergencia se llama *uniforme* en S. Esto es, tenemos la siguiente

DEFINICIÓN. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ se llama uniformemente convergente hacia f en un conjunto S si para todo $\epsilon > 0$ existe un N (dependiente tan sólo de ϵ) tal que $n \geq N$ implica*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \textit{para todo } x \textit{ de } S.$$

Expresamos simbólicamente eso escribiendo

$$f_n \to f \quad \textit{uniformemente en } S.$$

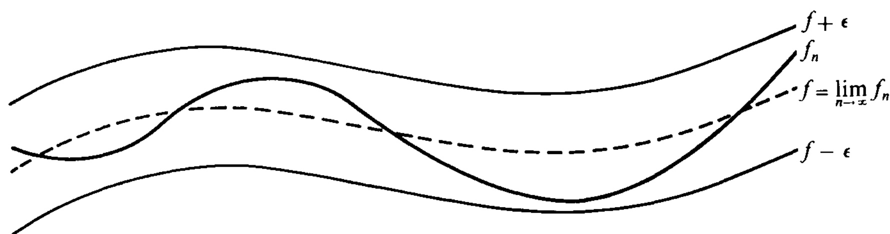


FIGURA 11.3 *Significado geométrico de la convergencia uniforme. Si $n \geq N$, toda la gráfica de cada f_n está situada a distancia menor que ϵ de la gráfica de la función límite f.*

Cuando las funciones f_n son de valores reales, existe una interpretación geométrica sencilla de la convergencia uniforme. La desigualdad $f_n(x) - f(x) < \epsilon$ es equivalente al par de desigualdades

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon .$$

Si éstas son ciertas para todo $n \geq N$ y todo x de S, entonces toda la gráfica de f_n correspondiente a S está en una banda de altura 2ϵ simétricamente situada respecto de la gráfica de f, como se indica en la figura 11.3.

11.3 Convergencia uniforme y continuidad

Demostramos a continuación que la convergencia uniforme transmite la continuidad de los términos de la sucesión $\{f_n\}$ a la función límite f.

TEOREMA 11.1. *Si $f_n \to f$ uniformemente en un intervalo S y cada función f_n es continua en cada punto p de S, la función límite f también es continua en p.*

Demostración. Probaremos que para todo $\epsilon > 0$ existe un entorno $N(p)$ tal que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ siempre que $x \in N(p) \cap S$. Si $\epsilon > 0$ está dado, existe un entero N tal que $n \geq N$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo } x \text{ de } S .$$

Puesto que f_N es continua en p, existe un entorno $N(p)$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo } x \text{ de } N(p) \cap S .$$

Por lo tanto, para todo x de $N(p) \cap S$, tenemos

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \leq$$
$$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| .$$

Puesto que cada término del segundo miembro es $<\epsilon/3$, encontramos $|f(x) - f(p)| < \epsilon$, lo cual completa la demostración.

El teorema anterior tiene una aplicación importante a las series de funciones. Si los valores de las funciones $f_n(x)$ son sumas parciales de otras funciones, por ejemplo

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) ,$$

y si $f_n \to f$ puntualmente en S, tenemos entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

para cada x de S. En este caso, se dice que la serie $\sum u_k$ converge puntualmente hacia la función suma f. Si $f_n \to f$ uniformemente en S, decimos que la serie $\sum u_k$ converge uniformemente hacia f. Si cada término u_k es una función continua en un punto p de S, cada suma parcial f_n también es continua en p con lo que, en virtud del teorema 11.1, obtenemos el siguiente corolario.

TEOREMA 11.2. *Si una serie de funciones $\sum u_k$ converge uniformemente hacia la función suma f en un conjunto S, y si cada término u_k es continuo en un punto p de S, la suma f también es continua en p.*

Nota: También podemos expresar simbólicamente este resultado escribiendo

$$\lim_{x \to p} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to p} u_k(x) .$$

Expresamos esto diciendo que para una serie uniformemente convergente podemos intercambiar el símbolo de paso al límite con el de sumación, o que podemos pasar al límite término a término.

11.4 Convergencia uniforme e integración

El siguiente teorema demuestra que la convergencia uniforme nos permite intercambiar el símbolo de integración con el de paso al límite.

TEOREMA 11.3. *Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en un intervalo $[a, b]$, y que cada función f_n es continua en $[a, b]$. Definamos una nueva sucesión $\{g_n\}$ mediante*

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt \qquad si \quad x \in [a, b] ,$$

y pongamos

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt .$$

Entonces $g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$. Simbólicamente, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)\, dt = \int_a^x \lim_{n \to \infty} f_n(t)\, dt .$$

Demostración. La demostración es muy sencilla. Dado $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que $n \geq N$ implica

$$f_n(t) - f(t) < \frac{\epsilon}{b - a} \qquad \text{para todo } t \text{ de } [a, b] .$$

Luego, si $x \in [a, b]$ y si $n \geq N$, tenemos

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))\, dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dt = \epsilon ,$$

con lo que $g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$.

Otra vez, como corolario, tenemos un resultado análogo para las series.

TEOREMA 11.4. *Supongamos que una serie de funciones $\sum u_k$ converge uniformemente hacia la función suma f en un intervalo $[a, b]$, siendo cada u_k continua en $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, definimos*

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\, dt \qquad \text{y} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\, dt .$$

Entonces $g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$. Dicho de otro modo, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\, dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\, dt$$

o

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\, dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, dt .$$

Demostración. Apliquemos el teorema 11.3 a la sucesión de sumas parciales $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) ,$$

y observemos que $\int_a^x f_n(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\, dt$.

Con frecuencia el teorema 11.4 se expresa diciendo que una serie uniformemente convergente puede integrarse término a término.

11.5 Una condición suficiente para la convergencia uniforme

Weierstrass indicó un criterio para probar que ciertas series son uniformemente convergentes. El criterio es aplicable siempre que la serie dada pueda ser dominada por una serie numérica de términos positivos.

TEOREMA 11.5. CRITERIO M DE WEIERSTRASS. *Dada una serie de funciones* $\sum u_n$ *que converge puntualmente hacia una función* f *en un conjunto* S. *Si existe una serie numérica convergente de términos positivos* $\sum M_n$ *tal que*

$$0 \leq |u_n(x)| \leq M_n \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y todo } x \text{ de } S,$$

entonces la serie $\sum u_n$ *converge uniformemente en* S.

Demostración. El criterio de comparación prueba que la serie $\sum u_n(x)$ converge absolutamente para cada x de S. Para cada x de S, tenemos

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k .$$

Puesto que la serie $\sum M_k$ converge, para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $n \geq N$ implica

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon .$$

Esto prueba que

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ y todo x de S. Por lo tanto, la serie $\sum u_n$ converge uniformemente hacia f en S.

La derivación término a término de una serie funcional cualquiera es asunto más delicado, en cuanto a la conservación de propiedades, que la integración término a término. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen } nx)/n^2$ converge para todo valor de x ya que es dominada por $\sum 1/n^2$. Además, la convergencia es uniforme en todo el eje real. No obstante, la serie obtenida derivando término a término es $\sum (\cos nx)/n$, y ésta *diverge* cuando $x = 0$. Este ejemplo demuestra que la derivación término a término puede destruir la convergencia, aun cuando la serie original sea uniformemente convergente. Por consiguiente, el problema de justificar el intercambio de las operaciones de derivación y sumación es, en general, más serio que en el caso de la integración. Con este ejemplo el lector puede comprobar que las manipulaciones corrientes con sumas finitas no siempre pueden efectuarse con series, incluso en el caso en que las series de que se trate sean uniformemente convergentes. A continuación no referimos a unas series de funciones de tipo especial, llamadas series de potencias, que pueden manejarse en muchas ocasiones como si fueran sumas finitas.

11.6 Series de potencias. Círculo de convergencia

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

se llama serie de potencias de $z - a$. Los números z, a, y los coeficientes a_n son complejos. Con cada serie de potencias está asociado un círculo, llamado *círculo de convergencia,* tal que la serie converge absolutamente para todo z interior al mismo, y diverge para todo z exterior. El centro del círculo es a y su radio r se

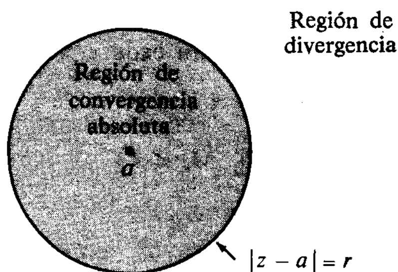


FIGURA 11.4 *Círculo de convergencia de una serie de potencias.*

llama *radio de convergencia.* (Ver figura 11.4.) En casos extremos, el círculo puede reducirse a un solo punto a, en cuyo caso $r = 0$, o puede consistir en todo el plano complejo, en cuyo caso decimos que $r = +\infty$. La existencia del círculo de convergencia se demuestra en el teorema 11.7.

El comportamiento de la serie en los puntos frontera del círculo no puede predecirse. Con ejemplos se ve que puede haber convergencia en ninguno, en alguno, o en todos los puntos frontera.

Para gran parte de las series de potencias que en la práctica se presentan, el radio de convergencia puede determinarse mediante el criterio del cociente o el de la raíz, como en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 1. Para hallar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum z^n/n!$, aplicamos el criterio del cociente. Si $z \neq 0$, la razón de términos consecutivos tiene como valor absoluto

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1}\,.$$

Puesto que este cociente tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$, llegamos a la conclusión de que la serie converge absolutamente para todo complejo $z \neq 0$. También converge para $z = 0$, con lo que el radio de convergencia es $+\infty$.

Puesto que el término general de una serie convergente debe tender a 0, el resultado del ejemplo anterior prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$$

para todo z complejo. Esto es, $n!$ «crece más rápidamente» que la potencia n-sima de cualquier número complejo z fijo cuando $n \to \infty$.

EJEMPLO 2. Para averiguar la convergencia de la serie $\sum n^2 3^n z^n$, utilizamos el criterio de la raíz. Tenemos

$$(n^2 3^n |z|^n)^{1/n} = 3\,|z|\,n^{2/n} \to 3\,|z| \text{ cuando } \quad n \to \infty\,,$$

ya que $n^{2/n} = (n^{1/n})^2$ y $n^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, la serie converge absolutamente si $|z| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|z| > \frac{1}{3}$. El radio de convergencia es $\frac{1}{3}$. Esta serie de potencias diverge en todo punto frontera debido a que, si $|z| = \frac{1}{3}$, el término general tiene valor absoluto n^2.

EJEMPLO 3. Para cada una de las series $\sum z^n/n$ y $\sum z^n/n^2$, el criterio del cociente nos dice que el radio de convergencia es 1. La primera diverge en el punto frontera $z = 1$ pero converge en todos los demás puntos frontera (ver Sección 10.19). La segunda serie converge en todo punto frontera puesto que es dominada por $\sum 1/n^2$.

Terminamos esta Sección demostrando que toda serie de potencias posee círculo de convergencia. La demostración se apoya en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.6. *Si la serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge en un punto $z \neq 0$, por ejemplo para $z = z_1$, se tiene:*

a) *La serie converge absolutamente para todo z siendo $|z| < |z_1|$.*

b) *La serie converge uniformemente en todo disco circular de centro en 0 y radio $R < |z_1|$.*

Demostración. Puesto que $\sum a_n z_1^n$ converge, su término general tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$. En particular, $|a_n z_1^n| < 1$ a partir de un cierto $n \geq N$. Sea S un círculo de radio R, siendo $0 < R < |z_1|$. *Si* $z \in S$ y $n \geq N$, tenemos $|z| \leq R$ y

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq \left|\frac{R}{z_1}\right|^n = t^n\,, \qquad \text{donde} \quad t = \left|\frac{R}{z_1}\right|.$$

Puesto que $0 < t < 1$, la serie $\sum a_n z^n$ es dominada por la serie geométrica convergente $\sum t^n$. En virtud del criterio M de Weierstrass, la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en S. Esto prueba b). El razonamiento prueba también que la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente para cada z de S. Pero ya que cada z tal que $|z| < |z_1|$ está en un cierto círculo S de radio $R < |z_1|$, esto prueba también la parte a).

TEOREMA 11.7. EXISTENCIA DE UN CÍRCULO DE CONVERGENCIA. *Si la serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge por lo menos para un $z \neq 0$, por ejemplo para $z = z_1$, y diverge por lo menos para un z, por ejemplo para $z = z_2$, existe un número real positivo r tal que la serie converge absolutamente si $|z| < r$ y diverge si $|z| > r$.*

Demostración. Designemos con A el conjunto de todos los números positivos $|z|$ para los que la serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge. El conjunto A no es vacío ya que, por hipótesis, contiene $|z_1|$. Asimismo, ningún número de A puede ser mayor que $|z_2|$ (debido al teorema 11.6). Luego, $|z_2|$ es una cota superior de A. Puesto que A es un conjunto no vacío de números positivos acotado superiormente, tiene extremo superior que designamos con r. Es evidente que $r > 0$ ya que $r > |z_1|$. En virtud del teorema 11.6 ningún número de A puede superar a r. Por consiguiente, la serie diverge si $|z| > r$. Pero es fácil demostrar que la serie converge *absolutamente* si $|z| < r$. Si $|z| < r$, existe un número positivo x en A tal que $|z| < x < r$. Según el teorema 11.6, la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente. Esto completa la demostración.

Como es natural, existe un teorema análogo para series de potencias de $z - a$ que puede deducirse del caso que acabamos de tratar, introduciendo el cambio de variable $Z = z - a$. El círculo de convergencia tiene su centro en a, como se ve en la figura 11.4.

11.7 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 16, determinar el radio de convergencia r de las series de potencias que se dan. En los Ejercicios del 1 al 10, averiguar la convergencia en los puntos frontera si r es finito.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)2^n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{2n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} [1-(-2)^n]z^n.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}.$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z+1)^n}{n^2+1}.$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}z^n, \qquad 0 < a < 1.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} z^n}{n}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^3 z^n.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen} an)z^n, \qquad a > 0.$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{senh} an)z^n, \qquad a > 0.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n+b^n}, \qquad a > 0, b > 0.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right) z^n, \qquad a > 0, b > 0.$

17. Si $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ para $n = 1, 2, \ldots,$ y x real, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx .$$

Este ejemplo demuestra que las operaciones de integración y de paso al límite no siempre pueden intercambiarse.

18. Sea $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n$, y para cada x real fijo sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0) .$$

Este ejemplo prueba que las operaciones de derivación y de paso al límite no siempre pueden intercambiarse.

19. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} nx)/n^2$ converge para todo real x, y designemos su suma con $f(x)$. Demostrar que f es continua en $[0, \pi]$, y utilizar el teorema 11.4 para demostrar que

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} .$$

20. Se sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{si} \quad 0 \le x \le 2\pi .$$

Utilizar esta fórmula y el teorema 11.4 para deducir las siguientes fórmulas

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

11.8 Propiedades de las funciones representadas por series reales de potencias

En esta Sección nos limitamos a series *reales de potencias,* esto es a series de la forma $\sum a_n(z - a)^n$ en las que z, a y los coeficientes a_n son todos números reales. Escribiremos x en lugar de z. El círculo de convergencia limita en el eje real un intervalo $(a - r, a + r)$ simétrico respecto al punto a; a tal intervalo lo llamamos *intervalo de convergencia* de la serie real de potencias $\sum a_n(x - a)^n$. El número r se llama radio de convergencia. (Véase figura 11.5).

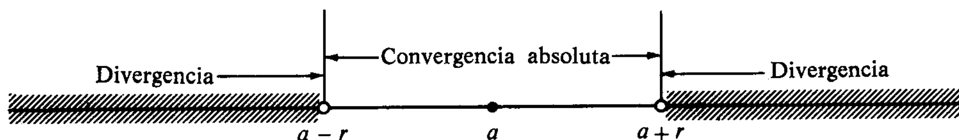


FIGURA 11.5 *Intervalo de convergencia de una serie real de potencias.*

Cada serie real de potencias define una función suma cuyo valor en cada x del intervalo de convergencia viene dado por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n .$$

Se dice que la serie *representa la función* f en el intervalo de convergencia, y se la denomina el *desarrollo en serie* de f según las potencias de a.

Existen dos problemas básicos acerca de los desarrollos en serie de potencias que aquí nos interesan:

1) Dada la serie, hallar propiedades de la función suma f.

2) Dada una función f, ver si puede ser o no representada por una serie de potencias. Resulta que sólo algunas funciones especiales poseen desarrollo en serie de potencias. Sin embargo la clase de tales funciones contiene la mayor parte de los ejemplos que se presentan en la práctica, y por tanto su estudio es de gran importancia. Volvamos ahora a la discusión de la cuestión 1).

El teorema 11.6 nos dice que la serie de potencias converge absolutamente para cada x del intervalo abierto $(a - r, a + r)$, y que converge uniformemente

en todo subintervalo cerrado $[a - R, a + R]$, donde $0 < R < r$. Puesto que cada término de la serie de potencias es una función continua en todo el eje real, resulta del teorema 11.2 que la función suma f es continua en todo subintervalo cerrado $[a - R, a + R]$, y por tanto en el intervalo abierto $(a - r, a + R)$. Asimismo, el teorema 11.4 nos dice que podemos integrar la serie de potencias término a término en todo subintervalo cerrado $[a - R, a + R]$. Estas propiedades de las funciones representadas por series de potencias quedan concretadas en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.8. *Si una función f está representada por la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n \tag{11.1}$$

en un intervalo abierto $(a - r, a + r)$, es continua en ese intervalo, y su integral en cualquier subintervalo cerrado puede calcularse integrando la serie término a término. En particular, para todo x de $(a - r, a + r)$, tenemos

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t - a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n + 1}(x - a)^{n+1}$$

El teorema 11.8 también demuestra que el radio de convergencia de la serie integrada es por lo menos igual al de la serie original. Demostraremos ahora que ambas series tienen exactamente el mismo radio de convergencia. Demostremos primero que una serie de potencias puede derivarse término a término en el interior de su intervalo de convergencia.

TEOREMA 11.9. *Sea f la función representada por la serie* (11.1) *en el intervalo de convergencia $(a - r, a + r)$. Entonces tenemos:*

a) *La serie derivada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - a)^{n-1}$ tiene también radio de convergencia r.*

b) *La derivada $f'(x)$ existe para cada x del intervalo de convergencia y viene expresada por*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - a)^{n-1}.$$

Demostración. Para simplificar, supongamos en la demostración $a = 0$. Demostremos primero que la serie derivada converge absolutamente en el intervalo

$(-r, r)$. Elijamos cualquier x positivo tal que $0 < x < r$, y sea h un número positivo tal que $0 < x < x + h < r$. Entonces las series de $f(x)$ y de $f(x + h)$ son absolutamente convergentes. Luego, podemos escribir

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{11.2}$$

La serie del segundo miembro es absolutamente convergente ya que es una combinación lineal de series convergentes. A continuación apliquemos el teorema del valor medio para escribir

$$(x+h)^n - x^n = hnc_n^{n-1},$$

donde $x < c_n < x + h$. Luego, la serie (11.2) es idéntica a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n c_n^{n-1} \tag{11.3}$$

que debe ser absolutamente convergente, puesto que la de la igualdad 11.2 lo es. La serie (11.3) no es ya una serie de potencias, pero domina la serie de potencias $\sum na_n x^{n-1}$, con lo que esta última serie debe ser absolutamente convergente para ese valor de x. Esto demuestra que el radio de convergencia de la serie derivada $\sum na_n x^{n-1}$ es por lo menos igual a r. Por otra parte, el radio de convergencia de la serie derivada no puede exceder a r porque esta serie derivada domina la original $\sum a_n x^n$. Esto prueba la parte a).

Para demostrar la parte b), sea g la función suma de la serie derivada,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

Aplicando el teorema 11.8 a g, podemos integrar término a término en el intervalo de convergencia obteniendo

$$\int_0^x g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0 .$$

Puesto que g es continua, el primer teorema fundamental del Cálculo nos dice que $f'(x)$ existe y es igual a $g(x)$ para cada x del intervalo de convergencia. Esto demuestra b).

Nota: Puesto que toda serie de potencias $\sum a_n(x - a)^n$ puede obtenerse derivando su serie integrada, $\sum a_n(x - a)^{n+1}/(n + 1)$, el teorema 11.9 nos dice que las dos series tienen el mismo radio de convergencia.

Los teoremas 11.8 y 11.9 justifican las manipulaciones formales de la Sección 10.8 en donde obtuvimos varios desarrollos en serie de potencias utilizando la derivación y la integración término a término de la serie geométrica. En particular, estos teoremas establecen la validez de los desarrollos

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

siempre que x esté en el intervalo abierto $-1 < x < 1$.

Como una consecuencia más del teorema 11.9, obtenemos que la función suma de una serie de potencias tiene derivadas de *todo* orden y que pueden ser calculadas por derivación reiterada término a término de la serie de potencias. Si $f(x) = \sum a_n(x-a)^n$ y derivamos esta fórmula k veces y ponemos luego $x = a$ en el resultado, encontramos que $f^{(k)}(a) = k!a_k$, con lo cual el coeficiente k-ésimo a_k viene dado por la fórmula

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Esta fórmula también es válida para $k = 0$ si interpretamos $f^{(0)}(a)$ como $f(a)$. Así pues, el desarrollo de f en serie de potencias tiene la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{11.4}$$

Esta propiedad puede formularse como un *teorema de unicidad* para los desarrollos en serie de potencias.

TEOREMA 11.10. *Si dos series de potencias* $\sum a_n(x-a)^n$ *y* $\sum b_n(x-a)^n$ *tienen la misma función suma* f *en un cierto entorno del punto* a, *entonces las dos series son iguales término a término; en realidad, tenemos* $a_n = b_n = f^{(n)}(a)/n!$ *para cada* $n \geq 0$.

La igualdad (11.4) demuestra también que las sumas parciales de una serie de potencias son sencillamente los polinomios de Taylor de la función suma en el punto a. En otras palabras, si una función f es representable por una serie de potencias en un intervalo $(a - r, a + r)$, entonces la sucesión de polinomios de Taylor $\{T_n f(x; a)\}$ engendrada en a por f converge puntualmente en ese intervalo hacia la función suma f. Además, la convergencia es uniforme en todo subintervalo cerrado del intervalo de convergencia.

11.9 Serie de Taylor generada por una función

Volvamos ahora al segundo problema que surgió al comenzar la Sección precedente. Esto es, dada una función f, averiguar si es o no desarrollable en serie de potencias en un cierto intervalo abierto en torno al punto a.

Sabemos por lo que se acaba de demostrar que tal función debe tener necesariamente derivadas de todo orden en un cierto intervalo abierto en torno al punto a y que los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias son los dados por la igualdad (11.4). Supongamos, entonces, que partimos de una función f que tenga derivadas de cualquier orden en un intervalo abierto en torno al punto a. Diremos que una tal función es *infinitamente* derivable en ese intervalo. Podemos entonces *formar* la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{11.5}$$

Esta se llama *serie de Taylor generada por f en a.* Formulemos ahora dos preguntas: ¿Converge esa serie para cualquier otro x distinto del $x = a$? Si es así, ¿su suma es igual a $f(x)$? Aunque sorprenda, la contestación a esas preguntas es, en general, «no». La serie puede ser o no convergente para $x \neq a$ y, si lo es, su suma puede o no coincidir con $f(x)$. En el Ejercicio 24 de la Sección 11.13 se da un ejemplo de una serie que converge hacia una suma distinta de $f(x)$.

Una condición necesaria y suficiente para poder contestar afirmativamente las dos preguntas, puede conseguirse usando la fórmula de Taylor con resto, que da un desarrollo *finito* de la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x). \tag{11.6}$$

La suma finita es el polinomio de Taylor de grado n generado por f en a, y $E_n(x)$ es el error cometido al aproximar f con su polinomio de Taylor. Si hacemos $n \to \infty$ en (11.6), vemos que la serie de potencias (11.5) convergerá hacia $f(x)$ si y sólo si el término de error tiende a 0. En la Sección que sigue hacemos la discusión de una condición suficiente para que el término de error tienda a 0.

11.10 Condición suficiente para la convergencia de una serie de Taylor

En el teorema 7.6 se demostró que el término de error en la fórmula de Taylor puede expresarse como una integral

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \tag{11.7}$$

en cualquier intervalo en torno al punto a en el que $f^{(n+1)}$ sea continua. Por consiguiente, si f es indefinidamente derivable, tenemos siempre esa representación del error, con lo que la serie de Taylor converge hacia $f(x)$ si y sólo si la integral tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$.

La integral se puede poner en una forma algo más útil por medio de un cambio de variable. Escribamos

$$t = x + (a - x)u\,, \qquad dt = -(x - a)\,du\,,$$

y observemos que u varía de 1 a 0 cuando t varía de a a x. Por tanto, la integral (11.7) se convierte en

$$(11.8) \qquad E_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}[x + (a - x)u]\,du\,.$$

Esta forma del error nos permite dar la siguiente condición suficiente para la convergencia de una serie de Taylor.

TEOREMA 11.11. *Si f es infinitamente derivable en un intervalo abierto $I = (a - r, a + r)$, y si existe una constante positiva A tal que*

$$(11.9) \qquad |f^{(n)}(x)| \le A^n \quad \textit{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

y todo x de I, entonces la serie de Taylor generada por f en a converge hacia $f(x)$ para cada x de I.

Demostración. Utilizando la desigualdad (11.9) de la fórmula integral (11.8), obtenemos la estimación

$$0 \le |E_n(x)| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{n!}A^{n+1}\int_0^1 u^n\,du = \frac{|x-a|^{n+1}A^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{B^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

en donde $B = A|x - a|$. Pero para todo B, $B^n/n!$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$, así que $E_n(x) \to 0$ para cada x de I.

11.11 Desarrollos en serie de potencias de las funciones exponencial y trigonométricas

Las funciones seno y coseno y todas sus derivadas están acotadas por el número 1 en todo el eje real. Por consiguiente, la desigualdad (11.9) es válida con

$A = 1$ si $f(x) = \operatorname{sen} x$ o si $f(x) = \cos x$, y tenemos los desarrollos en serie

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

válidos para todo x real. Para la función exponencial, $f(x) = e^x$, tenemos $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo x, así que en cualquier intervalo finito $(-r, r)$ tenemos $e^x \leq e^r$. Por consiguiente, (11.9) se satisface para $A = e^r$. Puesto que r es cualquiera, esto demuestra que el siguiente desarrollo en serie de potencias es válido para todo x real:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Los anteriores desarrollos en series de potencias del seno y del coseno se pueden tomar como punto de partida de un estudio completamente analítico de las funciones trigonométricas. Tomando estas series como *definiciones* del seno y del coseno, es posible deducir sólo de ellas todas las propiedades analíticas y algebraicas de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, de las series se deducen inmediatamente las fórmulas:

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x,$$

$$D \operatorname{sen} x = \cos x, \quad D \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

Las fórmulas de adición se pueden obtener por medio del siguiente artificio: sean u y v nuevas funciones definidas por las ecuaciones:

$$u(x) = \operatorname{sen}(x + a) - \operatorname{sen} x \cos a - \cos x \operatorname{sen} a,$$

$$v(x) = \cos(x + a) - \cos x \cos a + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a,$$

donde a es un número real fijo, y sea $f(x) = [u(x)]^2 + [v(x)]^2$. Entonces es fácil comprobar que $u'(x) = v(x)$ y $v'(x) = -u(x)$ y por tanto $f'(x) = 0$ para todo x. De aquí resulta que $f(x)$ es una constante, y puesto que $f(0) = 0$, ha de ser $f(x) = 0$ para todo x. Esto implica $u(x) = v(x) = 0$ para todo x, o de otra forma:

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a,$$

$$\cos(x + a) = \cos x \cos a - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a.$$

El número π, se puede introducir como el menor número positivo tal que $\operatorname{sen} x = 0$ (se puede probar que existe una tal x) y después se puede probar que el seno y el coseno son periódicas con período 2π, que $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi) = 1$, y que $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Los detalles, que no se expondrán aquí, se pueden encontrar en el libro *Theory and Application of Infinite Series,* por K. Knopp (Nueva York: Hafner, 1951).

* 11.12 Teorema de Bernstein

El teorema 11.11 demuestra que la serie de Taylor de una función f converge si la derivada n-sima $f^{(n)}$ no crece más rápidamente de la potencia n-sima de un cierto número positivo. Otra condición suficiente para la convergencia fue formulada por el matemático ruso Sergei N. Bernstein (1880-).

TEOREMA 12.12. TEOREMA DE BERNSTEIN. *Si f y todas sus derivadas son no negativas en un intervalo cerrado $[0, r]$, esto es, si*

$$f(x) \geq 0 \qquad y \qquad f^{(n)}(x) \geq 0$$

para cada x en $[0, r]$ y cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces, si $0 \leq x < r$, la serie de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

converge hacia $f(x)$.

Demostración. El resultado es trivial para $x = 0$, así que supongamos que $0 < x < r$. Utilicemos la fórmula de Taylor con resto para escribir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x). \tag{11.10}$$

Demostraremos que el término de error satisface las desigualdades

$$0 \leq E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r). \tag{11.11}$$

Esto, a su vez, prueba que $E_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ puesto que el cociente $(x/r)^{n+1} \to 0$ cuando $0 < x < r$.

Para demostrar (11.11), utilizamos la forma integral del error que se da en (11.8) con $a = 0$:

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu)\, du .$$

Esta fórmula es válida para cada x del intervalo cerrado $[0, r]$. Si $x \neq 0$, ponemos

$$F_n(x) = \frac{E_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu)\, du .$$

La función $f^{(n+1)}$ es monótona creciente en el intervalo $[0, r]$ ya que su derivada es no negativa. Por consiguiente, tenemos

$$f^{(n+1)}(x - xu) = f^{(n+1)}[x(1 - u)] \le f^{(n+1)}[r(1 - u)]$$

si $0 \le u \le 1$, lo cual implica que $F_n(x) \le F_n(r)$ si $0 < x \le r$. Dicho de otro modo, tenemos $E_n(x)/x^{n+1} \le E_n(r)/r^{n+1}$ o

(11.12) $$E_n(x) \le \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} E_n(r) .$$

Poniendo $x = r$ en la igualdad (11.10), vemos que $E_n(r) \le f(r)$ porque cada término de la suma es no negativo. Aplicando esto en (11.12), obtenemos (11.11) lo cual completa la demostración.

11.13 Ejercicios

Para cada una de las series de potencias de los ejercicios 1 al 10 determinar el conjunto de todos los valores reales x para los que converge y calcular su suma. Los desarrollos en serie de potencias ya vistos pueden utilizarse cuando convenga.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n nx^n$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$.

Cada una de las funciones de los ejercicios del 11 al 21 tiene una representación en serie de potencias de x. Supuesta la existencia del desarrollo, comprobar que los coeficientes tienen la forma dada, y demostrar que la serie converge para los valores de x indicados. Cuando convenga pueden utilizarse los desarrollos ya vistos.

11. $a^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n, \qquad a > 0$ (todo x). [*Indicación:* $a^x = e^{x \log a}$.]

12. $\operatorname{senh} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (todo x).

13. $\operatorname{sen}^2 x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ (todo x). [*Indicación:* $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$.]

14. $\dfrac{1}{2-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ ($|x| < 2$).

15. $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ (todo x).

16. $\operatorname{sen}^3 x = \dfrac{3}{4} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ (todo x).

17. $\log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($|x| < 1$).

18. $\dfrac{x}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [1-(-2)^n] x^n$ ($|x| < \frac{1}{2}$).

[*Indicación:* $3x/(1+x-2x^2) = 1/(1-x) - 1/(1+2x)$.]

19. $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n$ ($|x| < 1$).

20. $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{2\pi(n+1)}{3} x^n$ ($|x| < 1$).

[*Indicación:* $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.]

21. $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n + \dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n \qquad (|x| < 1).$

22. Determinar el coeficiente a_{98} del desarrollo en serie de potencias sen $(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
23. Sea $f(x) = (2 + x^2)^{5/2}$. Determinar los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_4$ de la serie de Taylor generada por f en 0.
24. Sea $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$.
    a) Demostrar que f tiene derivadas de todo orden en todo el eje real.
    b) Demostrar que $f^{(n)} = 0$ para todo $n \geq 1$. Este ejemplo prueba que la serie de Taylor generada por f en torno al punto 0 converge en todo el eje real, pero que representa f *solamente* en el origen.

11.14 Series de potencias y ecuaciones diferenciales

A veces las series de potencias nos permiten obtener soluciones de ecuaciones diferenciales cuando fallan los otros métodos. En el Volumen II se da una discusión sistemática del empleo de las series de potencias en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Aquí ilustramos con un ejemplo alguna de las ideas y técnicas relativas a este asunto.

Considérese la ecuación diferencial de segundo orden:

(11.13) $$(1 - x^2)y'' = -2y.$$

Supongamos que existe una solución, sea $y = f(x)$, que se puede expresar por medio de una serie de potencias en un entorno del origen, es decir:

(11.14) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

En primer lugar se han de determinar los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Una manera de proceder es la siguiente: Derivando (11.14) dos veces, se obtiene:

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} .$$

Multiplicando por $1 - x^2$, se encuentra:

(11.15) $$\begin{aligned}(1 - x^2)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n .\end{aligned}$$

Sustituyendo cada una de las series (11.14) y (11.15) en la ecuación diferencial se obtiene una ecuación que contiene dos series de potencias, válida en un entorno del origen. En virtud del teorema de la unicidad, estas series de potencias han de ser iguales término a término, y se pueden igualar los coeficientes de x^n obteniéndose las relaciones:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n = -2a_n$$

o lo que es lo mismo:

$$a_{n+2} = \frac{n^2-n-2}{(n+2)(n+1)}\, a_n = \frac{n-2}{n+2}\, a_n\,.$$

Estas relaciones permiten determinar a_2, a_4, a_6, ... sucesivamente, a partir de a_0. Análogamente, se pueden calcular a_3, a_5, a_7, ... a partir de a_1. Para los coeficientes de índice par se tiene:

$$a_2 = -a_0\,, \qquad a_4 = 0\cdot a_2 = 0\,, \qquad a_6 = a_8 = a_{10} = \cdots = 0\,.$$

Los coeficientes impares son:

$$a_3 = \frac{1-2}{1+2}\, a_1 = \frac{-1}{3}\, a_1\,, \qquad a_5 = \frac{3-2}{3+2}\, a_2 = \frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}\, a_1\,,$$

$$a_7 = \frac{5-2}{5+2}\, a_5 = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}\, a_1 = \frac{-1}{7\cdot 5}\, a_1$$

y en general:

$$a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n+1}\, a_{2n-1} = \frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\frac{2n-7}{2n-3}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}\, a_1\,.$$

Simplificando los factores comunes se tiene:

$$a_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)}\, a_1\,.$$

Por tanto la serie correspondiente a y se puede escribir como sigue:

$$y = a_0(1-x^2) - a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\, x^{2n+1}\,.$$

La convergencia de esta serie para $|x| < 1$ se puede comprobar aplicando el criterio del cociente. Por la forma como se ha obtenido se ve que la serie satisface efectivamente la ecuación diferencial en (11.13), siendo a_0 y a_1 constantes arbitrarias. El lector puede observar que en este ejemplo particular el polinomio que multiplica a_0 es él mismo una solución de (11.13) y la serie que multiplica a_1 es otra solución.

El método que se acaba de describir, se denomina *método de los coeficientes indeterminados*. Otro camino para obtener estos coeficientes se basa en el uso de la fórmula:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{si} \quad y = f(x).$$

Algunas veces las derivadas de y en el origen se pueden calcular directamente a partir de la ecuación diferencial. Por ejemplo, poniendo $x = 0$ en (11.13) se obtiene inmediatamente:

$$f''(0) = -2f(0) = -2a_0,$$

y por tanto:

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = -a_0.$$

Para hallar las derivadas de orden superior se deriva la ecuación diferencial obteniendo

(11.16) $$(1 - x^2)y''' - 2xy'' = -2y'.$$

Poniendo $x = 0$, se ve que $f'''(0) = -2f'(0) = -2a_1$ y por tanto $a_3 = f'''(0)/3! = -a_1/3$. Derivando (11.16) se llega a la ecuación:

$$(1 - x^2)y^{(4)} - 4xy''' = 0.$$

Haciendo $x = 0$, resulta $f^{(4)}(0) = 0$, y por tanto $a_4 = 0$. Repitiendo nuevamente este proceso, se tiene:

$$(1 - x^2)y^{(5)} - 6xy^{(4)} - 4y''' = 0,$$

$$f^{(5)}(0) = 4f'''(0) = -8a_1, \qquad a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{a_1}{15}.$$

y es claro que este método se puede repetir tantas veces como se quiera.

11.15 La serie binómica

Nuestros conocimientos en series de potencias podemos también aplicarlos a la determinación de sumas de ciertas series de potencias. Por ejemplo, haremos uso del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para demostrar que el desarrollo en serie binómica

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{11.17}$$

es válido en el intervalo $|x| < 1$. El exponente α es un número real cualquiera y $\binom{\alpha}{n}$ representa el coeficiente binómico definido por

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}. \tag{11.18}$$

Cuando α es entero no negativo, todos los coeficientes $\binom{\alpha}{n}$ son cero salvo un número finito de ellos, y la serie se reduce a un polinomio de grado α, obteniendo el teorema binomial ordinario. Para demostrar (11.17) para un α cualquiera, aplicamos primero el criterio del cociente encontrando que la serie converge absolutamente en el intervalo abierto $-1 < x < 1$. Seguidamente definimos una fun ción f mediante la ecuación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{si } |x| < 1. \tag{11.19}$$

Entonces demostramos que f es una solución de la ecuación diferencial lineal

$$y' - \frac{\alpha}{x + 1}\, y = 0 \tag{11.20}$$

y satisface la condición inicial $f(0) = 1$. El teorema 8.3 nos dice que en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = -1$ existe únicamente una solución de esa ecuación diferencial con $y = 1$ cuando $x = 0$. Puesto que $y = (1 + x)^\alpha$ es una tal solución, resulta que $f(x) = (1 + x)^\alpha$ si $-1 < x < 1$.

Por consiguiente, para demostrar (11.17) tan sólo necesitamos probar que f satisface la ecuación diferencial (11.20). A tal fin, necesitamos la propiedad siguiente a los coeficientes binomiales:

$$(n + 1)\binom{\alpha}{n + 1} = (\alpha - n)\binom{\alpha}{n}$$

Esta propiedad, que es una consecuencia inmediata de la definición (11.18), es válida para todo real α y todo entero $n \geq 0$. También puede expresarse

(11.21) $$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

La derivación de (11.19) nos da

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n,$$

de la que obtenemos que

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right\}x^n = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha f(x),$$

debido a (11.21). Esto demuestra que f satisface la ecuación diferencial (11.20) y esto a su vez demuestra (11.17).

11.16 Ejercicios

1. La ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ tiene una serie de potencias solución $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. Con el método de los coeficientes indeterminados obtenemos una fórmula recurrente que relaciona a_{n+2} con a_n. Determinar explícitamente a_n para cada n y hallar la suma de la serie.
2. Hacer lo mismo que en el ejercicio 1 para la ecuación diferencial $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ y las condiciones iniciales $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$.

En cada uno de los ejercicios del 3 al 9, se emplea una serie de potencias para definir la función f. Determinar el intervalo de convergencia en cada caso y demostrar que f satisface la ecuación diferencial que se indica, donde $y = f(x)$. En los ejercicios del 6 al 9, resolver la ecuación diferencial y obtener después la suma de la serie.

3. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$; $\quad \dfrac{d^4y}{dx^4} = y$.
4. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$; $\quad xy'' + y' - y = 0$.
5. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}$; $\quad y'' = x^a y + b$. (Hallar a y b.)

6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$; $y' = 2xy$.

7. $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $y' = x + y$.

8. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$; $y'' + 4y = 0$.

9. $f(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $y'' = 9(y - x)$.

10. Las funciones J_0 y J_1 definidas por las series

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}, \qquad J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

se llaman *funciones de Bessel de primera especie* de órdenes cero y uno, respectivamente. Se presentan en gran número de problemas de Matemática pura y aplicada. Demostrar a) que ambas series convergen para todo x real; b) $J_0'(x) = -J_1(x)$; (c) $j_0(x) = j_1'(x)$, donde $j_0(x) = x J_0(x)$ y $j_1(x) = xJ_1(x)$.

11. La ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

se llama *ecuación de Bessel*. Demostrar que J_0 y J_1 (como están definidas en el ejercicio 10) son soluciones cuando $n = 0$ y 1, respectivamente.

En cada uno de los ejercicios 12, 13 y 14, suponer que la ecuación diferencial dada tiene una serie de potencias solución y hallar los cuatro primeros términos no nulos.

12. $y' = x^2 + y^2$, con $y = 1$ cuando $x = 0$.
13. $y' = 1 + xy^2$, con $y = 0$ cuando $x = 0$.
14. $y' = x + y^2$, con $y = 0$ cuando $x = 0$.

En los ejercicios 15, 16 y 17, suponer que la ecuación diferencial dada tiene una serie de potencias solución de la forma $y = \sum a_n x^n$, y determinar el coeficiente n-simo a_n.

15. $y' = \alpha y$.
16. $y'' = xy$.
17. $y'' + xy' + y = 0$.

18. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donde $a_0 = 1$ y los restantes coeficientes se determinan por la identidad

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \{2a_n + (n+1)a_{n+1}\}x^n .$$

Calcular a_1, a_2, a_3, y hallar la suma de la serie correspondiente a $f(x)$.

19. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, en donde los coeficientes a_n están determinados por la relación

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+2) x^n .$$

Calcular a_5, a_6, y $f(\pi)$.

20. a) Demostrar que los seis primeros términos de la serie binómica de $(1-x)^{-1/2}$ son:

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \frac{63}{256}x^5 .$$

b) Si a_n es el n-simo término de esta serie cuando $x = 1/50$, y r_n el resto n-simo, es decir, para $n \geq 0$ es

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots .$$

Demostrar que $0 < r_n < a_n/49$.

[*Indicación:* Demostrar que $a_{n+1} < a_n/50$, y mayorar r_n mediante una serie geométrica conveniente.]

c) Comprobar la identidad

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-1/2}$$

y utilizarla para calcular las diez primeras cifras decimales de $\sqrt{2}$.

[*Indicación:* Aplicar las partes *a*) y *b*), conservar doce cifras decimales durante los cálculos, y redondear los errores.]

21. a) Demostrar que

$$\sqrt{3} = \frac{1732}{1000}\left(1 - \frac{176}{3\,000\,000}\right)^{-1/2} .$$

b) Seguir el procedimiento del ejercicio 20 y calcular las quince primeras cifras decimales correctas de $\sqrt{3}$.

22. Integrar la serie binómica de $(1 - x^2)^{-1/2}$ y obtener luego el desarrollo en serie de potencias

$$\operatorname{arcsen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1) .$$

12

ÁLGEBRA VECTORIAL

12.1 Introducción histórica

En los capítulos precedentes se han considerado algunos conceptos básicos del Cálculo ilustrándolos con aplicaciones a la resolución de algunos problemas físicos y geométricos sencillos. Otras aplicaciones del Cálculo requieren ya un conocimiento más profundo de la Geometría analítica y por esto se procederá ahora a un estudio más detallado de algunas ideas geométricas fundamentales.

Como ya se dijo anteriormente en este libro, el Cálculo y la Geometría analítica estuvieron íntimamente relacionados en su desarrollo histórico. Cada nuevo descubrimiento en uno de ellos dio lugar a un progreso en el otro. El problema de trazar tangentes a las curvas se resuelve con el descubrimiento de la derivada; el del área conduce a la integral; y las derivadas parciales se introdujeron para estudiar superficies curvas en el espacio. Junto con estos descubrimientos se observa un desarrollo paralelo de la Mecánica y la Física matemática. En 1788, Lagrange publicó su obra maestra, *Mécanique analytique,* que mostró la gran flexibilidad y la tremenda potencia alcanzada al utilizar métodos analíticos en el estudio de la Mecánica. Más tarde, en el siglo XIX, el matemático William Rowan Hamilton (1805-1865) introdujo su *Theory of Quaternions,* nuevo método y nuevo punto de vista que contribuyó mucho a la comprensión tanto del Álgebra como de la Física. Las más notables características del análisis de los cuaterniones y de la Geometría cartesiana se unieron más tarde, en gran parte debido a los esfuerzos de J. W. Gibbs (1839-1903) y O. Heaviside (1850-1925) para dar lugar a la llamada *Álgebra vectorial.* Pronto se vio que los vectores eran los instrumentos ideales para la exposición y simplificación de muchas ideas importantes en Geometría y Física. En este capítulo nos proponemos estudiar los elementos del Álgebra vectorial. En el capítulo 13 se dan aplicaciones a la Geometría analítica. En el capítulo 14 se combina el Álgebra vectorial con los métodos del Cálculo, y se dan aplicaciones a la Geometría y a la Mecánica.

Existen tres modos esencialmente distintos para introducir el Álgebra vectorial: *geométricamente, analíticamente y axiomáticamente.* En la introducción geométrica, los vectores se representan por segmentos orientados, o flechas. Las operaciones algebraicas con vectores, tales como la adición, sustracción y multiplicación por números reales, se definen y estudian por métodos geométricos.

En la introducción analítica, los vectores y las operaciones se expresan mediante *números,* llamados *componentes.* Las propiedades de las operaciones con vectores se deducen entonces a partir de las propiedades correspondientes de los números. La descripción analítica de los vectores surge espontáneamente de la representación geométrica en cuanto se introduce un sistema coordenado.

En la introducción axiomática, no se intenta describir la naturaleza de un vector o de las operaciones algebraicas con vectores. En lugar de ello, los vectores y las operaciones con ellos se imaginan como *conceptos no definidos* de los que nada se sabe excepto que satisfacen un cierto conjunto de axiomas. Un tal sistema algebraico, con los axiomas apropiados, se llama *espacio lineal* o *espacio vectorial.* En todas las ramas de la Matemática se presentan ejemplos de espacios lineales y estudiaremos algunos en el capítulo 15. El álgebra de los segmentos orientados y el álgebra de los vectores construida con los componentes son dos ejemplos de espacios lineales.

El estudio del Álgebra vectorial desde el punto de vista axiomático es quizá la introducción matemáticamente más satisfactoria pues proporciona una descripción de los vectores que es independiente de los sistemas de coordenadas y de cualquier representación geométrica especial. Este estudio se hace con detalle en el capítulo 15. En este capítulo fundamentamos nuestro estudio en la introducción analítica, y también empleamos segmentos orientados para interpretar muchos de los resultados geométricamente. Cuando ello es posible, damos demostraciones sintéticas, es decir independientes de la representación de los vectores por componentes. De este modo, este capítulo nos sirve para familiarizarnos con ejemplos concretos importantes de espacios vectoriales, y también da origen a una introducción más abstracta en el capítulo 15.

12.2 El espacio vectorial de las *n*-plas de números reales

La idea de emplear un número para situar un punto en una recta fue conocida por los antiguos griegos. En 1637 Descartes extendió esta idea, utilizando un *par* de números (a_1, a_2) para situar un punto en el plano, y una *terna* de números (a_1, a_2, a_3) para situar un punto en el espacio. En el siglo XIX los matemáticos A. Cayley (1821-1895) y H. G. Grassmann (1809-1877) probaron que no era necesario detenerse en las ternas de números. Se puede también considerar una *cuaterna* de números (a_1, a_2, a_3, a_4) o, más general, una *n-pla* de números reales

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

para todo entero $n \geq 1$. Una tal *n-pla* se llama *punto n-dimensional* o *vector n-dimensional*, siendo los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las *coordenadas* o *componentes* del vector. El conjunto de todos los vectores *n-dimensionales* se llama *espacio vectorial de n-plas*, o simplemente *n-espacio*. Lo designamos con V_n.

Puede preguntar el lector el motivo por el cual estamos interesados en espacios de dimensión mayor que tres. Una contestación es que muchos problemas que suponen el estudio de sistemas de un número grande de ecuaciones se analizan con mayor facilidad introduciendo vectores en un n-espacio conveniente y reemplazando todas aquellas ecuaciones por una sola ecuación vectorial. Otra ventaja es la de que podemos tratar de una vez, muchas propiedades comunes a los espacios de una, dos, tres o más dimensiones, esto es, propiedades independientes de la dimensionalidad del espacio. Esto está de acuerdo con el espíritu de la moderna matemática que facilita el desarrollo de métodos de amplias síntesis para atacar distintos problemas de manera simultánea.

Desgraciadamente, las representaciones geométricas que son una gran ayuda en la ilustración y justificación de conceptos sobre vectores, cuando $n = 1, 2$, y 3, no pueden utilizarse cuando $n > 3$; por ello, el estudio del Álgebra vectorial en espacios de más de tres dimensiones debe hacerse por entero con medios analíticos.

En este capítulo designamos ordinariamente los vectores con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$, y los componentes con las correspondientes minúsculas $a, b, c, \ldots$ Así, escribimos

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Para convertir V_n en una estructura algebraica, introducimos la *igualdad* de vectores y dos operaciones la *adición* de vectores y la *multiplicación por escalares.* La palabra «escalar» se utiliza aquí como sinónimo de «número real».

DEFINICIÓN. *Dos vectores A y B de V_n son iguales siempre que coinciden sus componentes. Esto es, si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1 . b_2, \ldots, b_n)$, la ecuación vectorial $A = B$ tiene exactamente el mismo significado que las n ecuaciones escalares*

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \quad \ldots, \quad a_n = b_n.$$

La suma $A + B$ se define como el vector obtenido sumando los componentes correspondientes:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Si c es un escalar, definimos cA o Ac como el vector obtenido multiplicando cada componente de A por c:

$$cA = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n).$$

Partiendo de esta definición es fácil comprobar las siguientes propiedades de esas operaciones:

TEOREMA 12.1. *La adición de vectores es conmutativa,*

$$A + B = B + A,$$

y asociativa,

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

La multiplicación por escalares es asociativa

$$c(dA) = (cd)A$$

y satisface las dos leyes distributivas

$$c(A + B) = cA + cB, \qquad y \qquad (c + d)A = cA + dA.$$

Las demostraciones de esas propiedades son consecuencia inmediata de la definición y se dejan como ejercicio para el lector.

El vector con todos los componentes 0 se llama *vector cero* y se representa con O. Tiene la propiedad de que $A + O = A$ para todo vector A; dicho de otro modo, O es un elemento neutro o idéntico para la adición de vectores. El vector $(-1)A$ que también se representa con $-A$ se llama el *opuesto* de A. También escribimos $A - B$ en lugar de $A + (-B)$ y lo llamamos *diferencia* de A y B. La ecuación $(A + B) - B = A$ demuestra que la sustracción es la operación inversa de la adición. Obsérvese que $0A = O$ y que $1A = A$.

El lector habrá observado la semejanza entre los vectores en el espacio de 2 dimensiones y los números complejos. Ambos se definen como pares ordenados de números reales y ambos se suman de la misma manera. Así pues, en lo que hace referencia a la adición, los números complejos y los vectores bidimensionales algebraicamente son indistinguibles. Sólo se diferencian al introducir la multipicación.

La multiplicación da al sistema de números complejos el conjunto de propiedades que también poseen los números reales. Puede demostrarse (aunque resulta difícil) que excepto para $n = 1$ y $n = 2$, no es posible introducir la multiplicación en V_n de modo que se satifagan todas las propiedades. Sin embargo pueden introducirse en V_n ciertos productos que no satisfacen *todas* las propiedades. Por ejemplo, en la sección 12.5 hablaremos del *producto interior* de dos vectores en V_n. El resultado de esta multiplicación es un escalar, no es un vector. En la sección 13.9 se tratará del *producto vectorial.* Esta multiplicación sólo es aplicable

en el espacio V_3. El resultado siempre es un vector, pero este producto no es conmutativo.

12.3 Interpretación geométrica para $n \leq 3$

Si bien las definiciones anteriores son completamente independientes de la Geometría, los vectores y las operaciones con ellos tienen una interesante interpretación geométrica para espacios de dimensión tres o menor que tres. Haremos representaciones para dos dimensiones y recomendamos al lector que se las haga para espacios de tres y de una dimensiones.

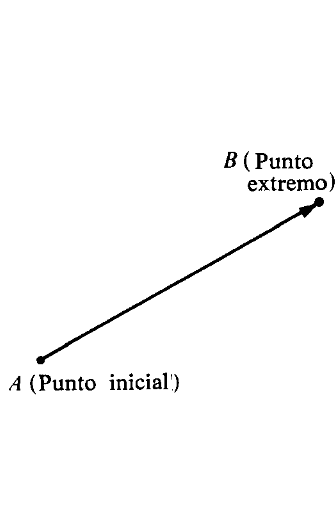


FIGURA 12.1 *El vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ del punto A al B.*

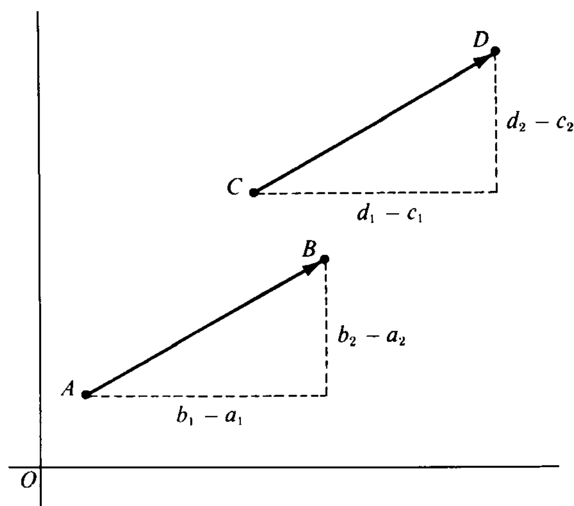


FIGURA 12.2 *$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes porque $B - A = D - C$.*

Un par de puntos A y B se llama *vector geométrico* si uno de los puntos, por ejemplo A, es el *punto inicial* y el otro, B, es *punto extremo*. Representamos un vector geométrico con una flecha de A a B, como vemos en la figura 12.1, y empleamos la notación AB.

Los vectores geométricos son especialmente útiles para representar ciertas magnitudes físicas tales como fuerzas, desplazamientos, velocidades, y aceleraciones, que poseen magnitud y dirección. La longitud de la flecha es una medida de la magnitud y la punta de la flecha indica la dirección que se precisa.

Supongamos que introducimos un sistema coordenado con origen O. La figura 12.2 muestra dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tales que $B - A = D - C$. En función de los componentes, esto significa que

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \qquad \text{y} \qquad b_2 - a_2 = d_2 - c_2 .$$

Comparando los triángulos iguales de la figura 12.2, vemos que las dos flechas que representan $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma longitud, son paralelos, e indican la misma dirección. Llamamos a tales vectores geométricos *equivalentes*. Esto es, decimos $\overrightarrow{AB}$ es equivalente a $\overrightarrow{CD}$ siempre que

$$B - A = D - C . \tag{12.1}$$

Obsérvese que los cuatro puntos A, B, C, D son vértices de un paralelogramo. (Ver figura 12.3.) La ecuación (12.1) también se puede escribir en la forma $A + D = B + C$ lo que nos dice que los *vértices opuestos del paralelogramo tienen la misma suma*. En particular, si uno de los vértices, por ejemplo A, es el origen 0, como en la figura 12.4, el vector geométrico que une O al vértice opuesto D corresponde al vector suma $D = B + C$. Esto se expresa diciendo que la adición de vectores corresponde geométricamente a la adición de vectores geométricos por medio de la ley del paralelogramo. La importancia de los vectores en la física proviene del hecho notable de que muchas magnitudes físicas (tales como fuerzas, velocidades y aceleraciones) se combinan por medio de la ley del paralelogramo.

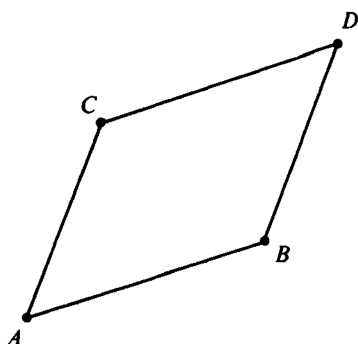


FIGURA 12.3 *Los vértices opuestos de un paralelogramo tienen la misma suma:* $A + D = B + C$.

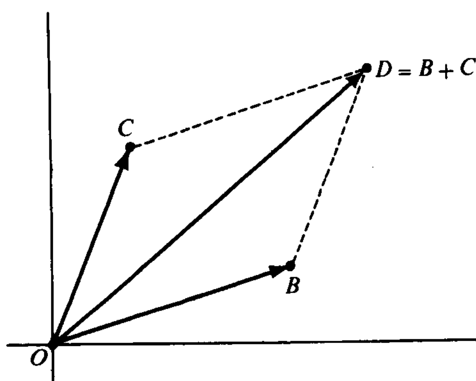


FIGURA 12.4 *La adición de vectores interpretada geométricamente con la ley del paralelogramo.*

A fin de simplificar la notación, utilizaremos el mismo símbolo para designar un punto de V_n (cuando $n \leq 3$) y el vector geométrico que une el origen a ese punto. Así pues, escribimos A en lugar de $\overrightarrow{OA}$, B en lugar de $\overrightarrow{OB}$, etc. También escribimos algunas veces A en lugar de cualquier vector geométrico equivalente a $\overrightarrow{OA}$. Por ejemplo, la figura 12.5 representa geométricamente la sustracción de vectores. Dos vectores geométricos están designados con $B - A$, y son equivalentes. Tienen la misma longitud y la misma dirección.

La figura 12.6 representa geométricamente la multiplicación por escalares. Si $B = cA$, el vector geométrico B tiene como longitud el producto de $|c|$ por la longitud de A; tiene la misma dirección que A si c es positivo, y la dirección opuesta si c es negativo.

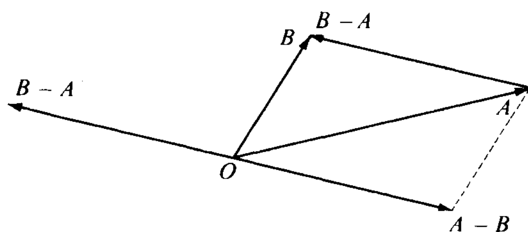


FIGURA 12.5 *Significado geométrico de la sustracción de vectores.*

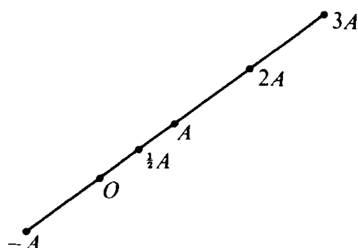


FIGURA 12.6 *Multiplicación de vectores. por escalares.*

La interpretación geométrica de los vectores en V_n para $n \leq 3$ sugiere una manera de definir el paralelismo en un espacio de dimensión n cualquiera.

DEFINICIÓN. *Dos vectores A y B de V_n tienen la misma dirección si $B = cA$ para un cierto escalar positivo c, y la dirección opuesta si $B = cA$ para un cierto c negativo. Se llaman paralelos si $B = cA$ para un cierto c no nulo.*

Obsérvese que esta definición permite considerar que todo vector tiene la misma dirección que él mismo —propiedad que seguramente necesitaremos. También se observa que esta definición asigna al vector cero las siguientes propiedades: El vector cero es el único que tiene la dirección de su opuesto y por tanto el único vector que tiene la dirección opuesta a sí mismo. El vector cero es el único vector paralelo al vector cero.

12.4 Ejercicios

1. Sean $A = (1, 3, 6)$, $B = (4, -3, 3)$, y $C = (2, 1, 5)$ tres vectores de V_3. Determinar los componentes de cada uno de los vectores: a) $A + B$; b) $A - B$; c) $A + B - C$; d) $7A - 2B - 3C$; e) $2A + B - 3C$.

2. Dibujar los vectores geométricos que unen el origen a los puntos $A = (2,1)$ y $B = (1, 3)$. En la misma figura, trazar el vector geométrico que une el origen al punto $C = A + tB$ para cada uno de los siguientes valores de t: $t = \frac{1}{3}$; $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{3}{4}$; $t = 1$; $t = 2$; $t = -1$; $t = -2$.
3. Resolver el ejercicio 2 si $C = tA + B$.
4. Sean $A = (2, 1)$, $B = (1, 3)$, y $C = xA + yB$, en donde x e y son escalares.
   a) Trazar el vector que une el origen a C para cada uno de los siguientes pares de valores de x e y: $x = y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}$; $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$; $x = 2, y = -1$; $x = 3$, $y = -2$; $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$; $x = -1, y = 2$.
   b) ¿Qué conjunto es el de los puntos C obtenidos cuando x e y toman todos los valores reales tales que $x + y = 1$? (Hacer una conjetura y mostrar el lugar geométrico en la figura. No hacer la demostración.)
   c) Dar una idea del conjunto de todos los puntos C obtenidos al variar independientemente x e y en los intervalos $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, y hacer una representación de ese conjunto.
   d) ¿Qué conjunto es el de todos los puntos C obtenidos si x varía en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ e y recorre todos los números reales?
   e) ¿Qué conjunto resulta si x e y recorren ambos todos los números reales?
5. Sean $A = (2, 1)$ y $B = (1, 3)$. Demostrar que todo vector $C = (c_1, c_2)$ de V_2 puede expresarse en la forma $C = xA + yB$. Expresar x e y en función de c_1 y c_2.
6. Sean $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, y $C = (1, 1, 0)$ tres vectores de V_3 y $D = xA + yB + zC$, donde x y z son escalares.
   a) Determinar los componentes de D.
   b) Si $D = 0$ demostrar que $x = y = z = 0$.
   c) Hallar x, y, z tales que $D = (1, 2, 3)$.
7. Sean $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ y $C = (2, 1, 1)$ tres vectores de V_3, y $D = xA + yB + zC$, en donde x, y, z son escalares.
   a) Determinar los componentes de D.
   b) Hallar x, y, y z, no todos nulos, tales que $D = O$.
   c) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1, 2, 3)$.
8. Sean $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1, 1)$, $C = (1, 1, 0, 0)$ tres vectores de V_4, y $D = xA + yB + zC$ siendo x, y, z escalares.
   a) Determinar los componentes de D.
   b) Si $D = O$, demostrar que $x = y = z = 0$.
   c) Hallar x, y, z tales que $D = (1, 5, 3, 4)$.
   d) Demostrar que ninguna elección de x, y, z hace $D = (1, 2, 3, 4)$.
9. En V_n demostrar que dos vectores paralelos a un mismo vector son paralelos entre sí.
10. Dados cuatro vectores no nulos A, B, C, D de V_n tales que $C = A + B$ y A es paralelo a D. Demostrar que C es paralelo a D si y sólo si B es paralelo a D.
11. a) Demostrar, para los vectores de V_n, las propiedades de la adición y de la multiplicación por escalares dadas en el teorema 12.1.
    b) Mediante vectores geométricos en el plano, representar el significado geométrico de las dos leyes distributivas $(c + d)A = cA + dA$ y $c(A + B) = cA + cB$.
12. Si un cuadrilátero $OABC$ de V_2 es un paralelógramo que tiene A y C como vértices opuestos, demostrar que $A + \frac{1}{2}(C - A) = \frac{1}{2}B$. ¿Qué teorema relativo a los paralelogramos puede deducirse de esta igualdad?

12.5 Producto escalar

Introduzcamos ahora un nuevo tipo de multiplicación llamada producto escalar o interior de dos vectores en V_n.

DEFINICIÓN. *Si $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$ son dos vectores de V_n, su producto escalar se representa con $A \cdot B$ y se define con la igualdad*

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$

Así pues, para calcular $A \cdot B$ multiplicamos los componentes correspondientes de A y B y sumamos luego todos los productos. Esta multiplicación tiene las propiedades algebraicas siguientes.

TEOREMA 12.2. *Para todos los vectores A, B, C de V_n y todos los escalares c, se tienen las propiedades siguientes:*

(a) $A \cdot B = B \cdot A$ (*ley conmutativa*),
(b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (*ley distributiva*),
(c) $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$ (*homogeneidad*),
(d) $A \cdot A > 0$ *si* $A \neq O$ (*positividad*),
(e) $A \cdot A = 0$ *si* $A = O$.

Demostración. Las tres primeras propiedades son fáciles consecuencias de la definición y se dejan como ejercicios. Para demostrar las dos últimas, usamos la relación $A \cdot A = \sum a_k^2$. Puesto que cada término es no negativo, la suma es no negativa. Además, la suma es cero si y sólo si cada término de la suma es cero y esto tan sólo puede ocurrir si $A = O$.

El producto escalar tiene una interpretación geométrica interesante que se verá en la sección 12.9. Antes de discutirla, no obstante, mencionamos una desigualdad importante relativa a productos escalares que es fundamental en Álgebra vectorial.

TEOREMA 12.3. DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ. *Si A y B son vectores de V_n, tenemos*

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B) . \tag{12.2}$$

Además, el signo de desigualdad es el válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

Demostración. Expresando cada uno de los dos miembros de (12.2) en función de los componentes, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) .$$

que es la desigualdad ya demostrada en el teorema I.41.

Presentaremos otra demostración de (12.2) que no utiliza los componentes. Tal demostración es interesante porque hace ver que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es una consecuencia de las cinco propiedades del producto escalar que se citan en el teorema 12.2 y no depende de la definición que se utilizó para deducir esas propiedades.

Para llevar a cabo esta demostración, observemos primero que (12.2) es trivial si A o B es el vector cero. Por tanto, podemos suponer que A y B son ambos no nulos. Sea C el vector

$$C = xA - yB, \qquad \text{donde } x = B \cdot B \qquad \text{y} \qquad y = A \cdot B.$$

Las propiedades d) y e) implican que $C \cdot C \geq 0$. Cuando expresamos esto en función de x e y, resulta (12.2). Para expresar $C \cdot C$ en función de x e y, utilizamos las propiedades a), b) y c) obteniendo

$$C \cdot C = (xA - yB) \cdot (xA - yB) = x^2(A \cdot A) - 2xy(A \cdot B) + y^2(B \cdot B).$$

Utilizando las definiciones de x e y y la desigualdad $C \cdot C \geq 0$, se llega a

$$(B \cdot B)^2(A \cdot A) - 2(A \cdot B)^2(B \cdot B) + (A \cdot B)^2(B \cdot B) \geq 0.$$

La propiedad d) implica que $B \cdot B > 0$ puesto que $B \neq O$, con lo que podemos dividir por $(B \cdot B)$ obteniendo

$$(B \cdot B)(A \cdot A) - (A \cdot B)^2 \geq 0,$$

que coincide con (12.2). Esto también demuestra que el signo igual es válido en (12.2) si y sólo si $C = O$. Pero $C = O$ si y sólo si $xA = yB$. A su vez, esta igualdad se verifica si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz tiene importantes aplicaciones a las propiedades de la *longitud* o *norma* de un vector, concepto que exponemos seguidamente.

12.6 Longitud o norma de un vector

La figura 12.7 muestra el vector geométrico que une el origen al punto $A = (a_1, a_2)$ en el plano. A partir del teorema de Pitágoras encontramos que la longitud de A viene dada por la fórmula

$$\text{longitud de } A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

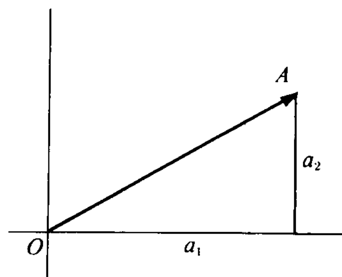


FIGURA 12.7 *En V_2 la longitud de A es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.*

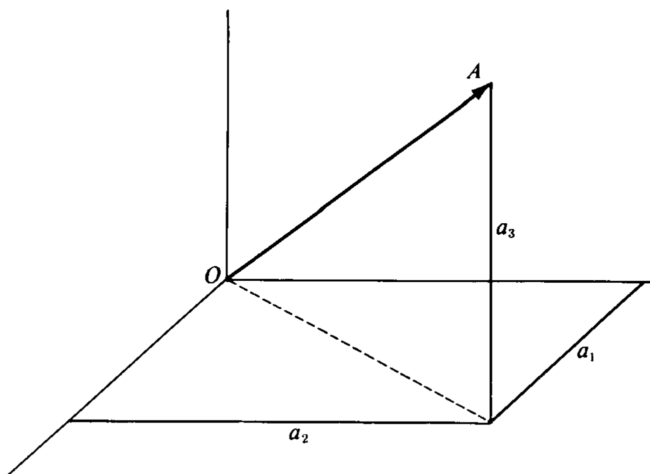


FIGURA 12.8 *En V_3, la longitud de A es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.*

En la figura 12.8 se muestra el dibujo correspondiente en V_3. Aplicando el teorema de Pitágoras dos veces, encontramos que la longitud de un vector geométrico A en V_3 viene dada por

$$\text{longitud de } A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

Obsérvese que en uno u otro caso la longitud de A viene dada por $(A \cdot A)^{1/2}$, la raíz cuadrada del producto escalar de A por sí mismo. Esta fórmula sugiere un método para introducir el concepto de longitud en V_n.

DEFINICIÓN. *Si A es un vector en V_n, su longitud o norma se designa con $\|A\|$ y se define mediante la igualdad*

$$\|A\| = (A \cdot A)^{1/2}.$$

Las propiedades fundamentales del producto escalar conducen a las correspondientes propiedades de la norma.

TEOREMA 12.4. *Si A es un vector de V_n y c un escalar, tenemos las siguientes propiedades:*

a) $\|A\| > 0$ *si* $A \neq O$ (*positividad*),

b) $\|A\| = 0$ *si* $A = O$,

c) $\|cA\| = |c|\,\|A\|$ (*homogeneidad*).

Demostración. Las propiedades a) y b) son consecuencia inmediata de las propiedades d) y e) del teorema 12.2. Para demostrar c) utilizamos la propiedad de homogeneidad del producto escalar obteniendo

$$\|cA\| = (cA \cdot cA)^{1/2} = (c^2 A \cdot A)^{1/2} = (c^2)^{1/2}(A \cdot A)^{1/2} = |c| \, \|A\| .$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz también se puede expresar en función de la norma. Ella establece que

$$(A \cdot B)^2 \leq \|A\|^2 \, \|B\|^2 . \tag{12.3}$$

Tomando la raíz cuadrada positiva de cada miembro, podemos también escribir la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma equivalente

$$|A \cdot B| \leq \|A\| \, \|B\| . \tag{12.4}$$

Utilizaremos ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz para deducir la desigualdad triangular.

TEOREMA 12.5. DESIGUALDAD TRIANGULAR. *Si A y B son vectores de V_n, tenemos*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| .$$

Además, el signo igual es válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

Demostración. Para evitar las raíces cuadradas, escribimos la desigualdad triangular en la forma equivalente

$$\|A + B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2 . \tag{12.5}$$

El primer miembro de (12.5) es

$$\|A + B\|^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2 ,$$

mientras que el segundo miembro es

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\|A\| \, \|B\| + \|B\|^2 .$$

Comparando esas dos fórmulas, vemos que (12.5) es válida si y sólo si se tiene

$$A \cdot B \leq \|A\| \, \|B\| . \tag{12.6}$$

Pero $A \cdot B \leq A \cdot B$ con lo que (12.6) resulta de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, en la forma (12.4). Esto prueba que la desigualdad triangular es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La proposición recíproca también es cierta. Esto es, si la desigualdad triangular es cierta también lo es (12.6) para A y para $-A$, de lo que obtenemos (12.3). Así pues, la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz son lógicamente equivalentes. Además, el signo de igualdad vale en una si y sólo si vale en la otra, con lo que se completa la demostración del teorema 12.5.

En la figura 12.9 se representa geométricamente la desigualdad triangular. Con ello se puede afirmar que la longitud de un lado de un triángulo no supera la suma de las longitudes de los otros dos lados.

12.7 Ortogonalidad de vectores

A lo largo de la demostración de la desigualdad triangular (teorema 12.5), se obtuvo la fórmula

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B \tag{12.7}$$

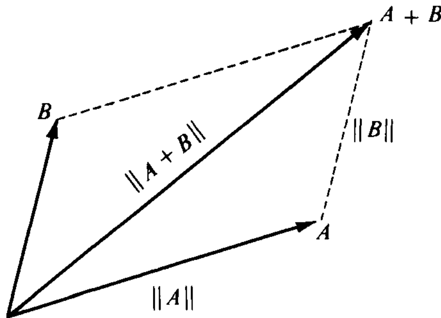


FIGURA 12.9 *Significado geométrico de la desigualdad triangular:*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| .$$

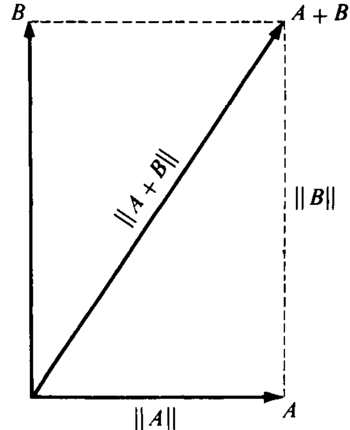


FIGURA 12.10 *Dos vectores perpendiculares satifacen la identidad pitagórica:*

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2.$$

que es válida para dos vectores cualesquiera A y B de V_n. La figura 12.10 muestra dos vectores geométricos perpendiculares en el plano. Forman un trián-

gulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes $\|A\|$ y $\|B\|$ y cuya hipotenusa tiene longitud $\|A + B\|$. El teorema de Pitágoras establece que

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 .$$

Comparando este resultado con (12.7), vemos que $A \cdot B = 0$. Dicho de otro modo, el producto escalar de dos vectores perpendiculares del plano es cero. Esta propiedad da origen a la definición de vectores perpendiculares en V_n.

DEFINICIÓN. *Dos vectores A y B de V_n son perpendiculares u ortogonales si* $A \cdot B = 0$.

La igualdad (12.7) muestra que dos vectores A y B de V_n son ortogonales si y sólo si $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$. Esta es la identidad de Pitágoras en V_n.

12.8 Ejercicios

1. Sean $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (-1, 2, -3, 0)$ y $C = (0, 1, 0, 1)$ tres vectores de V_4. Calcular cada uno de los siguientes productos:
(a) $A \cdot B$; (b) $B \cdot C$; (c) $A \cdot C$; (d) $A \cdot (B + C)$; (e) $(A - B) \cdot C$.
2. Dados tres vectores $A = (2, 4, -7)$, $B = (2, 6, 3)$, y $C = (3, 4, -5)$. En cada una de las expresiones siguientes se pueden introducir paréntesis de una sola manera para obtener una expresión que tenga sentido. Introducir dichos paréntesis y efectuar las operaciones.
(a) $A \cdot BC$; (b) $A \cdot B + C$; (c) $A + B \cdot C$; (d) $AB \cdot C$; (e) $A/B \cdot C$.
3. Demostrar si es o no cierta la proposición siguiente referente a vectores en V_n: Si $A \cdot B = A \cdot C$ y $A \neq O$, es $B = C$.
4. Demostrar si es o no cierta la proposición siguiente que se refiere a vectores en V_n: Si $A \cdot B$ para todo B, es $A = O$.
5. Si $A = (2, 1, -1)$ y $B = (1, -1, 2)$, hallar un vector no nulo C de V_3 tal que $A \cdot C = B \cdot C = 0$.
6. Si $A = (1, -2, 3)$ y $B = (3, 1, 2)$, hallar los escalares x e y tales que $C = xA + yB$ es un vector no nulo y que $C \cdot B = 0$.
7. Si $A = (2, -1, 2)$ y $B = (1, 2, -2)$, hallar dos vectores C y D de V_3 que satisfagan todas las condiciones siguientes: $A = C + D$, $B\ D = 0$, C paralelo a B.
8. Si $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ y $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},)$, hallar dos vectores C y D de V_5 que satisfagan todas las condiciones siguientes: $B = C + 2D$, $D \cdot A = 0$, C paralelo a A.
9. Sean $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, -2, 3)$, y $C = (1, -1, 1)$ tres vectores de V_3. Calcular la norma de cada uno de los siguientes vectores:
(a) $A + B$; (b) $A - B$; (c) $A + B - C$; (d) $A - B + C$.
10. En cada caso hallar un vector B de V_2 tal que $B \cdot A = 0$ y $\|B\| = \|A\|$ si:
(a) $A = (1, 1)$; (b) $A = (1, -1)$; (c) $A = (2, -3)$; (d) $A = (a, b)$.
11. Sean $A = (1, -2, 3)$ y $B = (3, 1, 2)$ dos vectores de V_3. En cada caso, hallar un vector C de longitud 1 paralelo a:
(a) $A + B$; (b) $A - B$; (c) $A + 2B$; (d) $A - 2B$; (e) $2A - B$.
12. Dados los vectores de V_3, $A = (4, 1, -3)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (1, 2, -2)$, $D = (2, 1, 2)$, y $E = (2, -2, -1)$. Determinar todos los pares ortogonales.
13. Hallar todos los vectores de V_2 que tienen la misma longitud que A y le son ortogonales si:

(a) $A = (1, 2)$; (b) $A = (1, -2)$; (c) $A = (2, -1)$; (d) $A = (-2, 1)$.

14. Si $A = (2, -1, 1)$ y $B = (3, -4, -4)$, hallar un punto C del espacio de 3 dimensiones tal que A, B, y C son los vértices de un triángulo rectángulo.
15. Si $A = (1, -1, 2)$ y $B = (2, 1, -1)$, hallar un vector no nulo C de V_3 ortogonal a A y a B.
16. Sean $A = (1, 2)$ y $B = (3, 4)$ dos vectores de V_2. Hallar los vectores P y Q de V_2 tales que $A = P + Q$, siendo P paralelo a B, y Q ortogonal a B.
17. Resolver el ejercicio 16 si los vectores pertenecen a V_4, siendo $A = (1, 2, 3, 4)$ y $B = (1, 1, 1, 1)$).
18. Dados los vectores $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$, y $C = (1, 1, -2)$ de V_3. Hallar los vectores D de la forma $xB + yC$ ortogonales a A y de longitud 1.
19. Demostrar que para dos vectores A y B de V_n se tiene la identidad

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A \cdot B,$$

y por tanto $A \cdot B = 0$ si y sólo si $\|A + B\| = \|A - B\|$. Interpretar este resultado geométricamente en V_2; las diagonales de un paralelogramo son iguales si y sólo si el paralelogramo es un rectángulo.

20. Demostrar que para dos vectores cualesquiera A y B de V_n se tiene

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\,\|A\|^2 + 2\,\|B\|^2.$$

¿Qué teorema geométrico acerca de los lados y diagonales de un paralelogramo se puede deducir de esa identidad?

21. El teorema geométrico que sigue sugiere una identidad vectorial relativa a tres vectores A, B y C. Decir cuál es y demostrar que es válida para los vectores de V_n. Tal identidad proporciona una demostración del teorema con métodos vectoriales.

«La suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero cualquiera supera a la suma de los cuadrados de las diagonales en cuatro veces el cuadrado de la longitud del segmento rectilíneo que une los puntos medios de las diagonales.»

22. Un vector A de V_n tiene longitud 6. Un vector B de V_n tiene la propiedad de que para todo par de escalares x e y los vectores $xA + yB$ y $4yA - 9xB$ son ortogonales. Calcular las longitudes de B y de $2A + 3B$.
23. Dados dos vectores $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ y $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$ de V_5. Hallar dos vectores C y D que satisfagan las tres condiciones siguientes: C es paralelo a A, D es ortogonal a A, y $B = C + D$.
24. Dados en V_n dos vectores A y B no nulos y no paralelos, demostrar que existen vectores C y D en V_n que satisfacen las tres condiciones del ejercicio 23 y expresar C y D en función de A y B.
25. Demostrar si es o no cierta cada una de las proposiciones siguientes relativas a vectores en V_n:

a) Si A es ortogonal a B, $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo número real x.

b) Si $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo número real x, A es ortogonal a B.

12.9 Proyecciones. Ángulo de dos vectores en el espacio de *n* dimensiones

El producto escalar de dos vectores en V_2 tiene una interpretación geométrica interesante. La figura 12.11 a) muestra dos vectores geométricos no nulos A y B que forman un ángulo θ. En este ejemplo, tenemos $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. La figura 12.11 b) muestra el mismo vector A y dos vectores perpendiculares cuya suma es A. Uno de ellos, tB, es el producto de B por un escalar que llamamos la *proyección de A sobre B*. En este ejemplo, t es positivo ya que $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$.

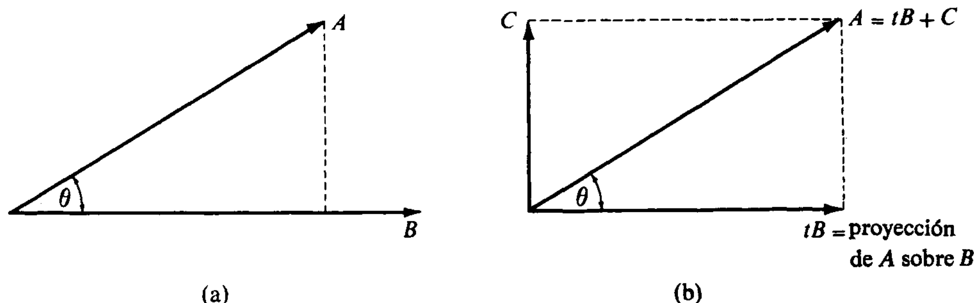


FIGURA 12.11 *El vector tB es la proyección de A sobre B.*

Podemos utilizar los productos escalares para expresar t en función de A y B. Ponemos primero $tB + C = A$ y tomar luego el producto escalar de cada miembro por B obteniendo

$$tB \cdot B + C \cdot B = A \cdot B .$$

Pero $C \cdot B = 0$, debido a que C se dibujó perpendicular a B. Por consiguiente $tB \cdot B = A \cdot B$, con lo que tenemos

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} . \tag{12.8}$$

Por otra parte, el escalar t origina una sencilla relación para el ángulo θ. De la figura 12.11 b), vemos que

$$\cos \theta = \frac{\|tB\|}{\|A\|} = \frac{t\,\|B\|}{\|A\|} .$$

Aplicando (12.8) en esta fórmula, encontramos que

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|} \tag{12.9}$$

o

$$A \cdot B = \|A\|\,\|B\| \cos \theta .$$

Dicho de otro modo, el producto escalar de dos vectores no nulos A y B de V_2 es igual al producto de tres números: la longitud de A, la de B, y el coseno del ángulo que forman.

La igualdad (12.9) sugiere una manera de definir el concepto de ángulo en V_n. La desigualdad de Cauchy-Schwarz, expresada en la forma (12.4), muestra que el cociente del segundo miembro de (12.9) tiene valor absoluto ≤ 1 para dos vectores cualesquiera de V_n. O de otro modo, tenemos

$$-1 \leq \frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|} \leq 1 .$$

Por lo tanto, existe un solo número real θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que (12.9) es cierta. Definimos el ángulo entre A y B como ese número θ. La discusión anterior se resume en la definición siguiente.

DEFINICIÓN. *Sean A y B dos vectores de V_n, con $B \neq O$. El vector tB, siendo*

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B},$$

se llama la proyección de A sobre B. Si A y B son ambos no nulos, el ángulo θ que forman se define mediante la igualdad.

$$\theta = \arccos \frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|}$$

Nota: La función arc coseno restringe θ al intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$. Obsérvese también que $\theta = \frac{1}{2}\pi$ cuando $A \cdot B = 0$.

12.10 Los vectores coordenados unitarios

En el capítulo 9 aprendimos que todo número complejo (a, b) puede expresarse en la forma $a + bi$, en donde i representa el número complejo $(0, 1)$. Análogamente, todo vector (a, b) de V_2 puede expresarse en la forma

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) .$$

Los dos vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ que multiplican los componentes a y b se denominan *vectores coordenados unitarios.* Introducimos ahora el concepto análogo en V_n.

DEFINICIÓN. *En V_n, los n vectores $E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, E_n = (0, 0, \ldots 0, 1)$ se llaman vectores coordenados unitarios. El k-ésimo componente de E_k es 1 y todos los demás componentes son cero.*

La denominación de «vector unitario» procede del hecho de que cada vector E_k tiene longitud 1. Obsérvese que esos vectores son ortogonales entre sí, esto es, el producto escalar de dos cualesquiera de ellos es cero,

$$E_k \cdot E_j = 0 \quad \text{si} \quad k \neq j .$$

TEOREMA 12.6. *Todo vector $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de V_n puede expresarse en la forma*

$$X = x_1E_1 + \cdots + x_nE_n = \sum_{k=1}^{n} x_kE_k .$$

Además, esta representación es única. Esto es, si

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_kE_k \qquad y \qquad X = \sum_{k=1}^{n} y_kE_k ,$$

entonces $x_k = y_k$ para cada valor $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. La primera proposición resulta inmediatamente de la definición de adición y multiplicación por escalares. La unicidad es consecuencia de la definición de igualdad de vectores.

Una suma del tipo $\sum c_iA_i$ se llama *combinación lineal* de los vectores $A_1, \ldots, A_n$. El teorema 12.6 nos dice que todo vector de V_n puede expresarse como combinación lineal de los vectores coordenados unitarios. Expresamos esto diciendo que los vectores coordenados unitarios $E_1, \ldots, E_n$ generan el espacio V_n. También decimos que generan V_n con *unicidad* porque la representación de un vector como combinación lineal de $E_1, \ldots, E_n$ es única. Otros conjuntos de vectores distintos de los $E_1, \ldots, E_n$ también generan V_n con unicidad, y en la sección 12.12 estudiaremos tales conjuntos.

En V_2 los vectores coordenados unitarios E_1 y E_2 frecuentemente se designan, respectivamente, con los símbolos ***i*** y ***j*** en negrita cursiva. En V_3 se utilizan los símbolos ***i***, ***j*** y ***k*** en lugar de E_1, E_2, E_3. Algunas veces se coloca una flecha o una barra encima del símbolo, por ejemplo $\bar{i}$ o $\vec{i}$. El significado geométrico del teorema 12.6 está representado en la figura 12.12 para $n = 3$.

Cuando los vectores se expresan como combinaciones lineales de los vectores coordenados unitarios, los cálculos algebraicos con aquellos pueden efectuarse con las sumas $\sum x_kE_k$ de acuerdo con las reglas usuales del Álgebra. Considerando los coeficientes de los vectores coordenados unitarios, pueden obtenerse los componentes en cualquier momento del cálculo. Por ejemplo, para sumar dos vectores, $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$, escribimos

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_kE_k , \qquad B = \sum_{k=1}^{n} b_kE_k ,$$

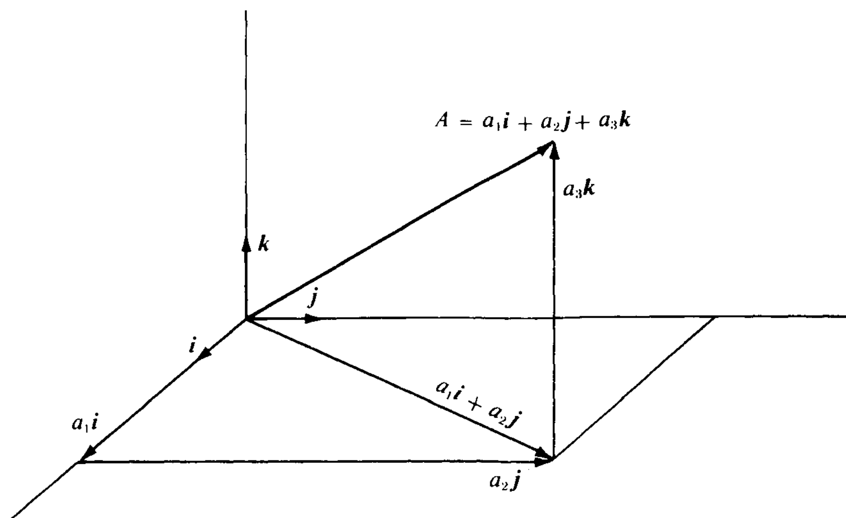


FIGURA 12.12 *Un vector A de V_3 expresado como combinación lineal de* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

y aplicamos la propiedad de linealidad de sumas finitas obteniendo

$$A + B = \sum_{k=1}^{n} a_k E_k + \sum_{k=1}^{n} b_k E_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) E_k .$$

El coeficiente de E_k en el segundo miembro es el k-ésimo componente de la suma $A + B$.

12.11 Ejercicios

1. Determinar la proyección de A sobre B si $A = (1, 2, 3)$ y $B = (1, 2, 2)$.
2. Determinar la proyección de A sobre B si $A = (4, 3, 2, 1)$ y $B = (1, 1, 1, 1)$.
3. a) Sean $A = (6, 3, -2)$ y a, b, c los ángulos que A forma con los vectores coordenados unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, respectivamente. Calcular $\cos a$, $\cos b$ y $\cos c$. Estos se llaman los cosenos directores de A. b) Hallar todos los vectores de V_3 de longitud 1 paralelos a A.
4. Demostrar que el ángulo que forman $A = (1, 2, 1)$ y $B = (2, 1, -1)$ es el doble del que forman $C = (1, 4, 1)$ y $D = (2, 5, 5)$.
5. Determinar vectorialmente los cosenos de los ángulos del triángulo en el espacio de 3 dimensiones cuyos vértices son los puntos $(2, -1, 1)$,$(1, -3, -5)$, y $(3, -4, -4)$.
6. Tres vectores A, B, C de V_3 satisfacen las propiedades siguientes:

$$\|A\| = \|C\| = 5 , \qquad \|B\| = 1 , \qquad \|A - B + C\| = \|A + B + C\| .$$

Si el ángulo que forman A y B es $\pi/8$,, hallar el que forman B y C.

7. Dados tres vectores no nulos A, B, C de V_n. Supóngase que el ángulo que forman A y C es igual al que forman B y C. Demostrar que C es ortogonal al vector $\|B\|A - \|A\|B$.
8. Sea θ el ángulo que forman los dos vectores siguientes de V_n: $A = (1, 1, \ldots, 1)$ y $B = (1, 2, \ldots, n)$. Hallar el valor límite de θ cuando $n \to \infty$.
9. Resolver el ejercicio 8 si $A = (2, 4, 6, \ldots, 2n)$ y $B = (1, 3, 5, \ldots, 2n - 1)$.
10. Dados dos vectores $A = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ y $B = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ de V_2.
a) Demostrar que A y B son vectores ortogonales de longitud 1. Hacer un dibujo en el que A y B formen un ángulo $\theta = \pi/6$.
b) Hallar todos los vectores (x, y) de V_2 tales que $(x, y) = xA + yB$. Asegurarse de que se consideran todos los posibles valores de θ.
11. Demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
12. Formando el producto escalar de los dos vectores $(\cos a, \operatorname{sen} a)$ y $(\cos b, \operatorname{sen} b)$, deducir la identidad trigonométrica $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.
13. Si θ es el ángulo que forman los vectores no nulos A y B de V_n, demostrar que

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\,\|A\|\,\|B\|\cos\theta\,.$$

Interpretado geométricamente en V_2, este es el teorema del coseno de la Trigonometría.
14. Supongamos que en lugar de definir el producto escalar de dos vectores $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$ por la fórmula $A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, usamos la definición siguiente:

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\,.$$

¿Cuáles de las propiedades del teorema 12.2 son válidas con esta definición? ¿Es válida la desigualdad de Cauchy-Schwarz?
15. Supongamos que en V_2 definimos el producto escalar de dos vectores $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ con la fórmula

$$A \cdot B = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1\,.$$

Demostrar que son válidas todas las propiedades del teorema 12.2 con esta definición. ¿Es válida la desigualdad de Cauchy-Schwarz?

16. Resolver el ejercicio 15 si el producto escalar de dos vectores $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ de V_3 se define mediante la fórmula $A \cdot B = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_3 + a_3b_1$.
17. Supongamos que en lugar de definir la norma de un vector $A = (a, \ldots, a_n)$ con la fórmula $(A \cdot A)^{1/2}$, usamos la definición siguiente:

$$\|A\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,.$$

a) Demostrar que esta definición de norma satisface todas las propiedades de los teoremas 12.4 y 12.5.
b) Usar esta definición en V_2 y representar en una figura el conjunto de todos los puntos (x, y) de norma 1.

c) ¿Cuáles de las propiedades de los teoremas 12.4 y 12.5 serían válidas si usáramos la definición

$$\|A\| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| ?$$

18. Supongamos que la norma de un vector $A = (a_1, \ldots, a_n)$ se definiera con la fórmula

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| ,$$

donde el símbolo del segundo miembro representa el máximo de los n números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$.
a) ¿Cuáles de las propiedades de los teoremas 12.4 y 12.5 son válidas con esa definición?
b) Usar esa definición de norma en V_2 y representar en una figura el conjunto de todos los puntos (x, y) de norma 1.

19. Si $A = (a_1, \ldots, a_n)$ es un vector de V_n, definir dos normas del modo siguiente:

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad \text{y} \qquad \|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| .$$

Demostrar que $\|A\|_2 \leq \|A\| \leq \|A\|_1$. Interpretar geométricamente esta desigualdad en el plano.

20. Si A y B son dos puntos en el espacio de n dimensiones, la distancia de A a B se designa con $d(A, B)$ y se define con la igualdad $d(A, B) = \|A - B\|$. Demostrar que la distancia tiene las propiedades siguientes:

(a) $d(A, B) = d(B, A)$. (b) $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
(c) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

12.12 Envolvente lineal de un conjunto finito de vectores

Sea $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ un conjunto no vacío que consta de k vectores de V_n, donde k, el número de vectores, puede ser menor, igual o mayor que n, la dimensión del espacio. Si un vector X de V_n puede representarse como una combinación lineal de $A_1, \ldots, A_k$, por ejemplo

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i ,$$

se dice que S *genera* al vector X.

DEFINICIÓN. *El conjunto de todos los vectores generados por S se denomina envolvente lineal de S y se designa por L(S).*

Dicho de otro modo, la envolvente lineal de S es simplemente el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de vectores en S. Obsérvese que las combinaciones lineales de vectores de $L(S)$ pertenecen también a $L(S)$. Decimos que *S genera todo el espacio V_n* si $L(S) = V_n$.

EJEMPLO 1. Sea $S = \{A_1\}$. Entonces $L(S)$ consta de todos los productos de A_1 por escalares.

EJEMPLO 2. Todo conjunto $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ genera el vector nulo ya que $O = 0A_1 + \ldots + 0A_k$. Esta representación, en la que todos los coeficientes $c_1, \ldots, c_k$ son cero, se llama *representación trivial* del vector nulo. Sin embargo, pueden existir combinaciones lineales no triviales que representen O. Por ejemplo, supongamos que uno de los vectores de S es el producto de otro por un escalar, sea $A_2 = 2A_1$. Tenemos entonces muchas representaciones no triviales de O, por ejemplo

$$O = 2tA_1 - tA_2 + 0A_3 + \cdots + 0A_k\,,$$

siendo t cualquier escalar no nulo.

Nos interesan en especial los conjuntos S que generan los vectores de una sola manera.

DEFINICIÓN. *Un conjunto $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de vectores de V_n genera a X con unicidad si S genera a X y si*

$$(12.10) \qquad X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i \quad \text{y} \quad X = \sum_{i=1}^{k} d_i A_i \quad \textit{implica} \quad c_i = d_i \textit{ para todo } i\,.$$

En las dos sumas que aparecen en (12.10), se sobreentiende que los vectores $A_1, \ldots, A_k$ están escritos en el mismo orden así como también que la implicación (12.10) es válida para una ordenación prefijada pero arbitraria de los vectores $A_1, \ldots, A_k$.

TEOREMA 12.7. *Un conjunto S genera un vector cualquiera de $L(S)$ con unicidad si y sólo si S genera con unicidad el vector cero.*

Demostración. Si S genera cualquier vector de $L(S)$ con unicidad, evidentemente genera O con unicidad. Para demostrar el recíproco, supongamos que S genera O con unicidad y elijamos cualquier vector X de $L(S)$. Supongamos que S genera X de dos maneras, por ejemplo

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i \qquad \text{y} \qquad X = \sum_{i=1}^{k} d_i A_i\,.$$

Restando, encontramos que $O = \sum_{i=1}^{k} (c_i - d_i)A_i$. Pero puesto que S genera O con unicidad, debe ser $c_i - d_i = 0$ para todo i, así que S genera X con unicidad.

12.13 Independencia lineal

El teorema 12.7 demuestra la importancia de los conjuntos que generan con unicidad el vector cero. Tales conjuntos se distinguen con un nombre especial.

DEFINICIÓN. *Un conjunto* $S = \{A , \ldots , A_k\}$ *que engendra con unicidad el vector cero se denomina conjunto de vectores linealmente independiente. De no ser así* S *es un conjunto linealmente dependiente.*

Dicho de otro modo, la *independencia* significa que S engendra O únicamente con la representación trivial:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O \quad \text{implica todo } c_i = 0 \, .$$

La *dependencia* significa que S engendra O en alguna forma no trivial. Esto es, para unos ciertos escalares $c_1, \ldots , c_k$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O \text{ pero no todo } c_i \text{ es cero} .$$

Si bien la dependencia e independencia son propiedades de los *conjuntos* de vectores, es corriente aplicar también esas denominaciones a los mismos vectores. Por ejemplo, los vectores de un conjunto linealmente independiente se llaman a menudo vectores linealmente independientes. Convenimos también en llamar conjunto linealmente independiente al conjunto vacío.

Los ejemplos que siguen pueden servir para profundizar en los conceptos de dependencia e independencia.

EJEMPLO 1. Si un subconjunto T de un conjunto S es dependiente, el mismo S es dependiente, porque si T genera O en forma no trivial, lo mismo hace S. Esto es lógicamente equivalente a la proposición de que todo subconjunto de un conjunto independiente es independiente.

EJEMPLO 2. Los n vectores coordenados unitarios $E_1, \ldots , E_n$ de V_n generan O con unicidad así pues son linealmente independientes.

EJEMPLO 3. Cualquier conjunto que contenga el vector cero es dependiente. Por ejemplo, si $A_1 = O$, tenemos la representación no trivial $O = 1A_1 + 0A_2 + \ldots + 0A_k$.

EJEMPLO 4. El conjunto $S = \{i, j, i + j\}$ de vectores de V_2 es linealmente dependiente porque tenemos la representación no trivial del vector cero

$$O = i + j + (-1)(i + j).$$

En este ejemplo el subconjunto $T = \{i, j\}$ es linealmente independiente. El tercer vector, $i + j$, es de la envolvente lineal de T. El teorema siguiente demuestra que si adjuntamos a i y j cualquier vector de la envolvente lineal de T, obtenemos un conjunto dependiente.

TEOREMA 12.8. *Sea $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ un conjunto linealmente independiente de k vectores de V_n, y sea $L(S)$ la envolvente lineal de S. Todo conjunto de $k + 1$ vectores de $L(S)$ es linealmente dependiente.*

Demostración. La demostración se hace por inducción en k, número de vectores de S. Supongamos primero $k = 1$. Entonces, por hipótesis, S consta de un vector, tal como A_1, siendo $A_1 \neq O$ ya que S es independiente. Tomemos ahora dos vectores distintos cualesquiera B_1 y B_2 de $L(S)$. Entonces cada uno es el producto de A_1 por un escalar, por ejemplo $B_1 = c_1A_1$ y $B_2 = c_2A_1$, no siendo c_1 y c_2 los dos nulos. Multiplicando B_1 por c_2 y B_2 por c_1 y restando, encontramos que

$$c_2B_1 - c_1B_2 = O .$$

Esta es una representación no trivial de O así que B_1 y B_2 son dependientes. Esto demuestra el teorema cuando $k = 1$.

Supongamos ahora que el teorema es válido para $k - 1$ y vamos a demostrar que también lo es para k. Tomemos cualquier conjunto de $k + 1$ vectores de $L(S)$, sea $T = \{B_1, B_2, \ldots, B_{k+1}\}$. Queremos demostrar que T es linealmente dependiente. Puesto que cada B_i es de $L(S)$, podemos escribir

$$B_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}A_j \tag{12.11}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, k + 1$. Examinemos todos los escalares a_{i1} que multiplican A_1 y escindamos la demostración en dos casos según sean todos los escalares nulos o no.

CASO 1. $a_{i1} = 0$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, k + 1$. En este caso la suma de (12.11) no incluye A_1 así que cada B_i de T pertenece a la envolvente lineal del conjunto $S' = \{A_2, \ldots, A_k\}$. Pero S' es linealmente independiente y consta de $k - 1$ vectores. Según la hipótesis de inducción, el teorema es válido para $k - 1$ con lo que el conjunto T es dependiente. Esto demuestra el teorema en el Caso 1.

CASO 2. No todos los escalares a_{i1} son cero. Supongamos que $a_{11} \neq 0$. (Si es preciso, podemos volver a numerar los B para que sea así.) Tomando $i = 1$ en la igualdad (12.11) y multiplicando ambos miembros por c_i, siendo $c_i = a_{i1}/a_{11}$, llegamos a

$$c_i B_1 = a_{i1} A_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} A_j .$$

De esta igualdad restemos la (12.11) y obtenemos

$$c_i B_1 - B_i = \sum_{j=2} (c_i a_{1j} - a_{ij}) A_j ,$$

para $i = 2, \ldots, k + 1$. Esta ecuación expresa cada uno de los k vectores $c_i B_1 - B_i$ como combinación lineal de $k - 1$ vectores linealmente independientes $A_2, \ldots, A_k$. Según la hipótesis de inducción, los k vectores $c_i B_1 - B_i$ deben ser dependientes. Por lo tanto, para unos ciertos escalares $t_2, \ldots, t_{k+1}$, no todos nulos, tenemos

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i B_1 - B_i) = O ,$$

de la que resulta

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i \right) B_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i B_i = O .$$

Pero ésta es una combinación lineal no trivial de $B_1, \ldots, B_{k+1}$ que representa el vector cero, con lo cual los vectores $B_1, \ldots, B_{k+1}$ deben ser dependientes. Esto completa la demostración.

A continuación demostramos que el concepto de ortogonalidad está íntimamente relacionado con la independencia lineal.

DEFINICIÓN. *Un conjunto de vectores $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de V_n se denomina ortogonal si $A_i \cdot A_j = 0$ siempre que $i \neq j$. Dicho de otro modo, dos vectores distintos cualesquiera de un conjunto ortogonal son perpendiculares.*

TEOREMA 12.9. *Cualquier conjunto ortogonal $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de vectores no nulos de V_n es linealmente independiente. Además, si S genera un vector X, sea este*

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i , \tag{12.12}$$

entonces los factores escalares $c_1, \ldots, c_k$ vienen dados por las fórmulas

$$c_j = \frac{X \cdot A_j}{A_j \cdot A_j} \quad para \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{12.13}$$

Demostración. Demostremos primero que S es linealmente independiente. Supongamos que $\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O$. Multiplicando escalarmente cada miembro por A_1 y teniendo en cuenta que $A_1 \cdot A_i = 0$ para cada $i \neq 1$, encontramos $c_1(A_1 \cdot A_1) = 0$. Pero $(A_1 \cdot A_1) \neq 0$ puesto que $A_1 \neq O$, con lo que $c_1 = 0$. Repitiendo este razonamiento con A_1 sustituido por A_j, encontramos que cada $c_j = 0$. Por consiguiente S genera O con unicidad por lo que S es linealmente independiente.

Supongamos ahora que S genera X como en (12.12). Formando el producto escalar de X por A_j como antes, encontramos que $c_j(A_j \cdot A_j) = X \cdot A_j$ de donde obtenemos (12.13).

Si todos los vectores $A_1, \ldots, A_k$ del teorema 12.9 tienen norma 1, la fórmula para los multiplicadores se simplifica quedando en la forma

$$c_j = X \cdot A_j .$$

Un conjunto de vectores ortogonales $\{A_1, \ldots, A_k\}$ cada uno de los cuales tiene norma 1, se denomina conjunto *ortonormal*. Los vectores coordenados unitarios $E_1, \ldots, E_n$ son un ejemplo de conjunto ortonormal.

12.14 Bases

Es corriente estudiar conjuntos de vectores que generen cualquier vector de V_n con unicidad. Tales conjuntos se llaman *bases* de V_n.

DEFINICIÓN. *Un conjunto $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de vectores de V_n es una base para V_n si S genera todo vector de V_n con unicidad. Si, además, S es ortogonal, entonces S se denomina base ortogonal.*

Así pues, una base es un conjunto linealmente independiente que genera todo el espacio V_n. El conjunto de vectores coordenados unitarios es un ejemplo de base. Este caso particular de base es también una base ortogonal. Demostremos ahora que toda base contiene el mismo número de elementos.

TEOREMA 12.10. *En un espacio vectorial dado V_n, las bases tienen las propiedades siguientes:*

a) *Toda base contiene exactamente n vectores.*
b) *Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes es un subconjunto de una cierta base.*
c) *Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes es una base.*

Demostración. Los vectores coordenados unitarios $E_1, \ldots, E_n$ constituyen una base para V_n. Si demostramos que dos bases cualesquiera contienen el mismo número de vectores obtenemos a).

Sean S y T dos bases, teniendo S, k vectores y T que tenga r vectores. Si $r > k$, entonces T contiene por lo menos $k + 1$ vectores de $L(S)$, ya que $L(S) = V_n$. Por consiguiente, en virtud del teorema 12.8, T debe ser linealmente dependiente, en contradicción con la hipótesis de que T es una base. Esto significa que no puede ser $r > k$, por tanto será $r \leq k$. Aplicando el mismo razonamiento intercambiando S y T, encontramos que $k \leq r$. Luego, $r = k$ con lo que la parte a) queda demostrada.

Para probar b), sea $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ cualquier conjunto de vectores linealmente independiente de V_n. Si $L(S) = V_n$, S es una base. Si no es así, existe un cierto vector X de V_n que no pertenece a $L(S)$. Adjuntemos este vector a S y consideremos el nuevo conjunto $S' = \{A_1, \ldots, A_k, X\}$. Si este conjunto fuera dependiente, existirían unos escalares $c_1, \ldots, c_{k+1}$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i + c_{k+1} X = O\,.$$

Pero $c_{k+1} \neq 0$ puesto que $A_1, \ldots, A_k$ son independientes. Luego, podríamos resolver esa ecuación respecto a X y encontrar que $X \in L(S)$, en contradicción con el hecho de que X no pertenece a $L(S)$. Por consiguiente, el conjunto S' es linealmente independiente pero contiene $k+1$ vectores. Si $L(S') = V_n$, S' es una base y, puesto que S es un subconjunto de S', la parte b) queda demostrada. Si S' no es una base, podemos razonar con S' como lo hicimos con S, obteniendo un nuevo conjunto S'' que contiene $k + 2$ vectores y es linealmente independiente. Si S'' es una base, la parte b) está demostrada. Si no, repetimos el proceso. Debemos llegar a una base al cabo de un número finito de repeticiones del proceso, de otro modo obtendríamos un conjunto independiente con $n+1$ vectores, en contradicción con el teorema 12.8. Por lo tanto la parte b) queda demostrada.

Finalmente, utilizando las partes a) y b) demostramos c). Sea S cualquier conjunto linealmente independiente que conste de n vectores. Según la parte b), S es un subconjunto de una cierta base B. Pero según a) la base B tiene exactamente n elementos, con lo que $S = B$.

12.15 Ejercicios

1. Sean $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ los vectores coordenados unitarios de V_2. Hallar en cada caso escalares x e y tales que $x(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) + (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ es igual a
(a) $\boldsymbol{i}$; (b) $\boldsymbol{j}$; (c) $3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$; (d) $7\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$.
2. Si $A = (1, 2)$, $B = (2, -4)$, y $C = (2, -3)$ son tres vectores de V_2, hallar unos escalares x e y tales que $C = xA + yB$. ¿Cuántos pares de esos existen?

3. Si $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$, y $C = (2, -11, 7)$ son tres vectores de V_3, hallar unos escalares x e y tales que $C = xA + yB$.
4. Demostrar que el ejercicio 3 no tiene solución si C se reemplaza por el vector (2, 11, 7).
5. Sean A y B dos vectores no nulos de V_n
   a) Si A y B son paralelos, demostrar que son linealmente dependientes.
   b) Si A y B no son paralelos, demostrar que son linealmente independientes.
6. Si (a, b) y (c, d) son dos vectores de V_2, demostrar que son linealmente independientes si y sólo si $ad - bc \neq 0$.
7. Hallar todos los números reales t para los cuales los dos vectores $(1 + t, 1 - t)$ y $(1 - t, 1 + t)$ de V_2 sean linealmente independientes.
8. Sean $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ los vectores coordenados unitarios de V_3. Demostrar que los cuatro vectores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ son linealmente dependientes, pero que tres cualesquiera de ellos son linealmente independientes.
9. Sean $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ los vectores coordenados unitarios de V_2 y $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$.
   a) Demostrar que S es linealmente independiente.
   b) Demostrar que $\boldsymbol{j}$ pertenece a la envolvente lineal de S.
   c) Expresar $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.
   d) Demostrar que $L(S) = V_2$.
10. Considerar los tres vectores $A = \boldsymbol{i}$, $B = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $C = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ de V_3.
   a) Demostrar que el conjunto $\{A, B, C\}$ es linealmente independiente.
   b) Expresar cada uno de los vectores $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ como combinación lineal de A, B y C.
   c) Expresar $2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ como combinación lineal de A, B, y C.
   d) Demostrar que $\{A, B, C\}$ es una base para V_3.
11. Sean $A = (1, 2)$, $B = (2, -4)$, $C = (2, -3)$, y $D = (1, -2)$ cuatro vectores de V_2. Formar todos los subconjuntos no vacíos de $\{A, B, C, D\}$ que son linealmente independientes.
12. Sean $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1, 1)$ y $C = (1, 1, 0, 0)$ tres vectores de V_4.
   a) Determinar si A, B, C son linealmente dependientes o independientes.
   b) Obtener un vector no nulo D tal que A, B, C, D sean dependientes.
   c) Obtener un vector E tal que A, B, C, E sean independientes.
   d) Elegido E de la parte c), expresar el vector $X = (1, 2, 3, 4)$ como combinación lineal de A, B, C, E.
13. a) Demostrar que los tres vectores siguientes de V_3 son linealmente independientes: $(\sqrt{3}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{3}, 1)$, $(0, 1, \sqrt{3})$.
   b) Demostrar que los tres siguientes son dependientes: $(\sqrt{2}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{2}, 1)$, $(0, 1, \sqrt{2})$.
   c) Hallar todos los números reales t para los cuales los tres vectores siguientes de V_3 son dependientes: $(t, 1, 0)$, $(1, t, 1)$, $(0, 1, t)$.
14. Considerar los siguientes conjuntos de vectores de V_4. En cada caso, hallar un subconjunto linealmente independiente que contenga el mayor número posible de vectores.
   (a) $\{(1, 0, 1, 0),\ (1, 1, 1, 1),\ (0, 1, 0, 1),\ (2, 0, -1, 0)\}$.
   (b) $\{(1, 1, 1, 1),\ (1, -1, 1, 1),\ (1, -1, -1, 1),\ (1, -1, -1, -1)\}$.
   (c) $\{(1, 1, 1, 1),\ (0, 1, 1, 1),\ (0, 0, 1, 1),\ (0, 0, 0, 1)\}$.
15. Dados tres vectores linealmente independientes A, B, C de V_n. Demostrar si son o no ciertas las proposiciones siguientes.
   a) $A + B$, $B + C$, $A + C$ son linealmente independientes.
   b) $A - B$, $B + C$, $A + C$ son linealmente independientes.
16. a) Demostrar que un conjunto S de tres vectores de V_3 es una base para V_3 si y sólo si su envolvente lineal $L(S)$ contiene los tres vectores coordenados unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.
   b) Establecer y demostrar una generalización de la parte a) para V_n.

17. Encontrar dos bases para V_3 que contengan los dos vectores (0, 1, 1) y (1, 1, 1).
18. Encontrar dos bases para V_4 que tengan comunes sólo los dos vectores (0, 1, 1, 1) y (1, 1, 1, 1).
19. Considerar los siguientes conjuntos de vectores de V_3:

$$S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1)\},\ T = \{(2, 1, 0), (2, 0, -2)\},\ U = \{(1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$$

a) Demostrar que $L(T) \subseteq L(S)$.
b) Determinar todas las relaciones de inclusión que existen entre los conjuntos $L(S)$, $L(T)$, y $L(U)$.

20. Designemos con A y B dos subconjuntos finitos de vectores en un espacio vectorial V_n, y con $L(A)$ y $L(B)$ sus envolventes lineales. Probar cada una de las proposiciones siguientes.
a) Si $A \subseteq B$, entonces $L(A) \subseteq L(B)$.
b) $L(A \cap B) \subseteq L(A) \cap L(B)$.
c) Dar un ejemplo en el que $L(A \cap B) \neq L(A) \cap L(B)$.

12.16 El espacio vectorial $V_n(\mathbf{C})$ de *n*-plas de números complejos

En la sección 12.2 se definió el espacio vectorial V_n como el conjunto de todas las n-plas de números reales. La igualdad, la adición de vectores, y la multiplicación por escalares se definieron en función de los componentes del siguiente modo: Si $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$, entonces

$$A = B \quad \text{significa} \quad a_i = b_i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A + B = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \qquad cA = (ca_1, \ldots, ca_n).$$

Si todos los escalares a_i, b_i y c de esas relaciones se reemplazan por números *complejos,* el nuevo sistema algebraico así obtenido se llama *espacio vectorial complejo* y se designa con $V_n(\mathbf{C})$. La $\mathbf{C}$ se utiliza para recordarnos que los escalares son complejos.

Puesto que los números complejos satisfacen el mismo conjunto de propiedades que los números reales, todos los teoremas relativos al espacio vectorial real V_n que utilizan tan sólo propiedades de los números reales son también válidos para $V_n(\mathbf{C})$, con tal que todos los escalares puedan ser complejos. En particular, aquellos teoremas de este capítulo que sólo tratan de la adición de vectores y de la multiplicación por escalares son también válidos para $V_n(\mathbf{C})$.

Esta extensión no se hace solamente con la idea de conseguir una generalización. Los espacios vectoriales complejos surgen espontáneamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales y en la moderna Mecánica cuántica, así que su estudio es de importancia considerable. Afortunadamente, gran parte de los teoremas relativos al espacio vectorial real V_n subsisten sin cambio para $V_n(\mathbf{C})$. Sin embargo, se hacen unos pequeños cambios en aquellos teoremas que incluyen productos escalares. Al probar que el producto escalar $A \cdot A$ de un vector no nulo

por sí mismo es positivo, hicimos uso del hecho de que una suma de cuadrados de números reales es positiva. Puesto que una suma de cuadrados de números complejos puede ser negativa, tenemos que modificar la definición de $A \cdot B$ si queremos conservar la propiedad de que sea positivo. Para $V_n(\mathbf{C})$, usamos la siguiente definición de producto escalar.

DEFINICIÓN. Si $A = (a\ , \ldots , a_n)$ y $B = (b_1, \ldots , b_n)$ *son dos vectores de* $V_n(\mathbf{C})$, *definimos su producto escalar* $A \cdot B$ *con la fórmula*

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k ,$$

donde $\bar{b}_k$ *es el complejo conjugado de* b_k.

Obsérvese que esta definición está de acuerdo con la antes dada para V_n porque $b_k = b_k$ cuando b_k es real. Las propiedades fundamentales del producto escalar, correspondientes a las del teorema 12.2, toman ahora la siguiente forma.

TEOREMA 12.11. *Para todos los vectores* A, B, C *de* $V_n(\mathbf{C})$ *y todos los escalares complejos* c, *tenemos*

(a) $A \cdot B = \overline{B \cdot A}$,
(b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
(c) $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (\bar{c}B)$,
(d) $A \cdot A > 0$ *si* $A \neq O$,
(e) $A \cdot A = 0$ *si* $A = O$.

Todas esas propiedades son sencillas consecuencias de la definición y sus demostraciones se dejan como ejercicios. El lector debería observar que aparece el conjugado en la propiedad a) cuando se invierte el orden de los factores. Asimismo, aparece el conjugado del factor escalar en la propiedad c) cuando el escalar c pasa de un lado al otro del punto.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz toma ahora la forma

$$|A \cdot B|^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B) . \tag{12.14}$$

La demostración es parecida a la dada para el teorema 12.3. Consideremos el vector $C = xA - yB$, donde $x = B \cdot B$ e $y = A \cdot B$, y calculamos $C \cdot C$. La desigualdad $C \cdot C \geq 0$ nos conduce a (12.14). Los detalles los dejamos como ejercicio para el lector.

Puesto que el producto escalar de un vector por sí mismo es no negativo, podemos introducir la norma de un vector de $V_n(\mathbf{C})$ mediante la fórmula usual

$$\|A\| = (A \cdot A)^{1/2} .$$

Las propiedades fundamentales de las normas, como se establecieron en el teorema 12.4, también son válidas sin modificación para $V_n(\mathbf{C})$. La desigualdad triangular, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, también vale en $V_n(\mathbf{C})$.

La ortogonalidad de vectores en $V_n(\mathbf{C})$ se define con la relación $A \cdot B = 0$. Como en el caso real, dos vectores A y B de $V_n(\mathbf{C})$ son ortogonales si y sólo si satisfacen la identidad pitagórica, $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$.

Los conceptos de envolvente lineal, independencia lineal, y base, se definen para $V_n(\mathbf{C})$ exactamente como en el caso real. Los teoremas del 12.7 al 12.10 y sus demostraciones son todas válidas sin modificación para $V_n(\mathbf{C})$.

12.17 Ejercicios

1. Sean $A = (1, i)$, $B = (i, -i)$, y $C = (2i, 1)$ tres vectores de $V_2(\mathbf{C})$. Calcular cada uno de los siguientes productos escalares:

   (a) $A \cdot B$; (b) $B \cdot A$; (c) $(iA) \cdot B$; (d) $A \cdot (iB)$; (e) $(iA) \cdot (iB)$;
   (f) $B \cdot C$; (g) $A \cdot C$; (h) $(B + C) \cdot A$; (i) $(A - C) \cdot B$;
   (j) $(A - iB) \cdot (A + iB)$.

2. Si $A = (2, 1, -i)$ y $B = (i, -1, 2i)$, hallar un vector no nulo C de $V_3(\mathbf{C})$ ortogonal simultáneamente a A y B.
3. Demostrar que para dos vectores cualesquiera A y B de $V_n(\mathbf{C})$, tenemos la identidad

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + A \cdot B + \overline{A \cdot B}.$$

4. Demostrar que para dos vectores cualesquiera A y B de $V_n(\mathbf{C})$, tenemos la identidad

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 2(A \cdot B + \overline{A \cdot B}).$$

5. Demostrar que para dos vectores cualesquiera A y B de $V_n(\mathbf{C})$, tenemos la identidad

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\,\|A\|^2 + 2\,\|B\|^2.$$

6. a) Demostrar que para dos vectores cualesquiera A y B de $V_n(\mathbf{C})$, la suma $\overline{A \cdot B} + A \cdot B$ es real.
   b) Si A y B son vectores no nulos de $V_n(\mathbf{C})$, demostrar que

$$-2 \leq \frac{A \cdot B + \overline{A \cdot B}}{\|A\|\ \|B\|} \leq 2.$$

7. Definimos el ángulo θ formado por dos vectores no nulos A y B de $V_n(\mathbf{C})$ mediante la identidad

$$\theta = \arccos \frac{\frac{1}{2}(A \cdot B + \overline{A \cdot B})}{\|A\|\ \|B\|}.$$

La desigualdad del ejercicio 6 demuestra que siempre existe un único ángulo θ en el intervalo cerrado $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisface esta igualdad. Demostrar que

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\,\|A\|\,\|B\| \cos\theta\,.$$

8. Aplicar la definición del ejercicio 7 al cálculo del ángulo formado por los dos vectores siguientes de $V_5(\mathbf{C})$: $A = (1, 0, i, i, i)$, y $B = (i, i, i, 0, i)$.
9. a) Demostrar que los tres vectores siguientes forman una base para $V_3(\mathbf{C})$: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, i, 0)$, $C = (1, 1, i)$.
   b) Expresar el vector $(5, 2 - i, 2i)$ como combinación lineal de A, B, C.
10. Demostrar que la base de los vectores coordenados unitarios $E_1, \ldots, E_n$ de V_n también constituyen una base para $V_n(\mathbf{C})$.

13

APLICACIONES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

13.1 Introducción

En este capítulo se trata de las aplicaciones del Álgebra vectorial al estudio de las rectas, los planos y las secciones cónicas. En el capítulo 14 el Álgebra vectorial se combina con los métodos del cálculo, y se dan otras aplicaciones al estudio de curvas y a ciertos problemas de Mecánica.

El estudio de la Geometría como sistema deductivo, fue concebido por Euclides aproximadamente 300 años antes de Jesucristo, empezando con un conjunto de axiomas o postulados que describen propiedades de los puntos y las rectas.

Los conceptos «punto» y «recta» se toman como nociones primarias y no se definen. Se definen otros conceptos a partir de los puntos y rectas, y los teoremas se deducen sistemáticamente a partir de los axiomas. Euclides estableció diez axiomas con los que intentó deducir todos sus teoremas. Ha sido demostrado que esos axiomas no son adecuados para la teoría. Por ejemplo, en la demostración de su primer teorema, Euclides hace una hipótesis tácita relativa a la intersección de dos circunferencias que no está cubierta por sus axiomas. Desde entonces han sido formuladas otras listas de axiomas de los que resultan todos los teoremas de Euclides. La más famosa es la que dio el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) en su obra *Grundlagen der Geometrie,* publicado en 1899. (Existe una traducción inglesa: *The Foundations of Geometry,* Open Court Publishing Co., 1947.) Este trabajo, del que se hicieron siete ediciones alemanas en vida de Hilbert, inauguró la Matemática abstracta del siglo XX.

Hilbert comenzó su estudio de la Geometría plana con cinco conceptos que no definió: *punto, recta, en* (relación entre un punto y una recta), *entre* (relación entre un punto y un par de puntos), y *congruencia* (relación entre pares de puntos). Da entonces quince axiomas a partir de los cuales desarrolla toda la Geometría plana euclidiana. La Geometría del espacio se basa en veintiún axiomas que incluyen seis conceptos que no se definen.

La introducción de la Geometría analítica es algo distinta. Definimos conceptos tales como punto, recta, en, entre, etc., pero lo hacemos en función de números reales, que no se definen. La estructura matemática que resulta se llama *modelo analítico* de la Geometría euclidiana. En este modelo, se utilizan las propiedades de los números reales para deducir los axiomas de Hilbert. No intentaremos comentar todos los axiomas de Hilbert. En lugar de eso, indicaremos tan sólo cómo se definen los conceptos primitivos por medio de números reales y daremos algunas demostraciones para ilustrar los métodos de la Geometría analítica.

13.2 Rectas en el espacio n-dimensional

En esta sección empleamos los números reales para definir los conceptos de *punto, recta,* y *en.* Las definiciones se formulan de modo que se acomoden a nuestras ideas intuitivas acerca de la Geometría euclidiana tri-dimensional, pero tienen también sentido en un espacio de n dimensiones para cualquier $n \geq 1$.

Un punto es simplemente un vector de V_n, esto es, una n-pla ordenada de números reales; utilizaremos las palabras «punto» y «vector» indistintamente. El espacio vectorial V_n es el modelo analítico del espacio *euclidiano n-dimensional.* Para definir la «recta», empleamos las operaciones algebraicas de adición y de multiplicación por escalares en V_n.

DEFINICIÓN. *Sea P un punto dado y A un vector no nulo dado. El conjunto de todos los puntos de la forma $P + tA$, en donde t recorre todos los números reales, es una recta que pasa por P y es paralela a A. Designamos esa recta con $L(P; A)$ y escribimos*

$$L(P; A) = \{P + tA \mid t \text{ real}\} \quad \textit{o, más brevemente,} \quad L(P; A) = \{P + tA\}.$$

Se dice que un punto Q está en la recta $L(P; A)$ si $Q \in L(P; A)$.

En el símbolo $L(P; A)$, el punto P escrito en primer lugar está en la recta, ya que corresponde a $t = 0$. El segundo punto, A, se llama *vector de dirección* de la recta. La recta $L(O; A)$ que pasa por el origen O es la envolvente lineal de A; consta de todos los productos de A por escalares. La recta por P paralela a A se obtiene sumando P a cada vector de la envolvente lineal de A.

La figura 13.1 muestra la interpretación geométrica de esta definición en V_3. Cada punto $P + tA$ puede representarse por el extremo de un vector geométrico trazado por el origen. Cuando t varía tomando todos los valores reales, el correspondiente punto $P + tA$ describe una recta que pasa por P y paralela al vector A. La figura 13.1 muestra los puntos correspondientes a algunos valores de t en las dos rectas $L(P; A)$ y $L(O; A)$.

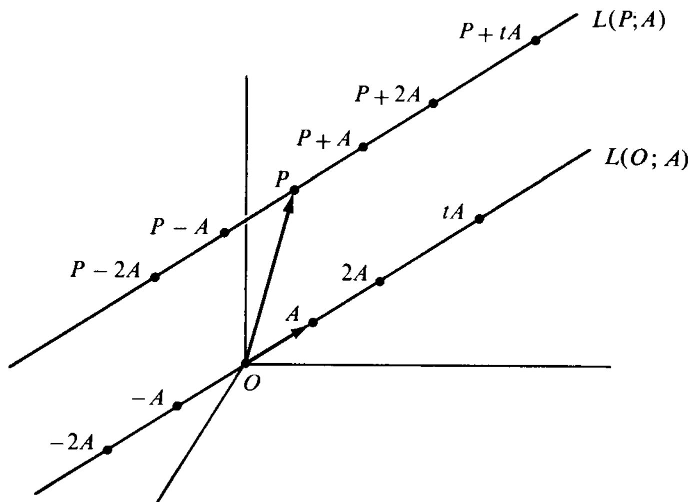


FIGURA 13.1 *La recta L(P; A) por P paralela a A y su relación geométrica con la recta L(O; A) por O paralela a A.*

13.3 Algunas propiedades sencillas de las rectas

Primero demostramos que el vector dirección A que aparece en la definición de $L(P; A)$ puede reemplazarse por cualquier otro vector paralelo a A. (Recordemos que dos vectores A y B se llaman paralelos si $A = cB$ para un cierto escalar c no nulo.)

TEOREMA 13.1. *Dos rectas $L(P; A)$ y $L(P; B)$ que pasan por el mismo punto P son iguales si y sólo si los vectores de dirección A y B son paralelos.*

Demostración. Supongamos primero que $L(P; A) = L(P; B)$. Tomemos un punto en $L(P; A)$ distinto de P, por ejemplo $P + A$. Este punto está también en $L(P; B)$ de manera que $P + A = P + cB$ para un cierto escalar c. Luego, tenemos $A = cB$ y $c \neq 0$ ya que $A \neq O$. Por consiguiente, A y B son paralelos.

Demostremos ahora el recíproco. Supongamos que A y B son paralelos, sea $A = cB$ para un cierto $c \neq 0$. Si Q está en $L(P; A)$, entonces tenemos $Q = P + tA = P + t(cB) = P + (ct)B$, con lo que Q está en $L(P; B)$. Por consiguiente $L(P; A) \subseteq L(P; B)$. Del mismo modo, $L(P; B) \subseteq L(P; A)$, por tanto $L(P; A) = L(P; B)$.

A continuación demostramos que el punto P que aparece en la definición de $L(P; A)$ puede reemplazarse por cualquier otro punto Q situado en la misma recta.

TEOREMA 13.2. *Dos rectas $L(P; A)$ y $L(Q; A)$ con el mismo vector de dirección A son iguales si y sólo si Q está en $L(P; A)$.*

Demostración. Supongamos que $L(P; A) = L(Q; A)$. Puesto que Q está en $L(Q; A)$, Q también está en $L(P; A)$. Para demostrar el recíproco, supongamos que Q está en $L(P; A)$, sea $Q = P + cA$. Queremos demostrar que $L(P; A) = L(Q; A)$. Si $X \in L(P; A)$, entonces $X = P + tA$ para un cierto t. Pero $P = Q - cA$, así que $X = Q - cA + tA = Q + (t - c)A$, y por tanto X también está en $L(Q; A)$. Por lo tanto $L(P; A) \subseteq L(Q; A)$. Análogamente, encontramos $L(Q; A) \subseteq L(P; A)$, con lo cual las dos rectas son iguales.

Uno de los famosos postulados de Euclides es el *postulado de las paralelas* que es lógicamente equivalente a la proposición de que «por un punto dado existe una y sólo una recta paralela a una recta dada». Deduciremos esta propiedad como una consecuencia del teorema 13.1. Necesitamos primero definir el paralelismo de rectas.

DEFINICIÓN. *Dos rectas $L(P; A)$ y $L(Q; B)$ son paralelas si sus vectores de dirección A y B son paralelos.*

TEOREMA 13.3. *Dados una recta L y un punto Q no perteneciente a L, existe una y sólo una recta L' que contiene Q y es paralela a L.*

Demostración. Supongamos que la recta dada tiene el vector de dirección A. Consideremos la recta $L' = L(Q; A)$. Esta recta contiene Q y es paralela a L. El teorema 13.1 nos dice que ésta es la única recta con esas dos propiedades.

Nota: Largo tiempo los matemáticos sospecharon que el postulado de las paralelas podía deducirse a partir de los otros postulados de Euclides, pero todos los intentos para demostrarlo resultaron inútiles. A principios del siglo XIX los matemáticos Karl F. Gauss (1777-1855), J. Bolyai (1802-1860), y N. I. Lobatchevski (1793-1856) llegaron a la convicción de que el postulado de las paralelas no podía deducirse de los otros y desarrollaron Geometrías no euclidianas, esto es, Geometrías en las que no es válido el citado postulado. El trabajo de esos hombres inspiró a otros matemáticos y científicos la ampliación de sus puntos de vista acerca de las «verdades aceptadas» y a rechazar otros axiomas que durante siglos habían sido considerados como sagrados.

También se deduce con facilidad la siguiente propiedad de las rectas que Euclides estableció como un axioma.

TEOREMA 13.4. *Dos puntos distintos determinan una recta. Esto es, si $P \neq Q$, existe una y sólo una recta que contiene P y Q. Puede describirse como el conjunto $\{P + t(Q - P)\}$.*

Demostración. Sea L la recta que pasa por P y es paralela a $Q-P$, esto es,

$$L = L(P; Q - P) = \{P + t(Q - P)\}.$$

Esta recta contiene a P y a Q (tomar $t = 0$ para P y $t = 1$ para Q). Sea ahora L' cualquier recta que contenga P y Q. Demostraremos que $L' = L$. Puesto que L' contiene P, tenemos $L' = L(P; A)$ para algún $A \neq O$. Pero también L' contiene Q con lo que $P + cA = Q$ para un cierto c. Luego tenemos $Q-P = cA$, donde $c \neq 0$ ya que $Q \neq P$. Por consiguiente $Q-P$ es paralela a A con lo que, según el teorema 13.2, tenemos $L' = L(P; A) = L(P; Q-P) = L$.

EJEMPLO. El teorema 13.4 nos da un sencillo método para averiguar si un punto Q está en una recta dada $L(P; A)$. Nos dice que Q está en $L(P; A)$ si y sólo si $Q - P$ es paralelo a A. Por ejemplo, consideremos la recta $L(P; A)$, donde $P = (1, 2, 3)$ y $A = (2, -1, 5)$. Para averiguar si el punto $Q = (1, 1, 4)$ está en esa recta, examinemos $Q - P = (0, -1, 1)$. Puesto que $Q - P$ no es el producto de A por un escalar, el punto $(1, 1, 4)$ no está en esa recta. Por otra parte, si $Q = (5, 0, 13)$, encontramos que $Q - P = (4, -2, 10) = 2A$, así que Q está en la recta.

La dependencia lineal de dos vectores en V_n, puede expresarse con lenguaje geométrico.

TEOREMA 13.5. *Dos vectores A y B de V_n son linealmente dependientes si y sólo si están en la misma recta que pasa por el origen.*

Demostración. Si es cero uno de los vectores A o B, el resultado es trivial. Si ambos son no nulos, entonces A y B son dependientes si y sólo si $B = tA$ para un cierto escalar t. Pero $B = tA$ si y sólo si B está en la recta que pasa por el origen y es paralela a A.

13.4 Rectas y funciones vectoriales

El concepto de recta se puede relacionar al de función. La correspondencia que asocia a cada número real t el vector $P + tA$, es un ejemplo de función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y cuyo recorrido es la recta $L(P; A)$. Si designamos la función con el símbolo X, el valor de la función $X(t)$ en t viene dado por la ecuación

$$X(t) = P + tA. \tag{13.1}$$

Llamamos a ésta, función vectorial de una variable real.

La consideración de esa función es importante debido a que, como veremos en el capítulo 14, nos da un método natural para estudiar curvas en forma más general.

El escalar t de la ecuación (13.1) se denomina a menudo *parámetro,* y la ecuación (13.1) se llama *ecuación vectorial paramétrica* o simplemente *ecuación vectorial* de la recta. A veces conviene imaginar la recta como la trayectoria de una partícula móvil, en cuyo caso el parámetro t es el *tiempo* y el vector $X(t)$ el *vector posición*

Observemos que dos puntos $X(a)$ y $X(b)$ de una recta dada $L(P; A)$ son iguales si y sólo si tenemos $P + aA = P + bA$ o $(a - b)A = O$. Puesto que $A \neq O$, esta última relación es válida si y sólo si $a = b$. Así que, valores distintos del parámetro t conducen a puntos distintos de la recta.

Consideremos ahora tres puntos distintos de una recta dada, sean $X(a)$, $X(b)$, y $X(c)$, siendo $a > b$. Decimos que $X(c)$ está *entre* $X(a)$ y $X(b)$ si c está entre a y b, esto es, si $a < c < b$.

La congruencia puede definirse en función de las normas. Un par de puntos P, Q se llama *congruente* a otro par P', Q' si $\|P - Q\| = \|P' - Q'\|$. La norma $\|P - Q\|$ se llama también distancia entre P y Q.

Esto completa las definiciones de los conceptos *punto, recta, en, entre,* y *congruencia* en nuestro modelo analítico del espacio euclídeo de n dimensiones. Concluimos esta sección con alguna otra observación relativa a las ecuaciones paramétricas para las rectas en el espacio tridimensional.

Si una recta pasa por dos puntos distintos P y Q, podemos utilizar $P - Q$ como vector de dirección A en la ecuación (13.1); la ecuación vectorial de la recta es entonces

$$X(t) = P + t(Q - P) \qquad \text{o} \qquad X(t) = tQ + (1 - t)P .$$

Las ecuaciones vectoriales se pueden expresar también en función de los componentes. Por ejemplo, si escribimos $P = (p, q, r)$, $A = (a, b, c)$, y $X(t) = (x, y, z)$, la ecuación (13.1) es equivalente a las tres ecuaciones escalares

$$(13.2) \qquad x = p + ta , \qquad y = q + tb , \qquad z = r + tc .$$

Estas son las *ecuaciones escalares paramétricas* o simplemente *ecuaciones paramétricas* de la recta; son útiles en los cálculos en los que intervienen los componentes. La ecuación vectorial es más sencilla y más natural para estudiar las propiedades generales de las rectas.

Si todos los vectores son del espacio de dos dimensiones, se necesitan sólo las dos primeras ecuaciones paramétricas (13.2). En este caso, podemos eliminar t entre las dos ecuaciones paramétricas y obtenemos la relación

$$(13.3) \qquad b(x - p) - a(y - q) = 0 ,$$

que se llama *ecuación cartesiana* de la recta. Si $a \neq 0$, aquélla puede escribirse en la forma

$$y - q = \frac{b}{a}(x - p).$$

El *punto* (p, q) está en la recta; el número b/a es la *pendiente* de la recta.

La ecuación cartesiana (13.3) puede también escribirse por medio de productos escalares. Si ponemos $N = (b, -a)$, $X = (x, y)$, y $P = (p, q)$, la ecuación (13.13) se convierte en

$$(X - P) \cdot N = 0 \qquad \text{o} \qquad X \cdot N = P \cdot N.$$

El vector N es perpendicular al vector de dirección A puesto que $N \cdot A = = ba - ab = 0$; el vector N se llama *vector normal* a la recta. La recta consta de todos los puntos X que satisfacen la relación $(X - P) \cdot N = 0$.

En la figura 13.2 se muestra el significado geométrico de esa relación. Los puntos P y X están en la recta y el vector normal N es ortogonal al $X - P$. La figura sugiere que entre todos los puntos X de la recta, el de menor longitud $\|X\|$ se obtiene cuando X en la proyección de P sobre N. Damos ahora una demostración algebraica de este hecho.

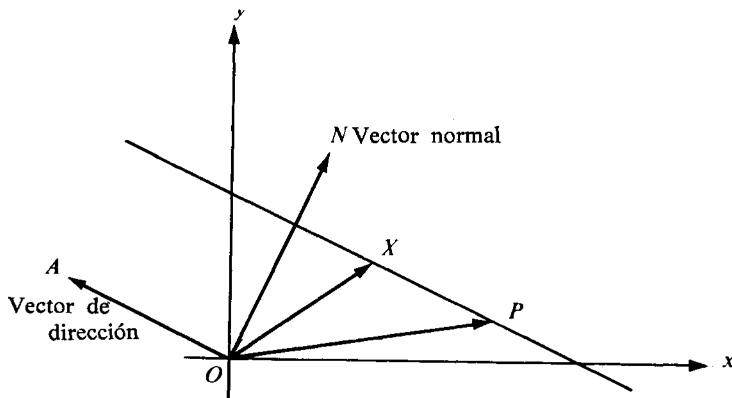


FIGURA 13.2 *Recta en el plano xy que pasa por P con vector normal N. Cada punto X de la recta satisface* $(X - P) \cdot N = 0$.

TEOREMA 13.6. *Sea L la recta de* V_2 *consistente en todos los puntos X que satisfacen*

$$X \cdot N = P \cdot N,$$

estando P en la recta y siendo N un vector no nulo normal a la recta. Pongamos

$$d = \frac{|P \cdot N|}{\|N\|}$$

Todo X de L tiene longitud $\|X\| \geq d$. *Además,* $\|X\| = d$ *si y sólo si X es la proyección de P sobre N:*

$$X = tN, \qquad \textit{donde} \quad t = \frac{P \cdot N}{N \cdot N}.$$

Demostración. Si $X \in L$, tenemos $X \cdot N = P \cdot N$. Según la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$|P \cdot N| = |X \cdot N| \leq \|X\| \; \|N\|,$$

lo que implica $\|X\| \geq |P \cdot N| / \|N\| = d$. El signo de igualdad es válido si y sólo si $X = tN$ para un cierto escalar t, en cuyo caso $P \cdot N = X \cdot N = tN \cdot N$, con lo cual $t = P \cdot N / N \cdot N$. Esto completa la demostración.

Del mismo modo podemos demostrar que si Q es un punto dado de V_2 no situado en la recta L, entonces para un cierto X de L el menor valor de $\|X - Q\|$ es $|(P - Q) \cdot N| / \|N\|$, y esto ocurre cuando $X - Q$ es la proyección de $P - Q$ sobre el vector normal N. El número

$$\frac{|(P - Q) \cdot N|}{\|N\|}$$

se llama *distancia desde el punto Q a la recta L.* El lector podría representar estos conceptos en una figura parecida a la 13.2.

13.5 Ejercicios

1. Una recta L de V_2 contiene los dos puntos $P = (-3, 1)$ y $Q = (1, 1)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en L. a) $(0, 0)$; b) $(0, 1)$; c) $(1, 2)$; d) $(2, 1)$; e) $(-2, 1)$.
2. Resolver el ejercicio 1 si $P = (2, -1)$ y $Q = (-4, 2)$.
3. Una recta L de V_2 contiene el punto $P = (-3, 1, 1)$ y es paralela al vector $(1, -2, 3)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en L. a) $(0, 0, 0)$; b) $(2, -1, 4)$; c) $(-2, -1, 4)$; d) $(-4, 3, -2)$; e) $(2, -9, 16)$.
4. Una recta L contiene los dos puntos $P = (-3, 1, 1)$ y $Q = (1, 2, 7)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en L. a) $(-7, 0, 5)$; b) $(-7, 0, -5)$; c) $(-11, 1, 11)$; d) $(-11, -1, 11)$; e) $(-1, \frac{3}{2}, 4)$; f) $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 3)$, g) $(-1, \frac{3}{2}, -4)$.
5. En cada caso, determinar si los tres puntos P, Q, R están en una recta.
   (a) $P = (2, 1, 1)$, $Q = (4, 1, -1)$, $R = (3, -1, 1)$.
   (b) $P = (2, 2, 3)$, $Q = (-2, 3, 1)$, $R = (-6, 4, 1)$.
   (c) $P = (2, 1, 1)$, $Q = (-2, 3, 1)$, $R = (5, -1, 1)$.

6. Entre los ocho puntos siguientes A, B, y C están en una recta. Determinar todos los subconjuntos de tres o más puntos que están en línea recta: $A=(2, 1, 1)$, $B=(6, -1, 1)$, $C = (-6, 5, 1)$, $D = (-2, 3, 1)$, $E = (1, 1, 1)$, $F = (-4, 4, 1)$, $G = (-13, 9, 1)$, $H = (14, -6, 1)$.
7. Una recta pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es paralela al vector $A = (1, 2, 3)$. Otra recta por $Q = (2, 1, 0)$ es paralela al vector $B = (3, 8, 13)$. Demostrar que las dos rectas se cortan y determinar su punto de intersección.
8. a) Demostrar que dos rectas $L(P; A)$ y $L(Q; B)$ de V_n se cortan si y sólo si $P - Q$ pertenece a la envolvente lineal de A y B.
   b) Determinar si se cortan o no las dos rectas siguientes de V_3:

$$L = \{(1, 1, -1) + t(-2, 1, 3)\}, \qquad L' = \{(3, -4, 1) + t(-1, 5, 2)\}.$$

9. Sea $X(t) = P + tA$ un punto arbitrario en la recta $L(P; A)$, siendo $P = (1, 2, 3)$ y $A = (1, -2, 2)$, y sea $Q = (3, 3, 1)$.
   a) Calcular $\|Q - X(t)\|^2$, cuadrado de la distancia entre Q y $X(t)$.
   b) Demostrar que hay exactamente un punto $X(t_0)$ para el que la distancia $\|Q - X(t)\|$ es mínima y calcularla.
   c) Demostrar que $Q - X(t_0)$ es ortogonal a A.
10. Sea Q un punto no situado en la recta $L(P; A)$ de V_n.
   a) Sea $f(t) = \|Q - X(t)\|^2$, donde $X(t) = P + tA$. Demostrar que $f(t)$ es un polinomio cuadrático en t y que tal polinomio alcanza su valor mínimo en un solo valor de t, tal como $t = t_0$.
   b) Demostrar que $Q - X(t_0)$ es ortogonal a A.
11. Dadas dos rectas paralelas $L(P; A)$ y $L(Q; A)$ de V_n. Demostrar que o bien $L(P; A) = L(Q; A)$ o la intersección $L(P; A) \cap L(Q; A)$ es vacía.
12. Dadas dos rectas $L(P; A)$ y $L(Q; B)$ de V_n que no son paralelas. Demostrar que la intersección es vacía o consta de un solo punto.

13.6 Planos en el espacio euclideo n-dimensional

Se definió una recta en el espacio n-dimensional como un conjunto de la forma $\{P + tA\}$ obtenida sumando a un punto dado P todos los vectores de la envolvente lineal de un vector A no nulo. De modo parecido se define un plano, con la diferencia de que sumamos a P todos los vectores de la envolvente lineal de dos vectores A y B linealmente independientes. Para asegurarnos que V_n contiene dos vectores linealmente independientes, suponemos desde el principio que $n \geq 2$. Muchas de nuestras aplicaciones se referirán al caso $n = 3$.

DEFINICIÓN. *Un conjunto M de puntos de V_n es un plano si existen un punto P y dos vectores linealmente independientes A y B tales que*

$$M = \{P + sA + tB \mid s, t \text{ real}\}.$$

Designaremos el conjunto más brevemente escribiendo $M = \{P + sA + tB\}$. Cada punto de M decimos que está *en* el plano. En particular, tomando $s = t = 0$,

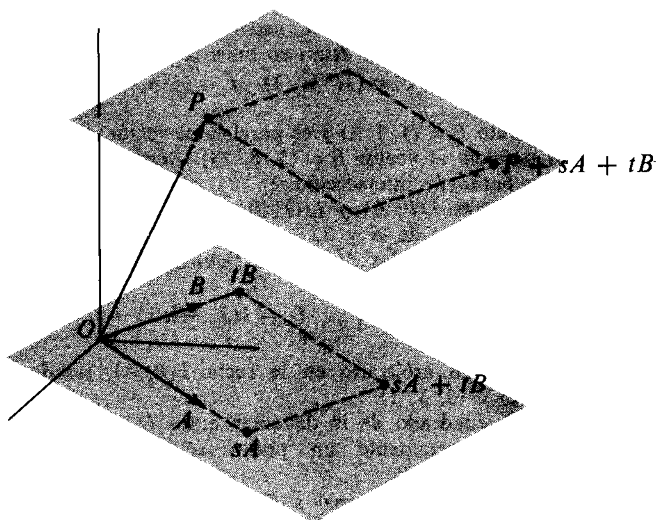


FIGURA 13.3 *Plano que pasa por P generado por A y B, y su relación geométrica con el plano que pasa por O y está generado por A y B.*

vemos que P está en el plano. El conjunto $\{P + sA + tB\}$ también se llama plano que pasa por P generado por A y B. Cuando P es el origen, el plano es simplemente la envolvente lineal de A y B. La figura 13.3 muestra un plano de V_3 que pasa por el origen y generado por A y B, y un plano que pasa por un punto P no nulo y generado por el mismo par de vectores.

Ahora deduciremos algunas propiedades de los planos análogas a las de las rectas dadas en los teoremas del 13.1 al 13.4. La primera nos muestra que los vectores A y B de la definición del plano $\{P + sA + tB\}$ puede reemplazarse por cualquier otro par que tenga la misma envolvente lineal.

TEOREMA 13.7. *Dos planos $M = \{P + sA + tB\}$ y $M' = \{P + sC + tD\}$ que pasan por el mismo punto P son iguales si y sólo si la envolvente lineal de A y B coincide con la de C y D.*

Demostración. Si la envolvente lineal de A y B es igual a la de C y D, es evidente que $M = M'$. Recíprocamente, supongamos que $M = M'$. El plano M contiene a $P + A$ y a $P + B$. Puesto que esos puntos están ambos también en M', cada uno de los A y B debe estar en la envolvente lineal de C y D. Análogamente, C y D están ambos en la envolvente lineal de A y B. Por consiguiente la envolvente lineal de A y B es igual a la de C y D.

El teorema siguiente muestra que el punto P que aparece en la definición del plano $\{P+sA+tB\}$ puede sustituirse por cualquier otro punto Q del mismo plano.

TEOREMA 13.8. *Dos planos* $M = \{P+sA + tB\}$ *y* $M' = \{Q + sA + tB\}$ *generados por los mismo vectores A y B coinciden si y sólo si Q está en M.*

Demostración. Si $M = M'$, entonces Q está ciertamente en M. Para demostrar el recíproco, supongamos que Q está en M, sea $Q = P + aA + bB$. Tomemos cualquier punto X de M. Entonces $X = P + sA + tB$ para unos ciertos escalares s y t. Pero $P=Q-aA-bB$, de modo que $X=Q+(s-a)A+(t-b)B$. Por consiguiente X está en M', con lo que $M \subseteq M'$. Del mismo modo, encontramos que $M' \subseteq M$, así que los dos planos son iguales.

El postulado de las paralelas de Euclides (teorema 13.3) tiene una forma análoga para los planos. Antes de establecer este teorema necesitamos definir el paralelismo de dos planos. La definición está sugerida por la representación geométrica de la figura 13.3.

DEFINICIÓN. *Dos planos* $M = \{P + sA + tB\}$ *y* $M' = \{Q + sC + tD\}$ *son paralelos si la envolvente lineal de A y B es igual a la de C y D. Decimos también que un vector X es paralelo al plano M si X pertenece a la envolvente lineal de A y B.*

TEOREMA 13.9. *Dados un plano M y un punto Q no perteneciente a M, existe un plano y sólo uno M' que contiene Q y es paralelo a M.*

Demostración. Sea $M = \{P + sA + tB\}$ y consideremos el plano $M' = \{Q + sA + tB\}$. Este plano contiene Q y es generado por los mismos vectores A y B que engendran M. Por consiguiente M' es paralelo a M. Si M'' es otro plano que pasa por Q paralelo a M, entonces

$$M'' = \{Q + sC + tD\}$$

en donde la envolvente lineal de C y D es igual a la de A y B. Según el teorema 13.7, debe ser $M'' = M'$. Por lo tanto M' es el único plano por Q paralelo a M.

El teorema 13.4 nos dice que dos puntos distintos determinan una recta. El teorema que sigue demuestra que tres puntos distintos determinan un plano, con tal que los tres puntos no estén alineados.

TEOREMA 13.10. *Si P, Q y R son tres puntos no situados en la misma recta, existe un plano M y sólo uno que contiene esos tres puntos. Tal plano está dado por el conjunto*

$$M = \{P + s(Q - P) + t(R - P)\}. \tag{13.4}$$

Demostración. Supongamos primero que uno de los tres puntos, por ejemplo P, sea el origen. Entonces Q y R no están en una misma recta que pase por el origen de modo que son linealmente independientes. Por consiguiente, engendran un plano que pasa por el origen, sea éste

$$M' = \{sQ + tR\}.$$

Este plano contiene los tres puntos O, Q y R.

Demostremos ahora que M' es el único plano que contiene esos tres puntos. Cualquier otro plano que pase por el origen tiene la forma

$$M'' = \{sA + tB\},$$

siendo A y B linealmente independientes. Si M'' contiene Q y R, tenemos

$$Q = aA + bB, \qquad R = cA + dB, \tag{13.5}$$

para ciertos escalares a, b, c, d. Luego, toda combinación lineal de Q y R es también una combinación lineal de A y B, así que $M' \subseteq M''$.

Para demostrar que $M'' \subseteq M'$, basta demostrar que A y B son cada uno de ellos una combinación lineal de Q y R. Multiplicando la primera ecuación (13.5) por d y la segunda por b y restando, eliminamos B y se obtiene

$$(ad - bc)A = dQ - bR.$$

La diferencia $ad - bc$ no puede ser cero, de otro modo Q y R serían dependientes. Por lo tanto podemos dividir por $ad - bc$ y expresar A como combinación lineal de Q y R. Análogamente, podemos expresar B como combinación lineal de Q y R, con lo que $M'' \subseteq M'$. Esto demuestra el teorema cuando uno de los tres puntos P, Q, R es el origen.

Para demostrar el teorema en el caso general, sea M el conjunto (13.4), $C = Q - P$ y $D = R - P$. Demostramos primero que C y D son linealmente independientes. Si no, tendríamos $D = tC$ para algún escalar t, dándonos $R - P = t(Q - P)$, o $R = P + t(Q - P)$, en contradicción con el hecho de que P, Q, R no están en la misma recta. Por consiguiente el conjunto M es un plano que pasa por P y está generado por el par de vectores linealmente independientes C y D. Este plano contiene los tres puntos P, Q y R (tomamos $s = 1$, $t = 0$ para obtener Q, y $s = 0$, $t = 1$ para obtener R). Ahora tenemos que demostrar que éste es el único plano que contiene P, Q y R

Sea M' cualquier plano que contenga P, Q y R. Ya que M' es un plano que contiene P, tenemos

$$M' = \{P + sA + tB\}$$

para un cierto par de vectores linealmente independientes A y B. Sea $M'_0 = \{sA + tB\}$ el plano que pasa por el origen generado por el mismo par A y B. Evidentemente M' contiene un vector X si y sólo si M'_0 contiene $X - P$. Puesto que M' contiene Q y R, el plano M'_0 contiene $C = Q - P$ y $D = R - P$. Pero acabamos de demostrar que existe un plano y sólo uno que contiene O, C y D puesto que C y D son linealmente independientes. Por consiguiente $M'_0 = \{sC + tD\}$, de modo que $M' = \{P + sC + tD\} = M$. Esto completa la demostración.

En el teorema 13.5 se demostró que dos vectores de V_n son linealmente dependientes si y sólo si están en una misma recta que pasa por el origen. El teorema que sigue es el correspondiente al caso de tres vectores.

TEOREMA 13.11. *Tres vectores A, B, C de V_n son linealmente dependientes si y sólo si están en un mismo plano que pasa por el origen.*

Demostración. Supongamos que A, B, C son dependientes. Podemos entonces expresar uno de los vectores como combinación lineal de los otros dos, sea $C = sA + tB$. Si A y B son independientes, engendran un plano que pasa por el origen y C está en este plano. Si A y B son dependientes, entonces A, B y C están situados en una misma recta que pasa por el origen, y por tanto están en cualquier plano que pase por el origen que contiene los tres puntos A, B y C.

Para demostrar el recíproco, supongamos que A, B, C están en un mismo plano que pasa por el origen, sea éste el plano M. Si A y B son dependientes, entonces A, B y C son dependientes, y no hay nada más que demostrar. Si A y B son independientes, generan un plano M' que pasa por el origen. Según el teorema 13.10, existe un plano y sólo uno que pasa por O y contiene A y B. Por consiguiente $M' = M$. Puesto que C está en ese plano, debe ser $C = sA + tB$, con lo que A, B y C son dependientes.

13.7 Planos y funciones vectoriales

La correspondencia que asocia a cada par de números reales s y t el vector $P + sA + tB$ en el plano $M = \{P+sA+tB\}$ es otro ejemplo de función vectorial. En este caso, el dominio de la función es el conjunto de todos los pares de números reales (s, t) y su recorrido es el plano M. Si designamos la función por X y sus valores por $X(s, t)$, entonces para cada par (s, t) tenemos

$$X(s, t) = P + sA + tB. \tag{13.6}$$

Esta función X es una función vectorial de dos variables reales. Los escalares s y t se llaman parámetros, y la ecuación (13.6) es la ecuación paramétrica o vectorial

del plano. Esto es lo mismo que la representación de una recta mediante una función vectorial de una variable real. La presencia de dos parámetros en la ecuación (13.6) da al plano una cualidad bidimensional. Cuando cada vector está en V_3 y se expresa en función de sus componentes, por ejemplo

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad \text{y} \quad X(s, t) = (x, y, z),$$

la ecuación vectorial (13.6) puede reemplazarse por tres ecuaciones escalares,

$$x = p_1 + sa_1 + tb_1, \qquad y = p_2 + sa_2 + tb_2, \qquad z = p_3 + sa_3 + tb_3.$$

Los parámetros s y t siempre pueden eliminarse entre esas tres ecuaciones obteniendo una ecuación lineal de la forma $ax + by + cz = d$, llamada ecuación cartesiana del plano. Ponemos seguidamente un ejemplo.

EJEMPLO. Sea $M = \{P + sA + tB\}$, donde $P = (1, 2, 3)$, $A = (1, 2, 1)$, y $B = (1, -4, -1)$. La ecuación vectorial correspondiente es

$$X(s, t) = (1, 2, 3) + s(1, 2, 1) + t(1, -4, -1).$$

De esta obtenemos las tres ecuaciones paramétricas

$$x = 1 + s + t, \qquad y = 2 + 2s - 4t, \qquad z = 3 + s - t.$$

Para obtener una ecuación cartesiana, ponemos la primera y la tercera ecuaciones en la forma $x - 1 = s + t$, $z - 3 = s - t$. Sumando y luego restando esas ecuaciones, encontramos que $2s = x + z - 4$, $2t = x - z + 2$. Sustituyendo en la segunda ecuación de la y, obtenemos la ecuación cartesiana $x + y - 3z = -6$. Volveremos a estudiar las ecuaciones cartesianas en la sección 13.16.

13.8 Ejercicios

1. Sea $M = \{P + sA + tB\}$, donde $P = (1, 2, -3)$, $A = (3, 2, 1)$ y $B = (1, 0, 4)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en M.
   (a) $(1, 2, 0)$; (b) $(1, 2, 1)$; (c) $(6, 4, 6)$; (d) $(6, 6, 6)$; (e) $(6, 6, -5)$.
2. Los tres puntos $P = (1, 1, -1)$, $Q = (3, 3, 2)$ y $R = (3, -1, -2)$ determinar un plano M. Decir cuáles de los puntos siguientes están en M.
   (a) $(2, 2, \frac{1}{2})$; (b) $(4, 0, -\frac{1}{2})$; (c) $(-3, 1, -3)$; (d) $(3, 1, 3)$; (e) $(0, 0, 0)$.
3. Determinar las ecuaciones escalares paramétricas para cada uno de los planos siguientes.
   a) El plano que pasa por $(1, 2, 1)$ y está generado por los vectores $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 4)$.
   b) El plano que pasa por $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 4)$.
4. Un plano M tiene las ecuaciones escalares paramétricas.

$$x = 1 + s - 2t, \qquad y = 2 + s + 4t, \qquad z = 2s + t.$$

a) Determinar cuáles de los siguientes puntos están en M: (0, 0, 0), (1, 2, 0), (2, −3, −3).
b) Hallar los vectores P, A y B tales que $M = \{P + sA + tB\}$.

5. Sea M el plano determinado por tres puntos P, Q, R no alineados.
a) Si p, q, r son tres escalares tales que $p + q + r = 1$, demostrar que $pP + qQ + rR$ está en M.
b) Demostrar que todo punto de M es de la forma $pP+qQ+rR$, donde $p+q+r=1$.
6. Determinar la ecuación lineal cartesiana de la forma $ax + by + cz = d$ para cada uno de los planos siguientes.
a) Plano que pasa por (2, 3, 1) y está generado por (3, 2, 1) y (−1, −2, −3).
b) Plano que pasa por (2, 3, 1), (−2, −1, −3) y (4, 3, −1).
c) Plano que pasa por (2, 3, 1) y es paralelo al plano que pasa por el origen y está generado por (2, 0, −2) y (1, 1, 1).
7. La ecuación cartesiana de un plano M es $3x - 5y + z = 9$.
a) Determinar cuáles de los siguientes puntos están en M: (0, −2, −1), (−1, −2, 2), (3, 1, −5).
b) Hallar los vectores P, A y B tales que $M = \{P + sA + tB\}$.
8. Consideremos los dos planos $M = \{P + sA + tB\}$ y $M' = \{Q + sC + tD\}$, donde $P = (1, 1, 1)$, $A = (2, -1, 3)$, $B = (-1, 0, 2)$, $Q = (2, 3, 1)$, $C = (1, 2, 3)$ y $D = (3, 2, 1)$. Hallar dos puntos distintos situados en la intersección $M \cap M'$.
9. Dados un plano $M = \{P + sA + tB\}$, donde $P = (2, 3, 1)$, $A = (1, 2, 3)$ y $B = (3, 2, 1)$, y otro plano M' cuya ecuación cartesiana es $x - 2y + z = 0$.
a) Determinar si M y M' son paralelos.
b) Hallar dos puntos en la intersección $M' \cap M''$ si M'' tiene la ecuación cartesiana
$$x + 2y + z = 0\,.$$
10. Sean L la recta que pasa por (1, 1, 1) paralela al vector (2, −1, 3) y M el plano que pasa por (1, 1, −2) y generado por los vectores (2, 1, 3) y (0, 1, 1). Probar que existe un punto y sólo uno en la intersección $L \cap M$ y determinarlo.
11. Una recta con vector de dirección X es paralela a un plano M si X es paralelo a M. Sea L la recta que pasa por (1, 1, 1) y es paralela al vector (2, −1, 3). Determinar si L es paralela a cada uno de los planos siguientes.
a) Plano que pasa por (1, 1, −2) y generado por (2, 1, 3) y ($\frac{3}{4}$, 1, 1).
b) Plano que pasa por (1, 1, −2), (3, 5, 2) y (2, 4, −1).
c) Plano de ecuación cartesiana $x + 2y + 3z = -3$.
12. Dos puntos P y Q están en un plano M. Demostrar que todo punto de la recta que pasa por P y Q pertenece también a M.
13. Dada la recta L que pasa por (1, 2, 3) y es paralela al vector (1, 1, 1), y dado un punto (2, 3, 5) que no está en L. Hallar la ecuación cartesiana del plano M que pasa por (2, 3, 5) y que contiene todos los puntos de L.
14. Dados una recta L y un punto P no situado en L. Demostrar que existe un plano y sólo uno que pasa por P y contiene todos los puntos de L.

13.9 Producto vectorial

En muchas aplicaciones del Álgebra vectorial a problemas de Geometría y de Mecánica resulta útil disponer de un método fácil de obtener un vector perpendicular a cada uno de dos vectores dados A y B. Esto se consigue con el producto vectorial $A \times B$ que se define así:

DEFINICIÓN. *Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores de V_3. Su producto vectorial $A \times B$ (en este orden) se define como el vector*

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

A partir de esta definición se deducen con facilidad las propiedades siguientes.

TEOREMA 13.12. *Para todos los vectores A, B, C de V_3 y para todo número real c tenemos:*

a) $A \times B = -(B \times A)$ (*simetría alternada*),
b) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ (*ley distributiva*),
c) $c(A \times B) = (cA) \times B$,
d) $A \cdot (A \times B) = 0$ (*ortogonalidad respecto a A*),
e) $B \cdot (A \times B) = 0$ (*ortogonalidad respecto a B*),
f) $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2$ (*identidad de Lagrange*),
g) $A \times B = O$ *si y sólo si A y B son linealmente dependientes.*

Demostración. Las partes a), b) y c) resultan inmediatamente de la definición y se dejan como ejercicios para el lector. Para demostrar d), observemos que

$$A \cdot (A \times B) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

La parte e) se deduce del mismo modo, o puede deducirse de a) y d). Para demostrar f), escribimos

$$\|A \times B\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

y

$$\|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

y comprobamos luego que los dos segundos miembros coinciden.

La propiedad f) muestra que $A \times B = O$ si y sólo si $(A \cdot B)^2 = \|A\|^2\|B\|^2$. Según la desigualdad de Cauchy-Schwarz (teorema 12.3), eso ocurre si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar. Dicho de otro modo, $A \times B = O$ si y sólo si A y B son linealmente dependientes, lo que demuestra g).

EJEMPLOS. Las partes a) y g) demuestran que $A \times A = O$. De la definición de producto vectorial encontramos que

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

El producto vectorial no es asociativo. Por ejemplo, tenemos

$$\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \text{ sin embargo } (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{j} = O \times \boldsymbol{j} = O .$$

El teorema que sigue muestra dos propiedades fundamentales del producto vectorial.

TEOREMA 13.13. *Sean A y B dos vectores linealmente independientes en V_3. Se tiene:*

a) *Los vectores A, B, $A \times B$ son linealmente independientes.*

b) *Todo vector N de V_3 ortogonal a A y B simultáneamente es el producto de un escalar por $A \times B$.*

Demostración. Sea $C = A \times B$. Entonces $C \neq O$ pues A y B son linealmente independientes. Dados los escalares a, b, c tales que $aA + bB + cC = O$, formemos el producto escalar de cada miembro por C y teniendo en cuenta que $A \cdot C = B \cdot C = 0$ encontramos $c = 0$. Esto da $aA + bB = O$, con lo que $a = b = 0$ ya que A y B son independientes. Esto demuestra a).

Sea N un vector cualquiera ortogonal a la vez a A y a B, y sea $C = A \times B$. Demostraremos que

$$(N \cdot C)^2 = (N \cdot N)(C \cdot C) .$$

Entonces de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (teorema 12.3) resulta que N es el producto de C por un escalar.

Puesto que A, B y C son linealmente independientes, sabemos, en virtud del teorema 12. 10 c), que generan V_3. En particular, generan N, de modo que podemos escribir

$$N = aA + bB + cC$$

para ciertos escalares a, b, c. Esto nos da

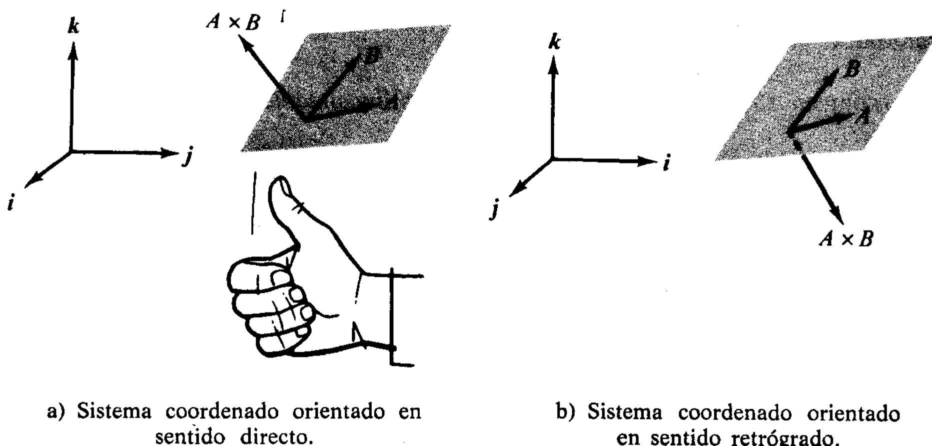
$$N \cdot N = N \cdot (aA + bB + cC) = c\, N \cdot C$$

puesto que $N \cdot A = N \cdot B = 0$. También, ya que $C \cdot A = C \cdot B = 0$, tenemos

$$C \cdot N = C \cdot (aA + bB + cC) = cC \cdot C .$$

Por consiguiente, $(N \cdot N)(C \cdot C) = (cN \cdot C)(C \cdot C) = (N \cdot C)(cC \cdot C) = (N \cdot C)^2$, lo que completa la demostración.

El teorema 13.12 nos facilita la interpretación geométrica del producto vectorial. Por las propiedades d) y e), sabemos que $A \times B$ es perpendicular simultáneamente a A y a B. Cuando el vector $A \times B$ se representa geométricamente mediante una flecha, la dirección de la flecha depende de las posiciones relativas



a) Sistema coordenado orientado en sentido directo.

b) Sistema coordenado orientado en sentido retrógrado.

FIGURA 13.4 *Posiciones relativas de A, B y $A \times B$.*

de los tres vectores unitarios coordenados. Si $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ se colocan como se ve en la figura 13.4 a), se dice que forman un *sistema coordenado orientado en sentido directo*. En este caso, la dirección de $A \times B$ está determinada por la «regla de la mano derecha». Esto es, cuando A gira hacia B de modo que los dedos de la mano derecha señalen el sentido de la rotación, entonces el pulgar indica la dirección de $A \times B$ (suponiendo, de acuerdo con lo que se discute, que el pulgar está perpendicular a los otros dedos). En un sistema coordenado orientado en sentido retrógrado, como en la figura 13.4 b), la dirección de $A \times B$ se invierte y puede determinarse con una correspondiente regla de la mano izquierda.

La longitud de $A \times B$ tiene una interpretación geométrica interesante. Si A y B son vectores no nulos que forman una ángulo θ, siendo $0 \leq \theta \leq \pi$, podemos escribir $A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \cos \theta$ en la propiedad f) del teorema 13.12 obteniendo

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2(1 - \cos^2 \theta) = \|A\|^2\|B\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta ,$$

de la que resulta

$$\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\| \operatorname{sen} \theta .$$

Puesto que $\|B\| \operatorname{sen} \theta$ es la altura del paralelogramo determinado por A y B (ver figura 13.5), vemos que *la longitud de $A \times B$ es igual al área de ese paralelogramo.*

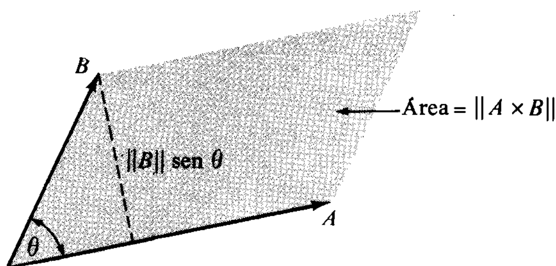


FIGURA 13.5 *La longitud de $A \times B$ es igual al área del paralelogramo determinado por A y B.*

13.10 El producto vectorial expresado en forma de determinante

La fórmula que define el producto vectorial puede ponerse en forma más compacta con la ayuda de los determinantes. Si a, b, c, d son cuatro números, la diferencia $ad - bc$ se designa a menudo con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

y que se llama *determinante* (de segundo orden). Los números a, b, c, d son sus *elementos,* y decimos que están colocados en dos *filas* a, b y c, d y en dos *columnas* a, c y b, d. Obsérvese que un intercambio de las dos filas o de las dos columnas sólo cambia el signo del determinante. Por ejemplo, puesto que $ad - bc = -(bc - ad)$, tenemos

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

Si expresamos cada uno de los componentes del producto vectorial como un determinante de orden dos, la fórmula que define $A \times B$ toma la forma

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Esto puede también expresarse en función de los vectores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ como sigue:

$$(13.7) \qquad A \times B = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

Los determinantes de tercer orden se escriben con tres filas y tres columnas y pueden definirse en función de los determinantes de orden dos por la fórmula

$$(13.8)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Esto es lo que se llama el «desarrollo» de un determinante por los elementos de la primera fila. Observemos que el determinante del segundo miembro que multiplica a_1 puede obtenerse del determinante del primer miembro suprimiendo la fila y la columna en las que aparece a_1. Los otros dos determinantes del segundo miembro se obtienen del mismo modo.

En el Volumen II se estudian los determinantes de orden mayor que tres. Nos proponíamos únicamente introducir los determinantes de órdenes segundo y tercero para disponer de un instrumento para escribir ciertas fórmulas en forma compacta que permita recordarlas con mayor facilidad.

Los determinantes tienen pleno significado si los elementos de la primera fila son vectores. Por ejemplo, si escribimos el determinante

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

y «desarrollamos» según la regla establecida en (13.8), encontramos que el resultado coincide con el segundo miembro de (13.7). De otro modo, podemos escribir la definición del producto vectorial $A \times B$ en la forma compacta siguiente:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, para calcular el producto vectorial de $A = 2\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ y $B = 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, escribimos

$$A \times B = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = -36\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

13.11 Ejercicios

1. Sean $A = -i + 2k$, $B = 2i + j - k$, $C = i + 2j + 2k$. Calcular cada uno de los siguientes vectores en función de i, j, k:

(a) $A \times B$; (d) $A \times (C \times A)$; (g) $(A \times C) \times B$;
(b) $B \times C$; (e) $(A \times B) \times C$; (h) $(A + B) \times (A - C)$;
(c) $C \times A$; (f) $A \times (B \times C)$; (i) $(A \times B) \times (A \times C)$.

2. En cada caso hallar un vector de longitud 1 en V_3 ortogonal a la vez a A y a B:

(a) $A = i + j + k$, $B = 2i + 3j - k$;
(b) $A = 2i - 3j + 4k$, $B = -i + 5j + 7k$;
(c) $A = i - 2j + 3k$, $B = -3i + 2j - k$.

3. En cada caso utilizar el producto vectorial para calcular el área del triángulo de vértices A, B, C:

(a) $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, -1)$, $C = (3, 4, 0)$;
(b) $A = (-2, 3, 1)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (1, 2, 1)$;
(c) $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 0, 1)$.

4. Si $A = 2i + 5j + 3k$, $B = 2i + 7j + 4k$, y $C = 3i + 3j + 6k$, expresar el producto vectorial $(A - C) \times (B - A)$ en función de i, j, k.
5. Demostrar que $\|A \times B\| = \|A\|\,\|B\|$ si y sólo si A y B son ortogonales,
6. Dados dos vectores linealmente independientes A y B de V_3. Sea $C = (B \times A) - B$.
a) Demostrar que A es ortogonal a $B + C$.
b) Demostrar que el ángulo θ que forman B y C satisface $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$.
c) Si $\|B\| = 1$ y $\|B \times A\| = 2$, calcular la longitud de C.
7. Sean A y B dos vectores ortogonales en V_3, teniendo cada uno longitud 1.
a) Demostrar que A, B, $A \times B$ es una base ortonormal para V_3.
b) Sea $C = (A \times B) \times A$. Demostrar que $\|C\| = 1$.
c) Trazar una figura que muestra la relación geométrica entre A, B, y $A \times B$ y utilizar esa figura para obtener las relaciones

$$(A \times B) \times A = B, \qquad (A \times B) \times B = -A.$$

d) Demostrar las relaciones de la parte *c*) algebraicamente.
8. a) Si $A \times B = O$ y $A \cdot B \times 0$, uno por lo menos de los vectores A o B es nulo. Demostrar esta proposición y dar su interpretación geométrica.
b) Dado $A \neq O$. Si $A \times B = A \times C$ y $A \cdot B = A \cdot C$, demostrar que $B = C$.
9. Sean $A = 2i - j + 2k$ y $C = 3i + 4j - k$.
a) Hallar un vector B tal que $A \times B = C$. ¿Hay más de una solución?
b) Hallar un vector B tal que $A \times B = C$ y $A \cdot B = 1$. ¿Hay más de una solución?
10. Dados un vector no nulo A y un vector C ortogonal a A, ambos en V_3. Demostrar que existe un solo vector B tal que $A \times B = C$ y $A \cdot B = 1$.
11. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 1)$, $C = (2, -1, 2)$.
a) Hallar todos los puntos D que pueden ser el cuarto vértice del paralelogramo.
b) Calcular el área del triángulo ABC.

12. Dados dos vectores no paralelos A y B de V_3 siendo $A \cdot B = 2$, $\|A\| = 1$, $\|B\| = 4$. Sea $C = 2(A \times B) - 3B$. Calcular $A \cdot (B + C)$, $\|C\|$, y el coseno del ángulo θ que forman B y C.
13. Dados dos vectores linealmente independientes A y B de V_3. Determinar si cada una de las siguientes proposiciones es cierta o falsa.
    a) $A + B$, $A - B$, $A \times B$ son linealmente independientes.
    b) $A + B$, $A + (A \times B)$, $B + (A \times B)$ son linealmente independientes.
    c) A, B, $(A + B) \times (A - B)$ son linealmente independientes.
14. a) Demostrar que tres vectores A, B, C, de V_3 están en una misma recta si y sólo si $(B - A) \times (C - A) = O$.
    b) Si $A \neq B$, demostrar que la recta que pasa por A y B consiste en el conjunto de todos los vectores P tales que $(P - A) \times (P - B) = O$.
15. Dados dos vectores ortogonales A, B de V_3, ambos de longitud 1. Sea P un vector que satisface la ecuación $P \times B = A - P$. Demostrar cada una de las proposiciones.
    a) P es ortogonal a B y tiene longitud $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
    b) P, B, $P \times B$ forman una base para V_3.
    c) $(P \times B) \times B = -P$.
    d) $P = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(A \times B)$.

13.12 Producto mixto

Los productos escalar y vectorial pueden combinarse para formar el *producto mixto* $A \cdot B \times C$, cuyo significado es $A \cdot (B \times C)$ exclusivamente. Puesto que este es un producto escalar de dos vectores, su valor es un escalar. Podemos calcular este escalar por medio de determinantes. Escribamos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ y expresemos $B \times C$ en la forma (13.7). Formando el producto escalar con A, obtenemos

$$4 \cdot B \times C = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Así pues, $A \cdot B \times C$ es igual al determinante cuyas filas son los componentes de los factores A, B y C.

En el teorema 13.12 se encontró que dos vectores A y B son linealmente dependientes si y sólo si su producto vectorial $A \times B$ es el vector nulo. El teorema siguiente da un criterio análogo correspondiente para la dependencia lineal de tres vectores.

TEOREMA 13.14. *Tres vectores A, B, C de V_3 son linealmente dependientes si y sólo si*

$$A \cdot B \times C = 0.$$

Demostración. Supongamos primero que A, B, y C son dependientes. Si B y C son dependientes, entonces $B \times C = O$, y por tanto $A \cdot B \times C = 0$. Supongamos, seguidamente, que B y C son independientes. Puesto que los tres son dependientes, existen unos escalares a, b, c, no todos nulos, tales que $aA + bB + cC = O$. En esta relación debe ser $a \neq 0$, de otro modo B y C serían dependientes. Por consiguiente, podemos dividir por a y expresar A como una combinación lineal de B y C, por ejemplo $A = tB + sC$. Formando el producto escalar de cada miembro por $B \times C$, encontramos

$$A \cdot (B \times C) = tB \cdot B \times C + sC \cdot B \times C = 0,$$

puesto que B y C son ambos ortogonales a $B \times C$. Por tanto la dependencia de A, B y C implica que $A \cdot B \times C = 0$.

Para demostrar el recíproco, supongamos que $A \cdot B \times C = 0$. Si B y C son dependientes, también lo son A, B y C, y el teorema está demostrado. Supongamos, pues, que B y C son linealmente independientes. Entonces, según el teorema 13.13, los tres vectores B, C, y $B \times C$ son linealmente independientes. Luego, engendran A con lo que podemos escribir

$$A = aB + bC + c(B \times C)$$

para ciertos escalares a, b, c. Formando el producto escalar de cada miembro por $B \times C$ y teniendo en cuenta que $A \cdot (B \times C) = 0$, encontramos $c = 0$, así que $A = aB + bC$. Esto demuestra que A, B y C son linealmente dependientes.

EJEMPLO. Para determinar si los tres vectores $(2, 3, -1)$, $(3, -7, 5)$, y $(1, -5, 2)$ son dependientes, formamos su producto mixto, expresado en forma de determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(-14 + 25) - 3(6 - 5) - 1(-15 + 7) = 27.$$

Puesto que el producto mixto no es nulo, los tres vectores son linealmente independientes

El producto mixto tiene una interesante interpretación geométrica. La figura 13.6 muestra un paralelepípedo determinado por tres vectores geométricos A, B, C no situados en el mismo plano. Su altura es $\|C\| \cos \phi$, siendo ϕ el ángulo que forman $A \times B$ y C. En esta figura, $\cos \phi$ es positivo porque $0 \leq \phi < \frac{1}{2}\pi$. El área del paralelogramo que forma la base es $\|A \times B\|$, y ésta es también el

área de cada sección paralela a la base. Integrando el área sección entre 0 y $\|C\| \cos \phi$, encontramos que el volumen del paralelepípedo es $\|A \times B\| \, (\|C\| \cos \phi)$, el área de la base multiplicada por la altura. Pero tenemos

$$\|A \times B\| \, (\|C\| \cos \phi) = (A \times B) \cdot C .$$

Dicho de otro modo, el producto mixto $A \times B \cdot C$ es igual al volumen del paralelepípedo determinado por A, B, C. Cuando $\frac{1}{2}\pi < \phi \leq \pi$, $\cos \phi$ es negativo y el producto $A \times B \cdot C$ es el valor opuesto al del volumen. Si A, B, C están en un plano que pasa por el origen, son linealmente dependientes y su producto mixto es nulo. En este caso, el paralelepípedo degenera y tiene volumen cero.

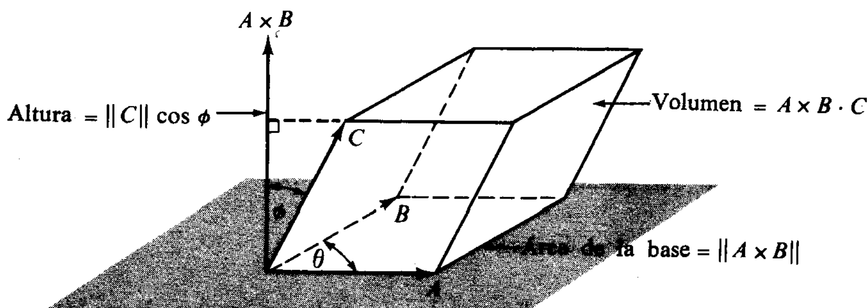


FIGURA 13.6 *Interpretación geométrica del producto mixto como volumen de un paralelepípedo.*

Esta interpretación geométrica del producto mixto sugiere ciertas propiedades algebraicas del mismo. Por ejemplo, una permutación cíclica de los tres vectores A, B, C deja el producto mixto invariable. Con esto queremos indicar que

(13.9) $$A \times B \cdot C = B \times C \cdot A = C \times A \cdot B$$

Una demostración algebraica de esa propiedad se puede ver en el ejercicio 7 de la sección 13.14. Esta propiedad implica que el punto y el aspa son intercambiables en un producto triple. En efecto, la conmutatividad del producto escalar implica $(B \times C) \cdot A = A \cdot (B \times C)$ y cuando esto se combina con la primera igualdad de (13.9), encontramos que

(13.10) $$A \times B \cdot C = A \cdot B \times C .$$

El producto triple $A \cdot B \times C$ a menudo se indica con el símbolo $[ABC]$ sin indicar el punto ni el aspa. Debido a la igualdad (13.10), no hay ambigüedad con

esta notación, el producto depende tan sólo del orden de los factores A, B, C y no de las posiciones del punto y del aspa.

13.13 Regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales

El producto mixto puede utilizarse para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z. Supongamos que el sistema está escrito en la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1\,, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2\,, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\,. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Sea A el vector de componentes a_1, a_2, a_3 y definamos del mismo modo B, C, y D. Entonces las tres ecuaciones (13.11) son equivalentes a la única ecuación vectorial

$$xA + yB + zC = D\,. \tag{13.12}$$

Si multiplicamos escalarmente los dos miembros de esta ecuación por $B \times C$, poniendo $[ABC]$ en lugar de $A \cdot B \times C$, encontramos que

$$x[ABC] + y[BBC] + z[CBC] = [DBC]\,.$$

Puesto que $[BBC] = [CBC] = 0$, los coeficientes de y y de z desaparecen y obtenemos

$$x = \frac{[DBC]}{[ABC]} \quad \text{si} \quad [ABC] \neq 0\,. \tag{13.13}$$

Del mismo modo llegamos a fórmulas análogas para y y z. Así pues tenemos

$$y = \frac{[ADC]}{[ABC]} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{[ABD]}{[ABC]} \quad \text{si} \quad [ABC] \neq 0\,. \tag{13.14}$$

La condición $[ABC] \neq 0$ significa que los tres vectores A, B, C son linealmente independientes. En este caso, (13.12) muestra que todo vector D en el espacio tridimensional está generado por A, B, C y los multiplicadores x, y, z están determinados con unicidad por las fórmulas (13.13) y (13.14). Cuando los productos

mixtos que aparecen en esas fórmulas se ponen como determinantes, el resultado se conoce con el nombre de *regla de Cramer* para la resolución del sistema (13.11):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

Si $[ABC] = 0$, entonces A, B, C están en un plano que pasa por el origen y el sistema no tiene solución a menos que D esté en dicho plano. En efecto, los vectores A, B, C son linealmente dependientes, de suerte que existen escalares u, v, w no todos nulos tales que $uA + vB + wC = O$. Si la terna (x, y, z) satisface (13.12), lo mismo ocurre con la terna $(x + tu, y + tv, z + tw)$ para todo t, ya que tenemos

$$(x + tu)A + (y + tv)B + (z + tw)C =$$
$$= xA + yB + zC + t(uA + vB + wC) = xA + yB + zC .$$

13.14 Ejercicios

1. Calcular el producto mixto $A \cdot B \times C$ en cada caso.
   (a) $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$, $C = (0, 0, 8)$.
   (b) $A = (2, 3, -1)$, $B = (3, -7, 5)$, $C = (1, -5, 2)$.
   (c) $A = (2, 1, 3)$, $B = (-3, 0, 6)$, $C = (4, 5, -1)$.
2. Hallar todos los números reales t para los que los tres vectores $(1, t, 1)$, $(t, 1, 0)$, $(0, 1, t)$ son linealmente dependientes.
3. Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}$.
4. Demostrar que $A \times B = A \cdot (B \times \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + A \cdot (B \times \boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + A \cdot (B \times \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$.
5. Demostrar que $\boldsymbol{i} \times (A \times \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{j} \times (A \times \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{k} \times (A \times \boldsymbol{k}) = 2A$.
6. a) Hallar todos los vectores $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ que satisfagan la relación

$$(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k} \times (6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) = 3 .$$

   b) Hallar el vector $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ de menor longitud que satisfaga la relación de a).

7. Hacer uso de las propiedades algebraicas, de los productos escalar y vectorial, para demostrar las siguientes propiedades del producto mixto

a) $(A + B) \cdot (A + B) \times C = 0$.

b) $A \cdot B \times C = -B \cdot A \times C$. Esto demuestra que al invertir la posición de los dos primeros vectores cambia el signo.

[*Indicación*: Utilizar la parte a) y las leyes distributivas.]

c) $A \cdot B \times C = -A \cdot C \times B$. Esto demuestra que la permutación de los vectores segundo y tercero cambia el signo. [*Indicación*: Utilizar la simetría alternada.]

d) $A \cdot B \times C = -C \cdot B \times A$. Esto demuestra que la permutación de los vectores primero y tercero cambia el signo. [*Indicación*: Utilizar b) y c).]

Igualando los segundos miembros de b), c), y d), encontramos que

$$A \cdot B \times C = B \cdot C \times A = C \cdot A \times B,$$

lo que demuestra que una permutación cíclica de A, B, C deja invariable el producto mixto.

9. Este ejercicio esboza una demostración de la identidad vectorial

$$(13.15) \qquad A \times (B \times C) = (C \cdot A)B - (B \cdot A)C,$$

que algunas veces se llama fórmula «cab menos bac». Sean $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, demostrar que

$$\boldsymbol{i} \times (B \times C) = c_1 B - b_1 C.$$

Esto demuestra (13.15) en el caso particular $A = \boldsymbol{i}$. Demostrar las fórmulas correspondientes para $A = \boldsymbol{j}$ y $A = \boldsymbol{k}$, y combinarlas luego para obtener (13.15).

10. Utilizar la fórmula «cab menos bac» del ejercicio 9 para deducir las siguientes identidades vectoriales.

(a) $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D$.

(b) $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = O$.

(c) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ si y sólo si $B \times (C \times A) = O$.

(d) $(A \times B) \cdot (C \times D) = (B \cdot D)(A \cdot C) - (B \cdot C)(A \cdot D)$.

11. Cuatro vectores A, B, C, D de V_3 satisfacen las relaciones $A \times C \cdot B = 5$, $A \times D \cdot B = 3$, $C + D = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $C - D = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$. Calcular $(A \times B) \times (C \times D)$ en función en $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

12. Demostrar que $(A + B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = (A \cdot B \times C)^2$.

13. Demostrar si es o no cierta la fórmula $A \times [A \times (A \times B)] \cdot C = -\|A\|^2 A \cdot B \times C$.

14. a) Demostrar que el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C, D es

$$\tfrac{1}{6} |(B - A) \cdot (C - A) \times (D - A)| .$$

b) Calcular dicho volumen cuando $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (0, 3, 0)$, y $D = (4, 0, 0)$.

15. a) Si $B \neq C$, demostrar que la distancia desde A a la recta que pasa por B y C es

$$\|(A - B) \times (C - B)\| / \|B - C\| .$$

b) Calcular esa distancia cuando $A = (1, -2. -5)$, $B = (-1, 1, 1)$ y $C = (4, 5, 1)$.

16. La fórmula de Heron para calcular el área S de un triángulo cuyos lados tienen longitudes a, b, c es $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, siendo $s = (a+b+c)/2$. Este ejemplo esboza una demostración vectorial de esa fórmula.

Supongamos que el triángulo tiene los vértices en O, A y B, siendo $\|A\| = a$, $\|B\| = b$, $\|B - A\| = c$.

a) Combinar las dos identidades

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2, \qquad -2A \cdot B = \|A - B\|^2 - \|A\|^2 - \|B\|^2$$

para obtener la fórmula

$$4S^2 = a^2b^2 - \tfrac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)^2 = \tfrac{1}{4}(2ab - c^2 + a^2 + b^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2).$$

b) Poner la fórmula de la parte a) en la forma

$$S^2 = \tfrac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b),$$

y de ahí deducir la fórmula de Heron.

Resolver mediante la regla de Cramer el sistema de ecuaciones en cada uno de los ejercicios 17, 18 y 19.

17. $x + 2y + 3z = 5, \quad 2x - y + 4z = 11, \quad -y + z = 3.$
18. $x + y + 2z = 4, \quad 3x - y - z = 2, \quad 2x + 5y + 3z = 3.$
19. $x + y = 5, \quad x + z = 2, \quad y + z = 5.$
20. Si $P = (1, 1, 1)$ y $A = (2, 1, -1)$, demostrar que cada punto (x, y, z) de la recta $\{P + tA\}$ satisface el sistema de ecuaciones lineales $x - y + z = 1$, $x + y + 3z = 5$, $3x + y + 7z = 11$.

13.15 Vectores normales a planos

En la sección 13.6 se definió el plano como un conjunto de la forma $\{P + sA + tB\}$, donde A y B son vectores linealmente independientes. Ahora demostramos que los planos en V_3 pueden considerarse de modo completamente distinto, con el concepto de vector normal.

DEFINICIÓN. *Sea $M = \{P + sA + tB\}$ el plano que pasa por P y generado por A y B. Un vector N de V_3 es perpendicular a M, si es perpendicular a la vez a A y a B. Si, además, N es no nulo, entonces N se llama vector normal al plano.*

Nota: Si $N \cdot A = N \cdot B = 0$, entonces $N \cdot (sA + tB) = 0$, de modo que un vector perpendicular a la vez a A y a B es perpendicular a cualquier vector de la envolvente lineal de A y B. Asimismo, si N es normal a un plano, también lo es tN para todo valor real $t \neq 0$.

TEOREMA 13.15. *Dado un plano $M = \{P + sA + tB\}$ que pasa por P y generado por A y B. Sea $N = A \times B$. Tenemos entonces:*

a) *N es un vector normal a M.*

b) *M es el conjunto de todos los vectores X de V_3 que satisfacen la ecuación*

$$(X - P) \cdot N = 0 . \tag{13.16}$$

Demostración. Puesto que M es un plano, A y B son linealmente independientes, así que $A \times B \neq O$. Esto demuestra a) ya que $A \times B$ es ortogonal a la vez a A y a B.

Para demostrar b), sea M' el conjunto de todos los vectores X de V_3 que satisfacen la ecuación (13.16). Si $X \in M$, $X - P$ es la envolvente lineal de A y B, así que $X - P$ es ortogonal a N. Por consiguiente $X \in M'$ lo que demuestra que $M \subseteq M'$. Recíprocamente, supongamos $X \in M'$. Entonces X satisface (13.16). Puesto que A, B, N son linealmente independientes (teorema 13.13), generan cualquier vector de V_3 con lo que, en particular, tenemos

$$X - P = sA + tB + uN$$

para ciertos escalares s, t, u. Formando el producto escalar de cada miembro por N, encontramos $u = 0$, así que $X - P = sA + tB$. Esto demuestra que $X \in M$. Luego, $M' \subseteq M$, lo que completa la demostración de b).

El significado geométrico del teorema 13.15 se muestra en la figura 13.7. Los puntos P y X están en el plano y el vector normal N es ortogonal a $X - P$. Esa figura sugiere el teorema siguiente

TEOREMA 13.16. *Dados un plano M que pasa por un punto P y un vector no nulo N normal a M, sea*

$$d = \frac{|P \cdot N|}{\|N\|} . \tag{13.17}$$

Entonces todo X en M tiene longitud $\|X\| \geq d$. Además, tenemos $\|X\| = d$ si y sólo si X es la proyección de P sobre N:

$$X = tN , \quad \textit{donde} \quad t = \frac{P \cdot N}{N \cdot N} .$$

Demostración. La demostración se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz siguiendo el mismo método que en el teorema 13.6, al obtener el resultado análogo para las rectas en V_2.

Con el mismo razonamiento encontramos que si Q es un punto no situado en M, entonces entre todos los puntos X en M la menor longitud $\|X - Q\|$ tiene lugar cuando $X - Q$ es la proyección de $P - Q$ sobre N. Esta longitud mínima es $|(P - Q) \cdot N|/\|N\|$ y se llama la *distancia desde Q al plano.* El número d de (13.17) es la distancia desde el origen al plano.

13.16 Ecuaciones lineales cartesianas para planos

Los resultados de los teoremas 13.15 y 13.16 también pueden expresarse en función de los componentes. Si escribimos $N = (a, b, c)$, $P = (x_1, y_1, z_1)$, y $X = (x, y, z)$, la ecuación 13.16 toma la forma

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 . \tag{13.18}$$

Esta es la ecuación cartesiana del plano y sólo se satisface para aquellos puntos (x, y, z) que están en el plano. El conjunto de puntos que satisfacen (13.18) no se altera si multiplicamos cada coeficiente a, b, c por un escalar no nulo t. Esto equivale tan sólo a una elección distinta de vector normal en (13.16).

Transponiendo los términos que no dependen de x, y, y z se obtiene

$$ax + by + cz = d_1 , \tag{13.19}$$

siendo $d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$. Se dice que una ecuación de este tipo es *lineal* en x,y,z. Acabamos de demostrar que todo punto (x,y,z) de un plano satisface una ecuación lineal cartesiana (13.19) en la que a, b, c no son todos nulos. Recíprocamente, toda ecuación lineal con esa propiedad, representa un plano. (El lector puede comprobarlo como ejercicio.)

El número d_1 de la ecuación (13.19) origina una sencilla relación para la distancia d del plano al origen. Puesto que $d_1 = P \cdot N$, tenemos $|d_1| = |P \cdot N| = d\|N\|$. En particular $|d_1| = d$ si la normal N tiene longitud 1. El plano pasa por el origen si y sólo si $d_1 = 0$.

EJEMPLO. La ecuación cartesiana $2x + 6y + 3z = 6$ representa un plano con vector normal $N = 2i + 6j + 3k$. Escribamos la ecuación cartesiana en la forma

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$$

en la que se pone de manifiesto que el plano corta a los ejes coordenados en los puntos (3, 0, 0), (0, 1, 0), y (0, 0, 2). Los números 3, 1, 2 se llaman, respectivamente, los *segmentos interceptados* en los ejes por el plano. El conocimiento de esos segmentos permite representar el plano rápidamente. En la figura 13.8 se muestra una porción del plano. Su distancia d al origen es $d = 6/\|N\| = 6/7$.

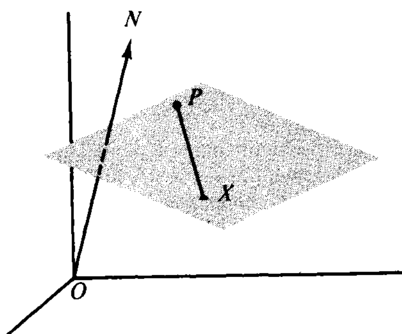


FIGURA 13.7 *Plano que pasa por P y X con vector normal N.*

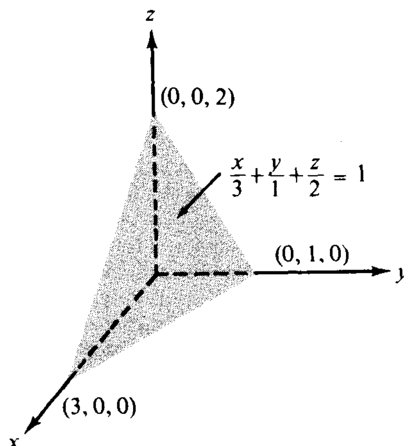


FIGURA 13.8 *Plano que intercepta segmento* 3, 1, 2.

Dos planos paralelos tienen una normal N común. Si $N = (a, b, c)$, las ecuaciones cartesianas de dos planos paralelos pueden escribirse así:

$$ax + by + cz = d_1, \qquad ax + by + cz = d_2,$$

diferenciándose tan sólo en los segundos miembros. El número $|d_1 - d_2|/\|N\|$ se llama distancia entre los dos planos, definición sugerida por el teorema 13.16.

Dos planos se llaman perpendiculares si una normal a uno es perpendicular a una normal al otro. O más general, si las normales a dos planos forman un ángulo θ, decimos que θ es el ángulo que forman los dos planos.

13.17 Ejercicios

1. Dados los vectores $A = 2i + 3j - 4k$ y $B = j + k$.
   a) Hallar un vector no nulo N perpendicular a la vez a A y a B.
   b) Dar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el origen y está generado por A y B.
   c) Dar la ecuación cartesiana del plano que pasa por (1, 2, 3) y está generada por A y B.
2. Un plano tiene como ecuación cartesiana $x + 2y - 2z + 7 = 0$. Hallar:
   a) un vector normal de longitud unidad;
   b) los segmentos interceptados por el plano en los ejes;
   c) la distancia del plano al origen;
   d) el punto Q del plano más próximo al origen.
3. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(1, 2, -3)$ y es paralelo al plano $3x - y + 2z = 4$. ¿Cuál es la distancia entre los dos planos?

4. Cuatro planos tienen ecuaciones cartesianas $x + 2y - 2z = 5$, $3x - 6y + 3z = 2$, $2x + y + 2z = -1$, y $x - 2y + z = 7$.
   a) Demostrar que dos de ellos son paralelos y los otros dos son perpendiculares.
   b) Hallar la distancia entre los dos planos paralelos.
5. Los tres puntos $(1, 1, -1)$, $(3, 3, 2)$, y $(3, -1, -2)$ determinan un plano. Hallar a) un vector normal al plano; b) una ecuación cartesiana del plano; c) la distancia del plano al origen.
6. Hallar una ecuación cartesiana del plano determinado por $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, y $(-1, 7, -2)$.
7. Determinar el ángulo formado por los planos $x + y = 1$ e $y + z = 2$.
8. Una recta paralela a un vector no nulo N se denomina perpendicular al plano M si N es normal a M. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(2, 3, -7)$, sabiendo que la recta que pasa por $(1, 2, 3)$ y $(2, 4, 12)$ es perpendicular a dicho plano.
9. Hallar la ecuación vectorial paramétrica de la recta que contiene el punto $(2, 1, -3)$ y es perpendicular al plano $4x - 3y + z = 5$.
10. Un punto se desplaza en el espacio de modo que en el instante t su posición viene dada por el vector $X(t) = (1 - t)\boldsymbol{i} + (2 - 3t)\boldsymbol{j} + (2t - 1)\boldsymbol{k}$.
    a) Demostrar que el punto se mueve a lo largo de una recta. (Llamémosla L.)
    b) Hallar un vector N paralelo a L.
    c) ¿En qué instante el punto toca el plano $2x + 3y + 2z + 1 = 0$?
    d) Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo al de la parte c) y que contenga el punto $X(3)$.
    e) Hallar la ecuación cartesiana del plano perpendicular a L que contenga el punto $X(2)$.
11. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(1, 1, 1)$ si un vector normal N forma los ángulos $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, con $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, respectivamente.
12. Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos en los que los ejes coordenados cortan el plano $x + 2y + 3z = 6$.
13. Hallar un vector A de longitud 1 perpendicular a $\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ y paralelo al plano $x - y + 5z = 1$.
14. Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo a los dos vectores $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y que corta el eje x en $(2, 0, 0)$.
15. Hallar todos los puntos situados en la intersección de los tres planos $3x + y + z = 5$, $3x + y + 5z = 7$, $x - y + 3z = 3$.
16. Demostrar que tres planos cuyas normales son linealmente independientes tienen un solo punto común.
17. Una recta con vector de dirección A es paralela a un plano M si A es paralelo a M. Una recta que contiene $(1, 2, 3)$ es paralela a cada uno de los planos $x + 2y + 3z = 4$, $2x + 3y + 4z = 5$. Hallar la ecuación vectorial paramétrica de esa recta.
18. Dada una recta L no paralela al plano M, demostrar que la intersección $L \cap M$ contiene sólo un punto.
19. a) Demostrar que la distancia desde el punto (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz + d = 0$. es

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}.$$

    b) Hallar el punto P del plano $5x - 14y + 2z + 9 = 0$ que esté más próximo al punto $Q = (-2, 15, -7)$,
20. Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo al $2x - y + 2z + 4 = 0$ si el punto $(3, 2, -1)$ equidista de ambos.

21. a) Si los puntos A, B, C determinan un plano, demostrar que la distancia desde un punto Q a dicho plano es $|(Q - A) \cdot (B - A) \times (C - A)|/\|(B - A) \times (C - A)\|$.
b) Calcular esa distancia si $Q = (1, 0, 0)$, $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$ y $C = (2, 3, 4)$.
22. Demostrar que si dos planos M y M' no son paralelos, su intersección $M \cap M'$ es una recta.
23. Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo a $\boldsymbol{j}$ y que pasa por la intersección de los planos cuyas ecuaciones son $x + 2y + 3z = 4$ y $2x + y + z = 2$.
24. Hallar la ecuación cartesiana del plano paralelo al vector $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ si contiene todos los puntos de la recta de intersección de los planos $x + y = 3$ y $2y + 3z = 4$.

13.18 Las secciones cónicas

Una recta móvil G que corta a una recta fija A en un punto P, formando con ella un ángulo constante θ, siendo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, engendra una superficie en el espacio tridimensional llamada cono circular recto. La recta G es la *generatriz* del cono, A es el *eje*, y P su *vértice*. Cada uno de los conos dibujados en la figura 13.9 tiene el eje vertical. Las porciones superior e inferior del cono que se unen en el vértice se llaman *hojas* del cono. Las curvas obtenidas cortando el cono con un plano que no pase por el vértice se llaman *secciones cónicas*, o simplemente *cónicas*. Si el plano secante es paralelo a una recta del cono que pase por el vértice, la cónica es una *parábola*. En cualquier otro caso la intersección se llama *elipse*

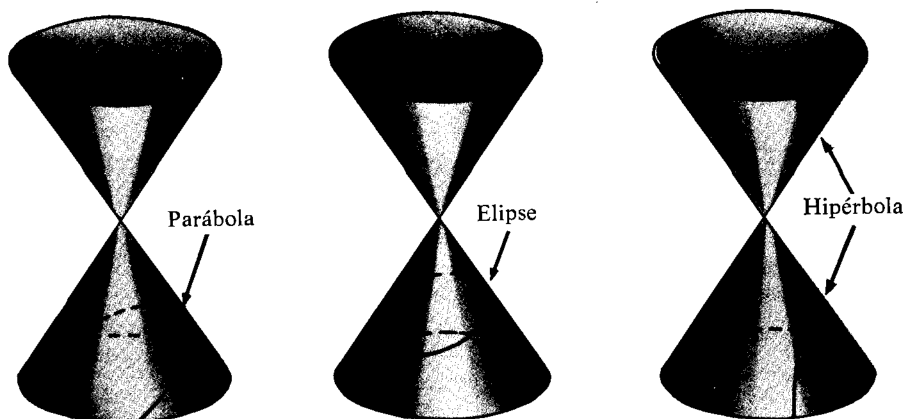


FIGURA 13.9 *Las secciones cónicas.*

o *hipérbola*, según que el plano corte una hoja del cono o las dos respectivamente. (Ver figura 13.9.) La hipérbola consta de dos «ramas» una en cada hoja del cono.

Muchos descubrimientos importantes tanto en la Matemática pura como en la aplicada han tenido relación con las seccciones cónicas. El estudio por

Apolonio de las cónicas en el siglo III antes de J.C. fue uno de los trabajos más notables de la Geometría clásica griega. Unos 2000 años más tarde, Galileo descubría que un proyectil lanzado horizontalmente desde lo alto de una torre, cae a la tierra describiendo una trayectoria parabólica (si se prescinde de la resistencia del aire y se supone que el movimiento tiene lugar sobre una parte de la superficie terrestre que se supone plana). Uno de los momentos cumbres de la historia de la Astronomía tiene lugar alrededor de 1600 cuando Kepler sugiere que todos los planetas se mueven en órbitas elípticas. Unos 80 años más tarde, Newton demostraba que las órbitas planetarias elípticas implican la ley de gravitación universal en la que la fuerza de atracción es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia entre los cuerpos que se atraen. La teoría de la gravitación universal formulada por Newton se considera algunas veces como el mayor descubrimiento científico que se ha realizado. Las secciones cónicas aparecen no sólo en las órbitas de los planetas y satélites, sino también como trayectorias de partículas atómicas elementales. Estos ejemplos y muchos otros muestran la importancia de la teoría de las secciones cónicas que difícilmente es estimada en toda su importancia.

Hay otras definiciones de las secciones cónicas que son equivalentes. En una de ellas se consideran unos puntos especiales llamados *focos* y entonces la elipse se puede definir como el lugar de todos los puntos del plano cuya suma de distan-

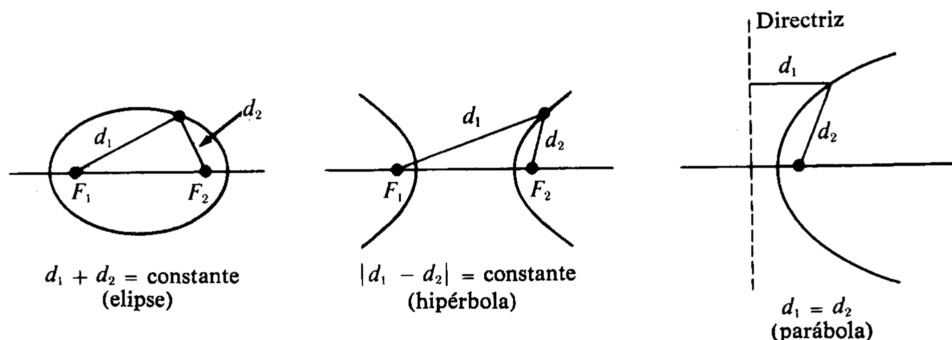


FIGURA 13.10 *Definiciones focales de las secciones cónicas.*

cias d_1 y d_2 a dos puntos F_1 y F_2 (los focos) es constante (véase fig. 13.10). Si los focos coinciden la elipse se reduce a una circunferencia. La hipérbola es el lugar de todos los puntos para los cuales $|d_1 - d_2|$ es constante y la parábola es el lugar de todos los puntos tales que la distancia a un punto fijo F (llamado el foco) es igual a la distancia a una *recta* fija llamada directriz (que no tiene ninguna relación con la directriz de un cilindro).

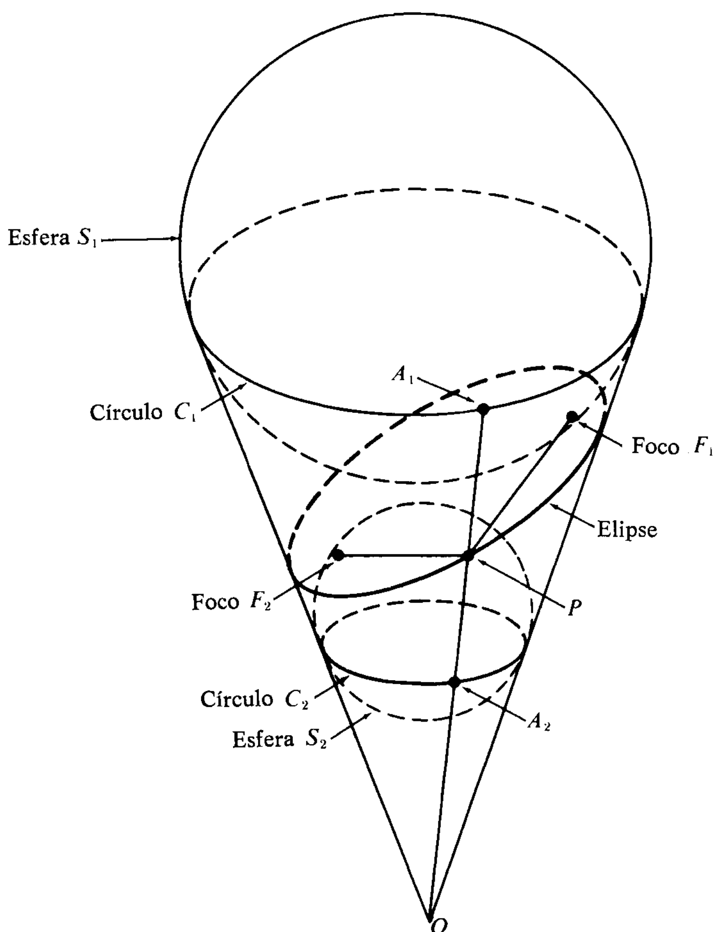


FIGURA 13.11 *Demostración de Dandelin.*

Hay un razonamiento muy simple y elegante que prueba que la propiedad focal de una elipse es consecuencia de su definición como sección de un cono. Esta demostración fue descubierta en 1822 por el matemático belga G. P. Dandelin (1794-1847) utilizando dos esferas que son tangentes al cono y al plano secante tal como se indica en la figura 13.11. Estas esferas son tangentes al cono a lo largo de dos paralelos C_1 y C_2. Se demostrará que los puntos F_1 y F_2 de contacto de las esferas con el plano son precisamente los focos de la elipse.

Sea P un punto arbitrario de la elipse. El problema está en probar que $\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\|$ es constante, es decir, independiente de la elección de P. Para

ello se dibuja en el cono la recta que va de O a P y sean A_1 y A_2 sus intersecciones con las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente. Entonces $\overrightarrow{PF_1}$ y $\overrightarrow{PA_1}$ son dos tangentes a S_1 desde P y por tanto $\|\overrightarrow{PF_1}\| = \|\overrightarrow{PA_1}\|$. Análogamente $\|\overrightarrow{PF_2}\| = \|\overrightarrow{PA_2}\|$ y, por tanto, se tiene:

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = \|\overrightarrow{PA_1}\| + \|\overrightarrow{PA_2}\| .$$

Pero $\|\overrightarrow{PA_1}\| + \|\overrightarrow{PA_2}\| = \|\overrightarrow{A_1A_2}\|$, que, es la distancia entre las dos circunferencias C_1 y C_2 medida sobre la superficie del cono. Esto demuestra que F_1 y F_2 son los focos de la elipse, como se había supuesto.

Modificando ligeramente esta demostración se tienen las correspondientes para la hipérbola y la parábola. En el caso de la hipérbola se ha de considerar una esfera en cada hoja del cono, y para la parábola una esfera tangente al plano secante en el foco. Esta esfera es tangente al cono a lo largo de una circunferencia situada en un plano cuya intersección con el plano secante es la directriz de la parábola. Con estas indicaciones el lector puede probar que las propiedades focales de la hipérbola y la parábola se pueden deducir de su definición como secciones de un cono.

13.19 Excentricidad de las secciones cónicas

Otra propiedad característica de las secciones cónicas se refiere a un concepto llamado excentricidad. Una sección cónica puede definirse como una curva descrita por un punto que se mueve en un plano de manera que la razón de sus distancias a un punto fijo y a una recta fija es constante. Esta razón constante se llama *excentricidad* de la curva y se designa por e. (No debe confundirse con el número e de Euler.) La curva es una *elipse* si $0 < e < 1$, una *parábola* si $e = 1$, y una *hipérbola* si $e > 1$. El punto fijo se llama *foco* y la recta fija *directriz.*

Adoptaremos esta definición como base de nuestro estudio de las cónicas ya que permite tratar simultáneamente los tres tipos de cónicas y favorece el uso de los métodos vectoriales. En esta discusión se sobrentiende que todos los puntos y rectas están en el mismo plano.

DEFINICIÓN. *Dados una recta L, un punto F no perteneciente a L, y un número positivo e. Designemos con $d(X, L)$ la distancia de un punto X a L. El conjunto de todos los X que satisfacen la relación*

$$\|X - F\| = e\, d(X, L) \tag{13.20}$$

es una cónica con excentricidad e. La cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, y una hipérbola si $e > 1$.

Si N es un vector normal a L y P cualquier punto de L la distancia $d(X, L)$ de cualquier punto X a L viene dada por la fórmula

$$d(X, L) = \frac{|(X - P) \cdot N|}{\|N\|}.$$

Cuando N tiene longitud 1, esta expresión se simplifica y queda $d(X, L) = |(X - P) \cdot N|$, y la ecuación fundamental (13.20) de las secciones cónicas se transforma en

(13.21) $$\|X - F\| = e\,|(X - P) \cdot N|.$$

La recta L separa el plano en dos regiones que llamaremos arbitrariamente «positiva» y «negativa» según la elección de N. Si $(X - P) \cdot N > 0$, decimos que X está en el semiplano positivo, y si $(X - P) \cdot N < 0$ en el semiplano negativo. Para los puntos de la recta L tenemos $(X - P) \cdot N = 0$. En la figura 13.12 la elección del vector normal N indica que los puntos situados a la derecha de L están en el semiplano positivo y los de la izquierda en el negativo.

Coloquemos el foco F en el semiplano negativo, como se indica en la figura 13.12, y elijamos P de modo que sea el punto de L más próximo a F. Entonces $P - F = dN$, siendo $|d| = \|P - F\|$ la distancia del foco a la directriz. Puesto que

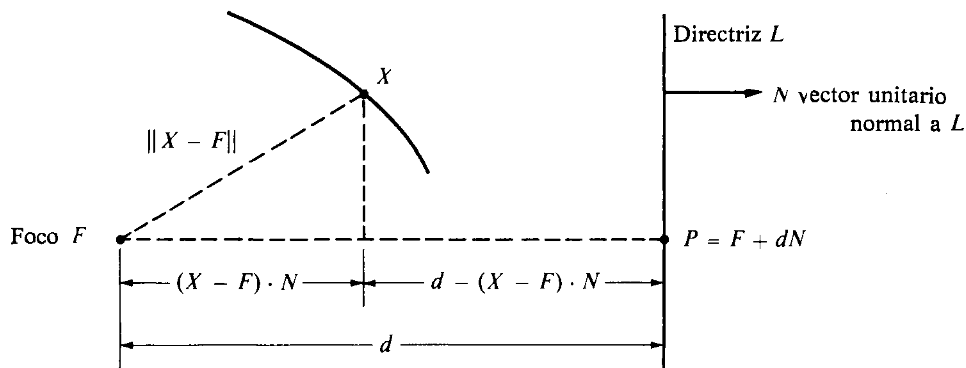


FIGURA 13.12 *Una cónica de excentricidad e es el conjunto de todos los X que satisfacen* $\|X - F\| = e|(X - F) \cdot N - d|$.

F está en el semiplano negativo, tenemos $(F - P) \cdot N = -d < 0$, así que d es positivo. Sustituyendo P por $F + dN$ en (13.21), obtenemos el teorema siguiente, que se representa en la figura 13.12.

TEOREMA 13.17. *Sea C una cónica con excentricidad e, foco F, y directriz L a una distancia d de F. Si N es un vector unitario normal a L y si F está en el semiplano negativo determinado por N, entonces C es el conjunto de todos los puntos X que satisfacen la ecuación*

(13.22) $$\|X - F\| = e\,|(X - F)\cdot N - d|\,.$$

13.20 Ecuaciones polares de las cónicas

La ecuación del teorema 13.17 puede simplificarse si colocamos el foco en una posición especial. Por ejemplo, si el foco está en el origen la ecuación se transforma en

(13.23) $$\|X\| = e\,|X\cdot N - d|\,.$$

Esta forma es particularmente útil si queremos expresar X en función de coordenadas polares. Tomemos la directriz L vertical, como en la figura 13.13, y pongamos $N = i$. Si X tiene coordenadas polares r y θ, tenemos $\|X\| = r$, $X \cdot N = r\cos\theta$, y la ecuación (13.23) se convierte en

(13.24) $$r = e\,|r\cos\theta - d|\,.$$

Si X está a la izquierda de la directriz, tenemos $r\cos\theta < d$, así que $|r\cos\theta - d| = d - r\cos\theta$ y (13.24) toma la forma $r = e(d - r\cos\theta)$, o, despejando r, tenemos

(13.25) $$r = \frac{ed}{e\cos\theta + 1}\,.$$

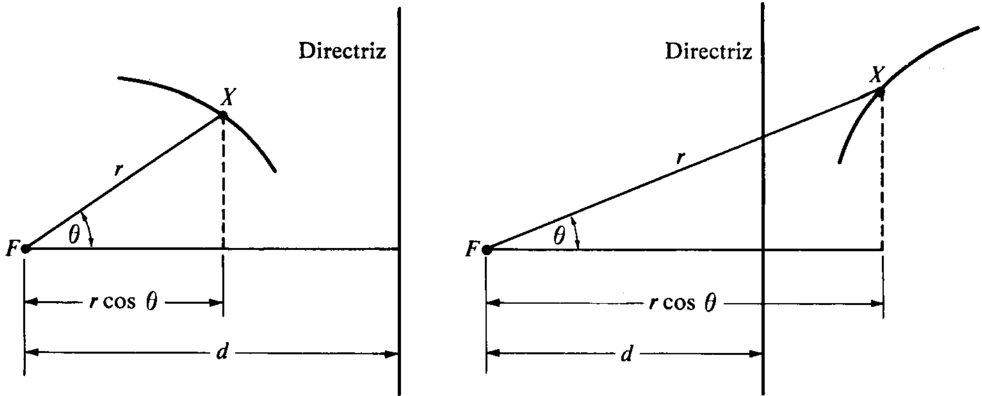
Si X está a la derecha de la directriz, tenemos r $\cos\theta > d$, así que (13.24) adopta la forma

$$r = e(r\cos\theta - d)\,,$$

obteniendo

(13.26) $$r = \frac{ed}{e\cos\theta - 1}\,.$$

Puesto que $r > 0$, esta última ecuación implica $e > 1$. Dicho de otro modo, sólo para la hipérbola existen puntos a la derecha de la directriz. Así pues, hemos demostrado el siguiente teorema que se representa en la figura 13.13.



a) $r \cos \theta < d$ en la elipse, la parábola y la rama izquierda de la hipérbola.

b) $r \cos \theta > d$ en la rama derecha de la hipérbola.

FIGURA 13.13 *Cónicas con ecuación polar $r = e\,|r\cos\theta - d|$. El foco F es el origen y está a la izquierda de la directriz.*

TEOREMA 13.18. *Sea C una cónica con excentricidad e, un foco F en el origen, y una directriz vertical L a una distancia d a la derecha de F. Si $0<e\leq 1$, la cónica C es una elipse o una parábola; todo punto de C está a la izquierda de L y satisface la ecuación polar*

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta + 1} \tag{13.27}$$

Si $e > 1$, la curva es una hipérbola con una rama a cada lado de L. Los puntos de la rama de la izquierda satisfacen (13.27) y los de la rama de la derecha satisfacen

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta - 1}. \tag{13.28}$$

En el siguiente conjunto de ejercicios se discuten las ecuaciones polares correspondientes a otras posiciones de la directriz.

13.21 Ejercicios

1. Demostrar que la ecuación (13.22) del teorema 13.17 debe reemplazarse por

$$\|X - F\| = e\,|(X - F)\cdot N + d|$$

si F está en el semiplano positivo determinado por N.

2. Sea C una cónica de excentricidad e, un foco en el origen, y directriz vertical L a una distancia d a la izquierda de F.
a) Demostrar que si C es una elipse o una parábola, todo punto de C está a la derecha de L y satisface la ecuación polar
$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}.$$
b) Demostrar que si C es una hipérbola, los puntos de la rama de la derecha satisfacen la ecuación de la parte a) y los de la rama izquierda satisfacen $r = -ed/(1 + e\cos\theta)$. Obsérvese que en este caso $1 + e\cos\theta$ siempre es negativa.
3. Si una cónica tiene una directriz horizontal a distancia d por encima de un foco situado en el origen, demostrar que sus puntos satisfacen las ecuaciones polares obtenidas de las del teorema 13.18 reemplazando $\cos\theta$ por $\operatorname{sen}\theta$. ¿Cuáles son las correspondientes ecuaciones polares si la directriz es horizontal y está por debajo del foco?

Cada uno de los ejercicios del 4 al 9 da una ecuación polar de una cónica con un foco F en el origen y una directriz vertical a la derecha de F. En cada caso, determinar la excentricidad e y la distancia d del foco a la directriz. Hacer un dibujo mostrando la relación de la curva a su foco y a su directriz.

4. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$.
5. $r = \dfrac{3}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}$.
6. $r = \dfrac{6}{3 + \cos\theta}$.
7. $r = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + \cos\theta}$.
8. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$.
9. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$.

En cada uno de los ejercicios del 10 al 12, una cónica de excentricidad e tiene un foco en el origen y una directriz dada por su ecuación cartesiana. En cada caso, calcular la distancia d del foco a la directriz y determinar la ecuación polar de la cónica. Para una hipérbola, dar una ecuación polar para cada rama. Hacer un dibujo mostrando la relación de la curva a su foco y a su directriz.

10. $e = \frac{1}{2}$; directriz: $3x + 4y = 25$.
11. $e = 1$; directriz: $4x + 3y = 25$.
12. $e = 2$; directriz: $x + y = 1$.
13. Un cometa se mueve siguiendo una órbita parabólica con el Sol en el foco. Cuando el cometa está a 10^8 kilómetros del Sol, un vector que une el foco al cometa forma un ángulo de $\pi/3$ con el vector unitario N trazado por el foco perpendicularmente a N, estando el foco en el semiplano negativo determinado por N.
a) Hallar la ecuación polar de la órbita, tomando el origen como foco, y calculando la menor distancia entre el cometa y el Sol.
b) Resolver la parte a) si el foco está en el semiplano positivo determinado por N.

13.22 Cónicas simétricas respecto al origen

Se dice que un conjunto de puntos es *simétrico respecto al origen* si $-X$ está en el conjunto siempre que X pertenezca a él. Demostramos seguidamente que

el foco de una elipse o de una hipérbola puede siempre situarse de modo que la cónica sea simétrica respecto al origen. Para hacerlo escribamos la ecuación fundamental (13.22) así:

$$\|X - F\| = e\,|(X - F)\cdot N - d| = e\,|X\cdot N - F\cdot N - d| = |eX\cdot N - a|, \tag{13.29}$$

donde $a = ed + eF\cdot N$. Elevando ambos miembros al cuadrado. obtenemos

$$\|X\|^2 - 2F\cdot X + \|F\|^2 = e^2(X\cdot N)^2 - 2eaX\cdot N + a^2. \tag{13.30}$$

Si tiene que haber simetría respecto al origen, esta ecuación debe también satisfacerse cuando X se reemplace por $-X$, dándonos

$$\|X\|^2 + 2F\cdot X + \|F\|^2 = e^2(X\cdot N)^2 + 2eaX\cdot N + a^2. \tag{13.31}$$

Restando (13.31) de (13.30), tenemos simetría si y sólo si

$$F\cdot X = eaX\cdot N \qquad \text{ó} \qquad (F - eaN)\cdot X = 0.$$

Esta ecuación puede satisfacerse para todo X de la curva si y sólo si F y N están ligados por la ecuación

$$F = eaN, \qquad \text{donde} \quad a = ed + eF\cdot N. \tag{13.32}$$

La relación $F = eaN$ implica $F\cdot N = ea$, obteniendo $a = ed + e^2a$. Si $e = 1$, esta última ecuación no puede satisfacerse ya que d, la distancia del foco a la directriz, no es nula. Esto significa que para la parábola no hay simetría respecto al origen. Si $e \neq 1$, siempre podemos satisfacer la relación (13.32) tomando

$$a = \frac{ed}{1 - e^2}, \qquad F = \frac{e^2d}{1 - e^2}N. \tag{13.33}$$

Obsérvese que $a > 0$ si $e < 1$ y $a < 0$ si $e > 1$. Poniendo $F = eaN$ en (13.30) obtenemos el siguiente

TEOREMA 13.19. *Sea C una cónica con excentricidad $e \neq 1$ y un foco F a una distancia d de una directriz L. Si N es un vector unitario normal a L y $F = eaN$, siendo $a = ed/(1 - e^2)$, entonces C es el conjunto de todos los puntos X que satisfacen la ecuación*

$$\|X\|^2 + e^2a^2 = e^2(X\cdot N)^2 + a^2. \tag{13.34}$$

Esta ecuación evidencia la simetría respecto al origen ya que no cambia cuando X se reemplaza por $-X$. Debido a esta simetría, la elipse y la hipérbola tienen cada una dos focos, simétricamente colocados respecto al centro, y dos directrices, también simétricamente colocadas respecto al centro.

La ecuación (13.34) se satisface cuando $X = \pm aN$. Esos dos puntos se llaman *vértices* de la cónica. El segmento que los une es el *eje mayor* si la cónica es una elipse, y el *eje transverso* si es una hipérbola.

Sea N' un vector unitario ortogonal a N. Si $X = bN'$, entonces $X \cdot N = 0$, así que la ecuación (13.34) se satisface para $X = bN'$ si y sólo si $b^2 + e^2a^2 = a^2$. Esto exige $e < 1$, $b^2 = a^2(1 - e^2)$. El segmento que une los puntos $X = \pm bN'$, donde $b = a\sqrt{1 - e^2}$ se llama *eje menor* de la elipse.

Observación: Si ponemos $e = 0$ en (13.34), resulta $\|X\| = a$, ecuación de una circunferencia de radio a y centro en el origen. A la vista de (13.33), podemos considerar tal circunferencia como caso límite de una elipse en la que $e \to 0$ y $d \to \infty$ de modo que $ed \to a$.

13.23 Ecuaciones cartesianas de las cónicas

Para obtener las ecuaciones cartesianas de la elipse y de la hipérbola, escribimos (13.34) en función de las coordenadas rectangulares de X. Elijamos $N = i$ (lo que significa que las directrices son verticales) y sea $X = (x, y)$. Entonces $\|X\|^2 = x^2 + y^2$, $X \cdot N = x$, y (13.34) toma la forma $x^2 + y^2 + e^2a^2 = e^2x^2 + a^2$, o $x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$, lo que nos da

$$\text{(13.35)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 .$$

Esta ecuación cartesiana representa la elipse ($e < 1$) y la hipérbola ($e > 1$) y se dice que está en la *forma canónica*. Los focos están en los puntos $(ae, 0)$ y $(-ae, 0)$; las directrices son las rectas verticales $x = a/e$ y $x = -a/e$.

Si $e < 1$, ponemos $b = a\sqrt{1 - e^2}$ y escribimos la ecuación de la elipse en la forma canónica

$$\text{(13.36)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Sus focos están en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, siendo $c = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$. En la figura 13.14 a) se muestra un ejemplo.

Si $e > 1$, ponemos $b = |a|\sqrt{e^2 - 1}$ y escribimos la ecuación de la hipérbola en la forma canónica

(13.37)
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

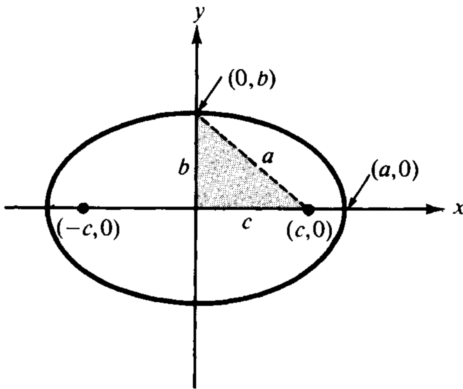
Sus focos están en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, siendo $c = |a|e = \sqrt{a^2 + b^2}$. En la figura 13.14 b) se muestra un ejemplo.

Observación: Despejando en (13.37) la y en función de x, obtenemos dos soluciones

(13.38)
$$y = \pm \frac{b}{|a|}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

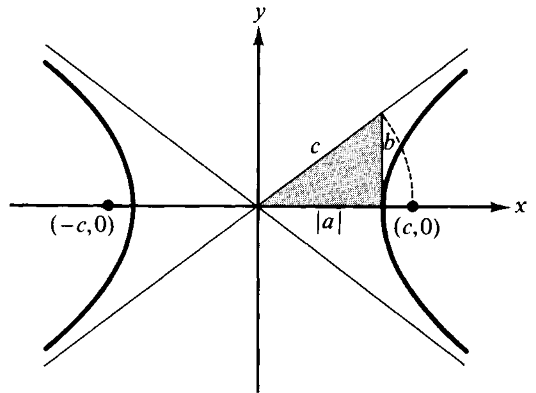
Para valores de x grandes y positivos, el número $\sqrt{x^2-a^2}$ es casi igual a x, así que el segundo miembro de (13.38) es próximo a $\pm\ bx/|a|$. Es fácil demostrar que la diferencia entre $y_1=bx|a|$ e $y_2=b\ \sqrt{x^2-a^2}/|a|$ tiende a 0 cuando $x \to +\infty$. Esta diferencia es

$$y_1 - y_2 = \frac{b}{|a|}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{|a|}\frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{|a|\,b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < \frac{|a|\,b}{x}$$



(a) Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2 = a^2 - c^2$$



(b) Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2 = c^2 - a^2$$

FIGURA 13.14 *Cónicas con excentricidad $e \neq 1$, simétricas respecto al origen. Los focos están en $(\pm\ c,\ 0)$, siendo $c = |a|e$. Los triángulos relacionan geométricamente a, b, c.*

de manera que $y_1 - y_2 \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Por consiguiente, la recta $y = bx/|a|$ es una asíntota de la hipérbola. La recta $y = -bx/|a|$ es la otra asíntota. Se dice que la hipérbola tiende hacia esas rectas asintóticamente. En la figura 13.14 *b*) se representan las asíntotas.

La ecuación cartesiana de la elipse y de la hipérbola toma distinta forma si las directrices no son verticales. Por ejemplo, si las directrices se toman horizontales, podemos considerar $N = j$ en la ecuación (13.34). Puesto que $X \cdot N = X \cdot j = y$, obtenemos una ecuación cartesiana parecida a la (13.35), excepto que x e y están permutadas. La forma canónica en este caso es

(13.39) $$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 .$$

Si la cónica se traslada por adición de un vector $X_0 = (x_0, y_0)$ a cada uno de sus puntos, el centro será (x_0, y_0) en lugar del origen. Las correspondientes ecuaciones cartesianas pueden obtenerse de (13.35) o (13.39) sustituyendo x por $x - x_0$ e y por $y - y_0$.

Para obtener una ecuación cartesiana para la parábola, consideremos de nuevo la ecuación fundamental (13.20) con $e = 1$. Tomemos como directriz la recta vertical $x = -c$ y situemos el foco en $(c, 0)$. Si $X = (x, y)$, tenemos $X - F = (x - c, y)$, y la ecuación (13.20) nos da $(x - c)^2 + y^2 = |x + c|^2$. Esto simplifica la ecuación canónica

(13.40) $$y^2 = 4cx .$$

El punto medio entre el foco y la directriz (el origen en la figura 13.15) se llama *vértice* de la parábola, y la recta que pasa por el vértice y el foco es el *eje* de la parábola. La parábola es simétrica respecto a su eje. Si $c > 0$, la parábola está a la derecha del eje y, como en la figura 13.15. Cuando $c < 0$, la curva está a la izquierda del eje y.

Si se eligen los ejes de modo que el foco esté en el eje y en el punto $(0, c)$ y si la recta horizontal $y = -c$ se toma como directriz, la forma canónica de la ecuación cartesiana toma la forma

$$x^2 = 4cy .$$

Cuando $c > 0$ la parábola se abre hacia arriba como muestra la figura 13.16, y cuando $c < 0$, se abre hacia abajo.

Si la parábola de la figura 13.15 se traslada de modo que su vértice esté en el punto (x_0, y_0), la correspondiente ecuación es

$$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0) .$$

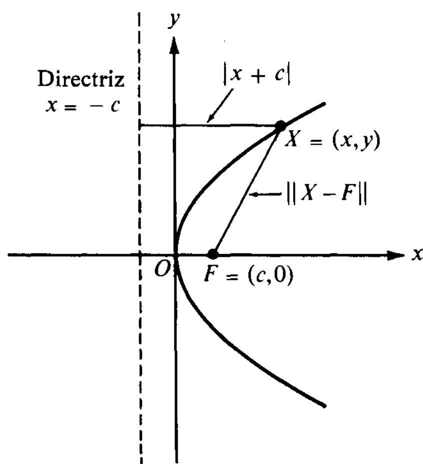


FIGURA 13.15 *La parábola* $y^2 = 4cx$.

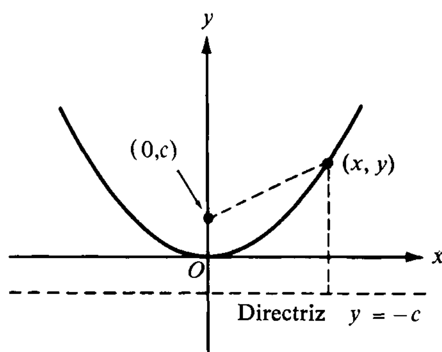


FIGURA 13.16 *La parábola* $x^2 = 4cy$

El foco está ahora en el punto $(x_0 + c, y_0)$ y la directriz es la recta $x = x_0 - c$. El eje de la parábola es la recta $y = y_0$.

Análogamente, una traslación de la parábola de la figura 13.16 nos conduce a la ecuación

$$(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0),$$

con foco en $(x_0, y_0 + c)$. La recta $y = y_0 - c$ es su directriz, la recta $x = x_0$ su eje.

El lector puede encontrar entretenido demostrar que una parábola nunca tiene asíntotas.

13.24 Ejercicios

Cada una de las ecuaciones en los ejercicios del 1 al 6 representa una elipse. Hallar las coordenadas del centro, los focos y los vértices, y dibujar cada curva. Determinar también la excentricidad.

1. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1.$
2. $\dfrac{y^2}{100} + \dfrac{x^2}{36} = 1.$
3. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1.$
4. $9x^2 + 25y^2 = 25.$
5. $4y^2 + 3x^2 = 1.$
6. $\dfrac{(x+1)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1.$

En cada uno de los ejercicios del 7 al 12, hallar la ecuación cartesiana (en la forma canónica apropiada) para la elipse que satisface las condiciones dadas. Dibujar cada curva.

7. Centro en $(0, 0)$, un foco en $(\frac{3}{4}, 0)$, un vértice en $(1, 0)$.
8. Centro en $(-3, 4)$, semiejes de longitud 4 y 3, eje mayor paralelo al eje x.
9. Lo mismo que en el ejercicio 8, salvo que el eje mayor es paralelo al eje y.
10. Vértices en $(-1, 2)$, $(-7, 2)$, eje menor de longitud 2.
11. Vértices en $(3, -2)$, $(13, -2)$, focos en $(4, -2)$, $(12, -2)$.
12. Centro en $(2, 1)$, eje mayor paralelo al eje x, la curva pasa por los puntos $(6, 1)$ y $(2, 3)$.

Cada una de las ecuaciones en los ejercicios 13 al 18 representa una hipérbola. Hallar las coordenadas del centro, los focos y los vértices. Dibujar cada curva y mostrar las posiciones de las asíntotas. Calcular también la excentricidad.

13. $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1.$
14. $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{64} = 1.$
15. $\dfrac{(x+3)^2}{4} - (y-3)^2 = 1.$
16. $9x^2 - 16y^2 = 144.$
17. $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0.$
18. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1.$

En cada uno de los ejercicios 19 al 23, hallar la ecuación cartesiana (en la forma canónica adecuada) para la hipérbola que satisface las condiciones dadas. Dibujar cada curva y las asíntotas.

19. Centro en $(0, 0)$, un foco en $(4, 0)$, un vértice en $(2, 0)$.
20. Focos en $(0, \pm\sqrt{2})$, vértices en $(0, \pm 1)$.
21. Vértices en $(\pm 2, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$.
22. Centro en $(-1, 4)$, un foco en $(-1, 2)$, un vértice en $(-1, 3)$.
23. Centro en $(2, -3)$, eje transverso paralelo a uno de los ejes coordenados, la curva pasa por $(3, -1)$y $(-1, 0)$.
24. ¿Para qué valor (o valores) de C la recta $3x - 2y = C$ será tangente a la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 1$?
25. Las asíntotas de una hipérbola son las rectas $2x - y = 0$ y $2x + y = 0$. Hallar la ecuación cartesiana de la curva si pasa por el punto $(3, -5)$.

Cada una de las ecuaciones en los ejercicios 26 al 31 representa una parábola. Hallar las coordenadas de los vértices, la ecuación de la directriz, y la del eje. Dibujar cada una de las curvas.

26. $y^2 = -8x.$
27. $y^2 = 3x.$
28. $(y-1)^2 = 12x - 6.$
29. $x^2 = 6y.$
30. $x^2 + 8y = 0.$
31. $(x+2)^2 = 4y + 9.$

En cada uno de los ejercicios del 32 al 37, hallar la ecuación cartesiana (en la forma canónica adecuada) para la parábola que satisface las condiciones dadas y dibujar la curva.

32. Foco en $(0, -\frac{1}{4})$; ecuación de la directriz, $x = \frac{1}{4}$.
33. Vértice en $(0, 0)$; ecuación de la directriz, $x = -2$.
34. Vértice en $(-4, 3)$; foco en $(-4, 1)$.
35. Foco en $(3, -1)$; ecuación de la directriz, $x = \frac{1}{2}$.
36. Eje paralelo al eje y; pasa por $(0, 1)$,$(1, 0)$ y $(2, 0)$.
37. Eje paralelo al eje x; vértice en $(1, 3)$; pasa por $(-1, -1)$.
38. Partiendo de la definición focal, hallar la ecuación cartesiana de la parábola cuyo foco es el origen y cuya directriz es la recta $2x + y = 10$.

13.25 Ejercicios varios sobre cónicas

1. Demostrar que el área de la región limitada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es igual a ab multiplicado por el área de un círculo de radio 1.

   Observación: Esta proposición puede demostrarse a partir de las propiedades generales de la integral, sin realizar ninguna integración.

2. a) Demostrar que el volumen del sólido de revolución engendrado al girar la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ alrededor de su eje mayor es igual a ab^2 multiplicado por el volumen de una esfera unidad.

   Observación: Esta proposición puede demostrarse a partir de las propiedades generales de la integral, sin realizar ninguna integración.

   b) ¿Cuál es el resultado si la elipse gira alrededor de su eje menor?
3. Hallar todos los números positivos A y B, $A > B$, tales que el área de la región limitada por la elipse $Ax^2 + By^2 = 3$ es igual a la de la región limitada por la elipse

$$(A + B)x^2 + (A - B)y^2 = 3\,.$$

4. Un arco parabólico tiene una base de longitud b y altura h. Determinar el área de la región limitada por el arco y la base.
5. La región limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ gira alrededor del eje x. Hallar el volumen del sólido de revolución así engendrado.
6. Dos parábolas tienen por ecuaciones $y^2 = 2(x - 1)$ e $y^2 = 4(x - 2)$ y limitan una región del plano R.
   a) Calcular por integración el área de R.
   b) Hallar el volumen del sólido de revolución engendrado al girar R alrededor del eje x.
   c) Lo mismo que en b), pero girando R alrededor del eje y.
7. Hallar la ecuación cartesiana de la cónica constituida por todos los puntos (x, y) cuya distancia al punto $(0, 2)$ es la mitad de la distancia a la recta $y = 8$.
8. Hallar la ecuación cartesiana de la parábola cuyo foco está en el origen y cuya directriz es la recta $x + y + 1 = 0$.
9. Hallar la ecuación cartesiana de una hipérbola que pasa por el origen, y que sus asíntotas son las rectas $y = 2x + 1$ e $y = -2x + 3$.
10. a) Para cada $p > 0$, la ecuación $px^2 + (p + 2)y^2 = p^2 + 2p$ representa una elipse. Hallar (en función de p) la excentricidad y las coordenadas de los focos.
    b) Hallar la ecuación cartesiana de la hipérbola que tiene los mismos focos que la elipse de la parte a) y que tiene excentricidad $\sqrt{3}$.
11. En la sección 13.22 se demostró que una cónica simétrica respecto al origen satisface la ecuación $\|X - F\| = |eX \cdot N - a|$, donde $a = ed + eF \cdot N$. Utilizar esta relación para demostrar que $\|X - F\| + \|X + F\| = 2a$ si la cónica es una elipse. En otras palabras, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a sus focos es constante.
12. Teniendo en cuenta el ejercicio 11, demostrar que para cada rama de la hipérbola la diferencia $\|X - F\| - \|X + F\|$ es constante.
13. a) Demostrar que una transformación por homotecia (sustitución de x por tx e y por ty) transforma una elipse con centro en el origen en otra elipse con la misma excentricidad.
    b) Demostrar también el recíproco. Esto es, si dos elipses concéntricas tienen la misma excentricidad y ejes mayores sobre la misma recta, están relacionadas por una homotecia.
    c) Demostrar los resultados análogos a los a) y b) para las hipérbolas.

14. Utilizar la ecuación cartesiana que representa todas las cónicas de excentricidad e y centro en el origen para demostrar que tales cónicas son curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = (e^2 - 1)x/y$.

   Observación: Puesto que ésta es una ecuación diferencial homogénea (sección 8.25), el conjunto de todas esas cónicas de excentricidad e es invariante frente a una transformación por homotecia. (Compárese con el ejercicio 13.)

15. a) Demostrar que el conjunto de todas las parábolas es invariante frente a una transformación por semejanza. Esto es, una tal semejanza transforma una parábola en una parábola.
   b) Hallar todas las parábolas semejantes a $y = x^2$.
16. La recta $x - y + 4 = 0$ es tangente a la parábola $y^2 = 16x$. Hallar el punto de contacto.
17. a) Dado $a \neq 0$. Si las dos parábolas $y^2 = 4p(x - a)$ y $x^2 = 4qy$ son tangentes, demostrar que la coordenada x del punto de contacto está determinada únicamente por a.
   b) Hallar una condición para a, p y q que exprese el hecho de que las dos parábolas sean tangentes.
18. Considérese el lugar geométrico de los puntos P del plano para los que la distancia de P al punto $(2, 3)$ es igual a la suma de las distancias de P a los dos ejes coordenados.
   a) Demostrar que la parte de ese lugar situada en el primer cuadrante es parte de una hipérbola. Situar las asíntotas y hacer un dibujo.
   b) Esbozar la gráfica del lugar, en los otros cuadrantes.
19. Dos parábolas tienen el mismo punto como foco y la misma recta como eje, pero sus vértices están a distinto lado del foco. Demostrar que las parábolas se cortan ortogonalmente (o sea que sus tangentes son perpendiculares en los puntos de intersección).
20. a) Demostrar que la ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

   representa todas las cónicas simétricas respecto al origen con focos en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$.
   b) Mantener fijo c y designar con S el conjunto de todas esas cónicas obtenidas al tomar a^2 todos los números positivos $\neq c^2$. Demostrar que toda curva de S satisface la ecuación diferencial

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0\,.$$

   c) Demostrar que S es ortogonal a sí mismo; esto es, el conjunto de todas las trayectorias ortogonales a las curvas de S es el mismo S. [*Indicación:* Reemplazar y' por $-1/y'$ en la ecuación diferencial de la parte *b*).]
21. Demostrar que el lugar de los centros de una familia de circunferencias, que pasan todas por un punto dado y son tangentes a una recta dada, es una parábola.
22. Demostrar que el lugar de los centros de una familia de circunferencias, que son todas tangentes (externamente) a una circunferencia dada y a una recta dada, es una parábola. (El ejercicio 21 puede considerarse como un caso particular.)
23. a) Una cuerda de longitud $8|c|$ se traza perpendicular al eje de la parábola $y^2 = 4cx$. Sean P y Q los puntos en los que la cuerda corta la parábola. Demostrar que el vector que une O con P es perpendicular al que une O con Q.
   b) La cuerda de una parábola trazada por el foco y paralela a la directriz se llama

lado recto o *parámetro*. Demostrar que la longitud del lado recto es doble de la distancia del foco a la directriz, y demostrar luego que las tangentes a la parábola en los extremos del lado recto cortan el eje de la parábola en la intersección de éste con la directriz.

24. Dos puntos P y Q se llaman simétricos respecto a una circunferencia si P y Q están alineados con el centro, si el centro no está entre ellos, y si el producto de sus distancias al centro es igual al cuadrado del radio. Si Q describe la recta $x + 2y - 5 = 0$, hallar el lugar del punto P simétrico de Q respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

14

CÁLCULO CON FUNCIONES VECTORIALES

14.1 Funciones vectoriales de una variable real

Este capítulo combina el Álgebra vectorial con los métodos del Cálculo y describe algunas aplicaciones al estudio de curvas y algunos problemas de Mecánica. El concepto de función vectorial es fundamental en este estudio.

DEFINICIÓN. *Una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo recorrido es un subconjunto del espacio n-dimensional* V_n *se denomina función vectorial de una variable real.*

Hemos encontrado tales funciones en el capítulo 13. Por ejemplo, la recta que pasa por un punto P y es paralela a un vector no nulo A es el recorrido de la función vectorial X dada por

$$X(t) = P + tA$$

para todo real t.

Las funciones vectoriales se designarán con letras mayúsculas cursivas tales como F, G, X, Y, etc., o mediante letras minúsculas cursivas negritas $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, etc. El valor de una función F en t se designa, corrientemente, por $F(t)$. En los ejemplos que estudiaremos, el dominio de F será un intervalo que puede contener uno o dos extremos o que puede ser infinito.

14.2 Operaciones algebraicas. Componentes

Las operaciones usuales del Álgebra vectorial pueden aplicarse para combinar dos funciones vectoriales o una función vectorial con una función real. Si

F y G son funciones vectoriales, y si u es una función real, teniendo todas un dominio común, definimos nuevas funciones $F + G$, uF, y $F \cdot G$ mediante

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t), \qquad (uF)(t) = u(t)F(t), \qquad (F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t).$$

La suma $F + G$ y el producto uF son vectoriales, mientras que el producto escalar $F \cdot G$ es real. Si $F(t)$ y $G(t)$ están en el espacio de 3 dimensiones, también podemos definir el producto vectorial $F \times G$ con la fórmula

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t).$$

La operación de composición puede aplicarse para combinar funciones vectoriales con funciones reales. Por ejemplo, si F es una función vectorial cuyo dominio contiene el recorrido de una función real u, la función compuesta $G = F \circ u$ es una nueva función vectorial definida por

$$G(t) = F[u(t)]$$

para cada t en el dominio de u.

Si una función F tiene sus valores en V_n, cada vector $F(t)$ tiene n componentes, y podemos escribir

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)).$$

Así pues, cada función vectorial F origina n funciones reales $f_1, \ldots, f_n$ cuyos valores en t son los componentes de $F(t)$. Indicamos esta relación escribiendo $F = (f_1, \ldots, f_n)$, y llamamos f_k el k-ésimo componente de F.

14.3 Límites, derivadas, e integrales

Los conceptos fundamentales del Cálculo, tales como límite, derivada e integral, también pueden extenderse a las funciones vectoriales. Expresamos sencillamente la función vectorial en función de sus componentes y realizamos las operaciones del cálculo sobre los componentes.

DEFINICIÓN. *Si $F = (f_1, \ldots, f_n)$ es una función vectorial, definimos el límite, la derivada y la integral por*

$$\lim_{t \to p} F(t) = \left(\lim_{t \to p} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to p} f_n(t)\right),$$

$$F'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t)),$$

$$\int_a^b F(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\, dt\right),$$

siempre que los componentes de los segundos miembros tengan sentido.

Decimos también que F es *continua, derivable* o *integrable* en un intervalo si cada componente de F tiene la correspondiente propiedad en el intervalo.

A la vista de esas definiciones, no puede sorprender encontrar que muchos de los teoremas sobre límites, continuidad, derivación, e integración de funciones reales también son válidos para funciones vectoriales. Vamos a establecer algunos de los teoremas que utilizamos en este capítulo.

TEOREMA 14.1. *Si F, G, y u son derivables en un intervalo, lo mismo ocurre con $F + G$, uF, y $F \cdot G$, y tenemos*

$$(F + G)' = F' + G', \qquad (uF)' = u'F + uF', \qquad (F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'.$$

Si F y G tienen los valores en V_3 también tenemos

$$(F \times G)' = F' \times G + F \times G'.$$

Demostración. Para ver la marcha de las demostraciones discutimos la fórmula para $(uF)'$. Las demostraciones de las otras son parecidas y se dejan como ejercicios para el lector.

Escribiendo $F = (f_1, \ldots, f_n)$, tenemos

$$uF = (uf_1, \ldots, uf_n), \qquad (uF)' = ((uf_1)', \ldots, (uf_n)').$$

Pero la derivada del k-ésimo componente de uF es $(uf_k)' = u'f_k + uf_k'$, así que tenemos

$$(uF)' = u'(f_1, \ldots, f_n) + u(f_1', \ldots, f_n') = u'F + uF'.$$

El lector observará que las fórmulas de derivación del teorema 14.1 son análogas a las de la derivación de una suma o un producto de funciones reales. Puesto que el producto vectorial no es conmutativo, debe uno prestar atención al orden de los factores en la fórmula correspondiente a $(F \times G)'$.

La fórmula para la derivación $F \cdot G$ nos da el siguiente teorema que se utilizará con frecuencia.

TEOREMA 14.2. *Si una función vectorial es derivable y es de longitud constante en un intervalo abierto I, entonces $F \cdot F' = 0$ en I. Dicho de otro modo, $F'(t)$ es perpendicular a $F(t)$ para cada t en I.*

Demostración. Pongamos $g(t) = \|F(t)\|^2 = F(t) \cdot F(t)$. Por hipótesis, g es constante en I, y por lo tanto $g' = 0$ en I. Pero ya que g es un producto escalar, tenemos $g' = F' \cdot F + F \cdot F' = 2F \cdot F'$. Por lo tanto $F \cdot F' = 0$.

El teorema que sigue trata de las funciones continuas. Su demostración se deduce fácilmente del teorema 3.5 y 4.2 que contienen los resultados análogos para funciones reales.

TEOREMA 14.3. *Sea $G = F \circ u$, donde F es una función vectorial y u es una función real. Si u es continua en t y F es continua en $u(t)$, entonces G es continua en t. Si las derivadas $u'(t)$ y $F'[u(t)]$ existen, entonces $G'(t)$ también existe y viene dada por la regla de la cadena,*

$$G'(t) = F'[u(t)]u'(t) .$$

Si una función vectorial F es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces cada componente es continua y por tanto integrable en $[a, b]$, así que F es integrable en $[a, b]$. Los tres teoremas que siguen proporcionan las propiedades fundamentales de la integral de las funciones vectoriales. En cada caso, las demostraciones se deducen al momento de los resultados análogos para las integrales de funciones reales.

TEOREMA 14.4. LINEALIDAD Y ADITIVIDAD. *Si las funciones vectoriales F y G son integrables en $[a, b]$, también lo es $c_1F + c_2G$ para cualesquiera c_1 y c_2, y tenemos*

$$\int_a^b (c_1F(t) + c_2G(t))\, dt = c_1\int_a^b F(t)\, dt + c_2\int_a^b G(t)\, dt .$$

Asimismo, para cada c en $[a, b]$, tenemos

$$\int_a^b F(t)\, dt = \int_a^c F(t)\, dt + \int_c^b F(t)\, dt .$$

TEOREMA 14.5. PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. *Supongamos que F es una función vectorial continua en $[a, b]$. Si $c \in [a, b]$, definamos la integral indefinida A como la función vectorial dada por*

$$A(x) = \int_c^x F(t)\, dt \qquad si \quad a \leq x \leq b .$$

Entonces $A'(x)$ existe, y se tiene $A'(x) = F(x)$ para cada x de (a, b).

TEOREMA 14.6. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. *Supongamos que la función vectorial F tiene derivada continua F' en un intervalo abierto I. Entonces, para cada elección de c y x en I, tenemos*

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\, dt .$$

El teorema que sigue es una extensión de la propiedad $c\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b cF(t)\,dt$, reemplazando la multiplicación por el escalar c por el producto escalar por un vector C.

TEOREMA 14.7. *Si $F = (f_1, \ldots, f_n)$ es integrable en $[a, b]$, para todo vector $C = (c_1, \ldots, c_n)$ el producto escalar $C \cdot F$ es integrable en $[a, b]$, y tenemos*

$$C \cdot \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b C \cdot F(t)\,dt$$

Demostración. Puesto que cada componente de F es integrable, tenemos

$$C \cdot \int_a^b F(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b f_i(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\,dt = \int_a^b C \cdot F(t)\,dt\,.$$

Apliquemos ahora el teorema 14.7 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz y obtenemos la siguiente propiedad importante de las integrales de funciones vectoriales.

TEOREMA 14.8. *Si F y $\|F\|$ son integrables en $[a, b]$ tenemos*

(14.1) $$\left\| \int_a^b F(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|F(t)\|\,dt\,.$$

Demostración. Pongamos $C = \int_a^b F(t)\,dt$. Si $C = O$, entonces (14.1) resulta trivial. Supongamos, pues, que $C \neq O$ y apliquemos el teorema 14.7 obteniendo

(14.2) $$\|C\|^2 = C \cdot C = C \cdot \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b C \cdot F(t)\,dt\,.$$

Puesto que el producto escalar $C \cdot F(t)$ es función real, tenemos la desigualdad

(14.3) $$\int_a^b C \cdot F(t)\,dt \le \int_a^b |C \cdot F(t)|\,dt \le \int_a^b \|C\|\,\|F(t)\|\,dt\,,$$

donde en el último paso se ha empleado la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|C \cdot F(t)| \le \|C\|\,\|F(t)\|$. Combinando (14.2) y (14.3), llegamos a

$$\|C\|^2 \le \|C\| \int_a^b \|F(t)\|\,dt\,.$$

Ya que $\|C\| > 0$, podemos dividir por $\|C\|$ obteniendo (14.1).

14.4 Ejercicios

Calcular las derivadas $F'(t)$ y $F''(t)$ para cada una de las funciones vectoriales de los ejercicios del 1 al 6.

1. $F(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$.
2. $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen} 2t, \tan t)$.
3. $F(t) = (\operatorname{arcsen} t, \arccos t)$.
4. $F(t) = 2e^t\boldsymbol{i} + 3e^t\boldsymbol{j}$.
5. $F(t) = \cosh t\,\boldsymbol{i} + \operatorname{senh} 2t\,\boldsymbol{j} + e^{-3t}\boldsymbol{k}$.
6. $F(t) = \log(1 + t^2)\,\boldsymbol{i} + \arctan t\,\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{1 + t^2}\,\boldsymbol{k}$.
7. Sea F una función vectorial dada por

$$F(t) = \frac{2t}{1 + t^2}\,\boldsymbol{i} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\,.$$

Demostrar que el ángulo formado por $F(t)$ y $F'(t)$ es constante, esto es, independiente de t.
Calcular las integrales de las funciones vectoriales en los ejercicios del 8 al 11.

8. $\displaystyle\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t)\,dt$.
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} t, \cos t, \tan t)\,dt$.
10. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1 + e^t}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{1 + e^t}\,\boldsymbol{j}\right) dt$.
11. $\displaystyle\int_0^1 (te^t\boldsymbol{i} + t^2e^t\boldsymbol{j} + te^{-t}\boldsymbol{k})\,dt$.
12. Calcular $A \cdot B$, siendo $A = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $B = \int_0^1 (te^{2t}\boldsymbol{i} + t\cosh 2t\,\boldsymbol{j} + 2te^{-2t}\boldsymbol{k})\,dt$.
13. Dados un vector B no nulo y una función vectorial F tal que $F(t) \cdot B = t$ para todo t, y tales que el ángulo formado por $F'(t)$ y B es constante (independiente de t). Demostrar que $F''(t)$ es ortogonal a $F'(t)$.
14. Dados los vectores fijos no nulos A y B, pongamos $F(t) = e^{2t}A + e^{-2t}B$. Demostrar que $F''(t)$ tiene la misma dirección que $F(t)$.
15. Si $G = F \times F'$, calcular G' en función de F y de las derivadas de F.
16. Si $G = F \cdot F' \times F''$, demostrar que $G' = F \cdot F' \times F'''$.
17. Demostrar que $\lim_{t\to p} F(t) = A$ si y sólo si $\lim_{t\to p} \|F(t) - A\| = 0$.
18. Demostrar que una función vectorial F es derivable en un intervalo abierto I si y sólo si para cada t en I tenemos

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,[F(t + h) - F(t)]\,.$$

19. Demostrar el teorema de la derivada nula para las funciones vectoriales. Si $F'(t) = O$ para cada t en un intervalo abierto I, existe un vector C tal que $F(t) = C$ para todo t de I.
20. Dados los vectores fijos A y B y la función vectorial F tal que $F''(t) = tA + B$, determinar $F(t)$ si $F(0) = D$ y $F'(0) = C$.
21. Una ecuación diferencial de la forma $Y'(x) + p(x)Y(x) = Q(x)$, donde p es una función real dada, Q una función vectorial e Y una función vectorial desconocida, se llama ecuación diferencial vectorial de primer orden. Demostrar que si p y Q son continuas en un intervalo I, entonces para cada a de I y cada vector B existe una solución y sólo

una Y que satisface la condición inicial $Y(a) = B$, y que esa solución viene dada por la fórmula

$$Y(t) = Be^{-q(t)} + e^{-q(t)}\int_a^t Q(x)e^{q(x)}\,dx\,,$$

siendo $q(x) = \int_a^x p(t)\,dt$.

22. Una función vectorial F satisface la ecuación $tF'(t) = F(t) + tA$ para cada $t \geq 0$, donde A es un vector fijo. Calcular $F''(1)$ y $F(3)$ en función de A, si $F(1) = 2A$.
23. Hallar una función vectorial F, continua en el intervalo $(0, +\infty)$, tal que

$$F(x) = xe^{x}A + \frac{1}{x}\int_1^x F(t)\,dt\,,$$

para todo $x > 0$, siendo A un vector fijo no nulo.

24. Una función vectorial F, que nunca es cero y tiene derivada continua $F'(t)$ para todo t, siempre es paralela a su derivada. Demostrar que existe un vector constante A y una función real positiva u tal que $F(t) = u(t)A$ para todo t.

14.5 Aplicaciones a las curvas. Tangencia

Sea X una función vectorial cuyo dominio es un intervalo I. Cuando t recorre I, los correspondientes valores de la función $X(t)$ recorren un conjunto de puntos que llamamos *gráfica* de la función X. Si los valores de la función están en espacios de 2 ó 3 dimensiones, podemos representar geométricamente la gráfica. Por ejemplo, si $X(t) = P + tA$, donde P y A son vectores fijos en V_3, con $A \neq O$, la gráfica de X es una recta que pasa por P y es paralela a A. Una función más general describirá una gráfica más general, como sugiere el ejemplo de la figura 14.1. Si X es continua en I, tal gráfica se llama *curva*; o con más precisión la curva descrita por X. A veces decimos que la curva es descrita *paramétricamente* por X. El intervalo I se llama *intervalo paramétrico;* cada t de I se llama *parámetro*.

Las propiedades de la función X pueden utilizarse para investigar propiedades geométricas de sus gráficas. En particular, la derivada X' está ligada al concepto de tangencia, como en el caso de una función real. Formemos el cociente de diferencias

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \tag{14.4}$$

e investiguemos su comportamiento cuando $h \to 0$. Este cociente es el producto del vector $X(t + h) - X(t)$ por el escalar $1/h$. El numerador, $X(t + h) - X(t)$, representado en la figura 14.2, es paralelo al vector (14.4). Si expresamos este

cociente de diferencias en función de sus componentes y hacemos que $h \to 0$, encontramos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{X(t + h) - X(t)}{h} = X'(t),$$

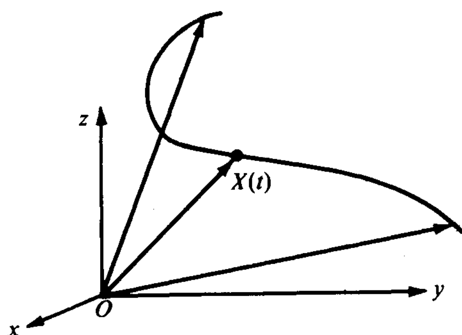


FIGURA 14.1 *Curva descrita por el vector $X(t)$.*

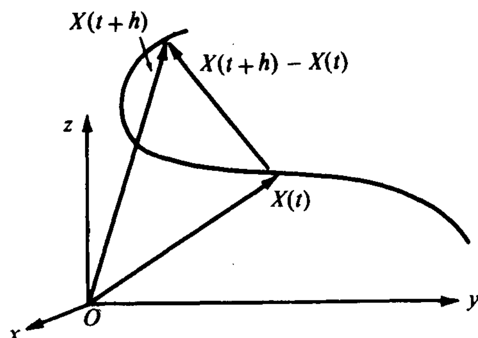


FIGURA 14.2 *El vector $X(t + h) - X(t)$ es paralelo al $[X(t + h) - X(t)]/h$.*

suponiendo que la derivada $X'(t)$ exista. La interpretación geométrica de esta relación sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN. *Sea C una curva descrita por una función vectorial continua X. Si existe la derivada $X'(t)$ y no es nula, la recta que pasa por $X(t)$ y paralela a $X'(t)$ se llama tangente a C en $X(t)$. El vector $X'(t)$ se denomina vector tangente a C en $X(t)$.*

EJEMPLO 1. *Recta.* Para una recta dada por $X(t) = P + tA$, siendo $A \neq O$, tenemos $X'(t) = A$, así que la recta tangente en cada punto coincide con la gráfica de X, propiedad que ciertamente deseábamos.

EJEMPLO 2. *Circunferencia.* Si X describe una circunferencia de radio a y centro en P, entonces $\|X(t) - P\| = a$ para cada t. El vector $X(t) - P$ se llama *radio vector*; puede representarse geométricamente por una flecha desde el centro al punto $X(t)$. Puesto que el radio vector tiene longitud constante, el teorema 14.2 nos dice que es perpendicular a su derivada y por tanto perpendicular a la recta tangente. Así pues, para una circunferencia, nuestra definición de tangencia está de acuerdo con la que se da en la Geometría plana elemental.

EJEMPLO 3. *Invariancia frente a un cambio de parámetro.* Funciones distintas pueden tener la misma gráfica. Por ejemplo, supongamos que X es una función vectorial continua definida en un intervalo I y que u es una función real derivable con u' siempre distinta de cero en un intervalo J, y tal que el recorrido de u sea I. Entonces la función Y definida en J por la ecuación

$$Y(t) = X[u(t)]$$

es una función vectorial continua que tiene la misma gráfica que X. Dos funciones X e Y así relacionadas se llaman *equivalentes*. Se dice de ellas que proporcionan representaciones paramétricas distintas de la misma curva. Asimismo se dice que la función u define un cambio de parámetro.

Los conceptos geométricos más importantes asociados a una curva son aquellos que permanecen invariantes frente a un cambio de parámetro. Por ejemplo, es fácil demostrar que la tangente es invariante. Si la derivada $X'[u(t)]$ existe, la regla de la cadena muestra que $Y'(t)$ también existe y viene dada por la fórmula

$$Y'(t) = X'[u(t)]u'(t) .$$

La derivada $u'(t)$ nunca es cero. Si $X'[u(t)]$ es no nula, $Y'(t)$ tampoco es nula, de modo que $Y'(t)$ es paralelo a $X'[u(t)]$. Por consiguiente ambas representaciones X e Y nos conducen a la misma tangente en cada punto de la curva.

EJEMPLO 4. *Propiedades de reflexión en las cónicas.* Las cónicas tienen propiedades de reflexión usadas con frecuencia en el diseño de instrumentos ópti-

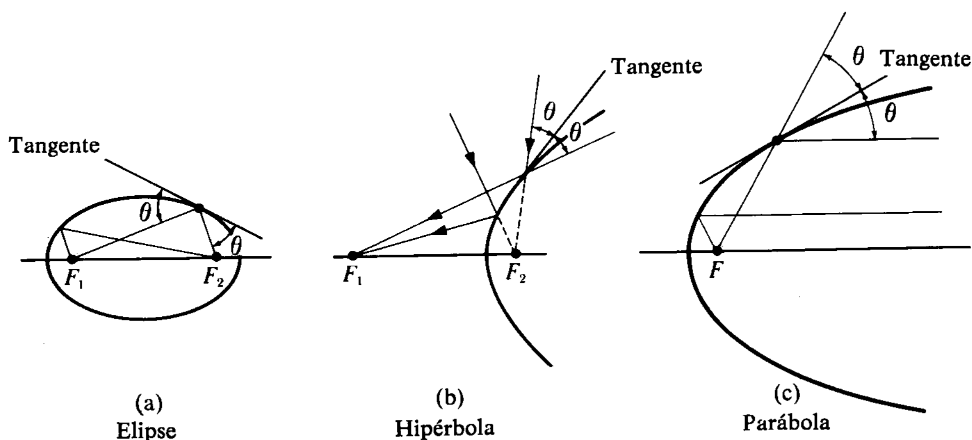


FIGURA 14.3 *Propiedades de reflexión de las cónicas.*

cos y acústicos. Los rayos luminosos que parten de uno de los focos de un reflector elíptico convergerán en el otro foco, como muestra la figura 14.3 a). Los rayos luminosos dirigidos hacia uno de los focos de un reflector hiperbólico convergerán en el otro foco, como vemos en la figura 14.3 b). En un reflector parabólico, los rayos luminosos paralelos al eje convergen en el foco, como vemos en la figura 14.3 c). Para establecer esas propiedades de reflexión, necesitamos demostrar que en cada figura los ángulos θ son iguales. Conseguiremos esto para la elipse y para la hipérbola y dejamos al lector la demostración para la parábola.

Coloquemos un foco F_1 en el origen y sean $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ dos vectores unitarios con la misma dirección que X y $X - F_2$, respectivamente, siendo X un punto arbitrario de la cónica. (Ver figura 14.4.) Si $d_1 = \|X\|$ y $d_2 = \|X - F_2\|$, son las distancias focales entre X v los focos F_1 y F_2, respectivamente, tenemos

$$X = d_1\boldsymbol{u}_1 \qquad \text{y} \qquad X = d_2\boldsymbol{u}_2 + F_2 .$$

Consideremos ahora $X, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, d_1$, y d_2 como funciones definidas en un cierto intervalo de números reales. Sus derivadas están relacionadas por las ecuaciones

$$X' = d_1\boldsymbol{u}_1' + d_1'\boldsymbol{u}_1, \qquad X' = d_2\boldsymbol{u}_2' + d_2'\boldsymbol{u}_2 . \tag{14.5}$$

Puesto que $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ tienen longitud constante, cada uno es perpendicular a su derivada, así que las ecuaciones (14.5) nos dan $X' \cdot \boldsymbol{u}_1 = d_1'$ y $X' \cdot \boldsymbol{u}_2 = d_2'$. Sumando y restando esas relaciones, encontramos que

$$X' \cdot (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = d_1' + d_2', \qquad X' \cdot (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = d_1' - d_2' . \tag{14.6}$$

En la elipse, $d_1 + d_2$ es constante, de modo que $d_1' + d_2' = 0$. En cada rama de la hipérbola $d_1 - d_2$ es constante, así que $d_1' - d_2' = 0$. Por consiguiente, las ecuaciones (14.6) nos dan

$$X' \cdot (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = 0 \quad \text{en la elipse}, \qquad X' \cdot (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = 0 \quad \text{en la hipérbola}.$$

Sea $T = X'/\|X'\|$ un vector unitario con la misma dirección que X'. Entonces T es tangente a la cónica, y tenemos

$$T \cdot \boldsymbol{u}_2 = -T \cdot \boldsymbol{u}_1 \quad \text{en la elipse}, \qquad T \cdot \boldsymbol{u}_2 = T \cdot \boldsymbol{u}_1 \quad \text{en la hipérbola}.$$

Si θ_1 y θ_2 son, respectivamente, los ángulos que T forma con $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$, siendo $0 \le \theta_1 \le \pi$ y $0 \le \theta_2 \le \pi$, aquellas dos últimas ecuaciones muestran que

$$\cos\theta_2 = -\cos\theta_1 \quad \text{en la elipse}, \qquad \cos\theta_2 = \cos\theta_1 \quad \text{en la hipérbola}.$$

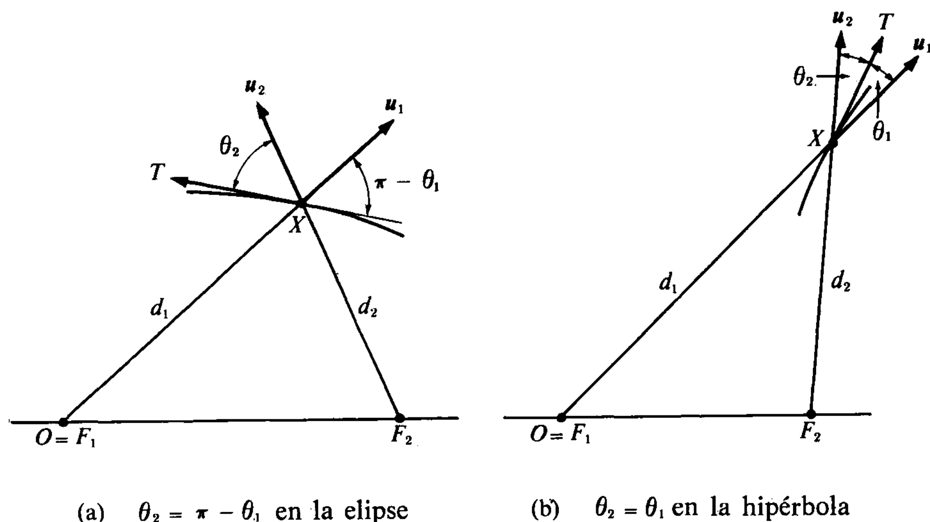


FIGURA 14.4 *Demostraciones de las propiedades de reflexión para la elipse y la hipérbola.*

Luego tenemos $\theta_2 = \pi - \theta_1$ en la elipse, y $\theta_2 = \theta_1$ en la hipérbola. Estas relaciones entre los ángulos θ_1 y θ_2 dan las propiedades de reflexión de la elipse y de la hipérbola.

14.6 Aplicaciones al movimiento curvilíneo. Vector velocidad, velocidad y aceleración

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio de 2 ó 3 dimensiones de modo que su posición en el instante t referida a un cierto sistema coordenado venga dado por un vector $X(t)$. Cuando t varía en un intervalo de tiempo, el camino recorrido por la partícula es sencillamente la gráfica de X. Así pues, la función vectorial X nos sirve como modelo matemático para describir el movimiento. A la función vectorial X la llamamos *función posición* del movimiento. Los conceptos físicos tales como vector velocidad, velocidad, y vector aceleración pueden definirse en función de las derivadas de la función de posición. En la siguiente discusión suponemos que la función posición puede derivarse cuantas veces sea preciso sin decirlo en cada ocasión.

DEFINICIÓN. *Consideremos un movimiento descrito por una función vectorial X. La derivada $X'(t)$ se llama vector velocidad en el instante t. La longitud del vector velocidad, $\|X'(t)\|$, se llama velocidad. La derivada segunda $X''(t)$ del vector posición. se llama vector aceleración.*

Notación. A veces la función posición X se representa por $\boldsymbol{r}$, el vector velocidad por $\boldsymbol{v}$, la velocidad por v y la aceleración $\boldsymbol{a}$. Así que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}'$, $v = \|\boldsymbol{v}\|$, y $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{r}''$.

Si el vector velocidad $X'(t)$ se representa por un vector geométrico ligado a la curva en $X(t)$, vemos que está situado en la recta tangente. El uso de la palabra «velocidad» para la longitud del vector velocidad se justificará en la sección 14.12 en donde se demuestra que la velocidad es el coeficiente de variación de la longitud de arco a lo largo de la curva. Esto es lo que el velocímetro de un automóvil intenta medir. Así pues, la longitud del vector velocidad nos dice la rapidez con que la partícula se mueve en cada instante, y su dirección nos indica hacia dónde va. El vector velocidad cambiará si modificamos la velocidad o la dirección del movimiento (o ambos). El vector aceleración es una medida de este cambio. La aceleración origina el efecto que uno experimenta cuando un automóvil cambia su velocidad o su dirección. A diferencia del vector velocidad, el vector aceleración no está necesariamente en la recta tangente.

EJEMPLO 1. *Movimiento rectilíneo.* Consideremos un movimiento cuyo vector posición es

$$\boldsymbol{r}(t) = P + f(t)A\,,$$

donde P y A son vectores fijos y $A \neq O$. Este movimiento se realiza a lo largo de una recta que pasa por P y paralela a A. El vector velocidad, la velocidad y el vector aceleración vienen dadas por

$$\boldsymbol{v}(t) = f'(t)A\,, \qquad v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\| = |f'(t)|\,\|A\|\,, \qquad \boldsymbol{a}(t) = f''(t)A\,.$$

Si $f'(t)$ y $f''(t)$ no son cero, el vector aceleración es paralelo al vector velocidad.

EJEMPLO 2. *Movimiento circular.* Si un punto (x, y) de V_2 está representado por sus coordenadas polares r y θ, tenemos

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Si r es fijo, por ejemplo $r = a$, y si θ puede variar en un intervalo cualquiera de amplitud por lo menos 2π, el correspondiente punto (x, y) describe una circunferencia de radio a y centro en el origen. Si consideramos θ como una función del tiempo, por ejemplo $\theta = f(t)$, tenemos un movimiento dado por la función de posición

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos f(t)\boldsymbol{i} + a\,\mathrm{sen}\,f(t)\boldsymbol{j}\,.$$

El correspondiente vector velocidad es

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = -af'(t)\operatorname{sen} f(t)\boldsymbol{i} + af'(t)\cos f(t)\boldsymbol{j},$$

del que se deduce que la velocidad en el instante t es

$$v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\| = a\,|f'(t)|.$$

El factor $|f'(t)| = |d\theta/dt|$ se llama *velocidad angular* de la partícula.

Un caso particular importante se presenta cuando $\theta = \omega t$, donde ω es una constante positiva. En este caso, la partícula parte del punto $(a, 0)$ en el instante $t = 0$ y se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj siguiendo la circunferencia con velocidad angular constante ω. Las fórmulas para el vector posición, vector velocidad y velocidad se transforman en

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{v}(t) = -\omega a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega a\cos\omega t\,\boldsymbol{j}, \qquad v(t) = a\omega.$$

El vector aceleración viene dado por

$$\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2 a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \omega^2 a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t),$$

que muestra que la aceleración tiene siempre dirección opuesta al vector posición. Cuando se representa con un vector geométrico trazado en el lugar que ocupa la partícula, el vector aceleración está dirigido hacia el centro de la circunferencia. Debido a esto, la aceleración se llama *centrípeta,* denominación propuesta por Newton.

Observación: Si una partícula en movimiento tiene masa m, la segunda ley del movimiento de Newton establece que la fuerza que actúa sobre ella (debida a su aceleración) es el vector $m\boldsymbol{a}(t)$, masa por aceleración. Si la partícula se mueve sobre una circunferencia con velocidad angular constante, ésa se llama fuerza *centrípeta* porque está dirigida hacia el centro. Esta fuerza es ejercida por el mecanismo que sujeta la partícula a una trayectoria circular. El mecanismo es una *cuerda* en el caso de una piedra girando en una honda, o la *atracción de la gravedad* en el caso de un satélite alrededor de la Tierra. La reacción igual y opuesta (debida a la tercera ley de Newton), esto es, la fuerza $-m\boldsymbol{a}(t)$, se llama fuerza *centrífuga.*

EJEMPLO 3. *Movimiento sobre una elipse.* La figura 14.5 muestra una elipse de ecuación cartesiana $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, y dos circunferencias concéntricas de radios a y b. El ángulo θ indicado en la figura se llama *anomalía excéntrica* o simplemente *ángulo excéntrico.* Está relacionado con las coordenadas (x, y) de un punto de la elipse por las ecuaciones

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\operatorname{sen}\theta.$$

Cuando θ varía en un intervalo de amplitud 2π, el correspondiente punto (x, y) describe la elipse. Si consideramos θ como función del tiempo t, por ejemplo $\theta = f(t)$, tenemos un movimiento dado por la función posición

$$\boldsymbol{r}(t) = a \cos f(t)\boldsymbol{i} + b \operatorname{sen} f(t)\boldsymbol{j}.$$

Si $\theta = \omega t$, donde ω es una constante positiva, el vector velocidad, la velocidad y el vector aceleración son

$$\boldsymbol{v}(t) = \omega(-a \operatorname{sen} \omega t\, \boldsymbol{i} + b \cos \omega t\, \boldsymbol{j}), \qquad v(t) = \omega(a^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2},$$

$$\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2(a \cos \omega t\, \boldsymbol{i} + b \operatorname{sen} \omega t\, \boldsymbol{j}) = -\omega^2 \boldsymbol{r}(t).$$

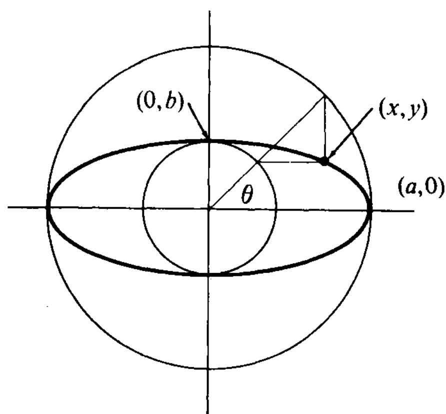


FIGURA 14.5 *Movimiento sobre una elipse.*

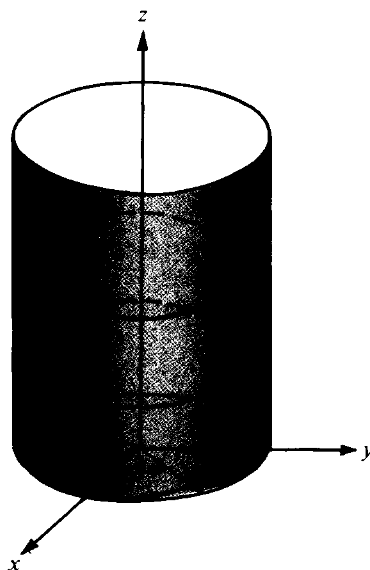


FIGURA 14.6 *Movimiento sobre una hélice.*

Así pues, cuando una partícula se mueve a lo largo de una elipse de modo que su ángulo excéntrico varíe proporcionalmente al tiempo, la aceleración es centrípeta.

EJEMPLO 4. *Movimiento sobre una hélice.* Si un punto (x, y, z) gira alrededor del eje z de manera que su componente z es proporcional al ángulo girado,

el camino resultante se llama hélice circular. En la figura 14.6 se muestra un ejemplo. Si θ representa el ángulo de rotación, tenemos

$$(14.7) \qquad x = a\cos\theta, \qquad y = a\operatorname{sen}\theta, \qquad z = b\theta,$$

donde $a > 0$, y $b \neq 0$. Cuando θ varía de 0 a 2π, las coordenadas x e y vuelven a sus valores originales en tanto que la z pasa de 0 a $2\pi b$. El número $2\pi b$ se llama con frecuencia, *paso* de la hélice.

Supongamos ahora que $\theta = \omega t$, donde ω es constante. El movimiento sobre la hélice está representado entonces por el vector posición

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j} + b\omega t\boldsymbol{k}\,.$$

Los vectores velocidad y aceleración correspondientes vienen dados por

$$\boldsymbol{v}(t) = -\omega a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega a\cos\omega t\,\boldsymbol{j} + b\omega\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{a}(t) = -\omega^2(a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j})\,.$$

Así que cuando el vector aceleración se considera situado a partir de la hélice, es paralelo al plano xy y dirigido hacia el eje z.

Si eliminamos θ entre las dos primeras ecuaciones (14.7), obtenemos la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = a^2$ que es la ecuación cartesiana de una circunferencia en el plano xy. En el espacio de 3 dimensiones, no obstante, esta ecuación representa una superficie. Un punto (x, y, z) satisface la ecuación si y sólo si su distancia al eje z es igual a a. El conjunto de todos esos puntos es un cilindro circular de radio a con su eje en el eje z. La hélice se arrolla en ese cilindro.

14.7 Ejercicios

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6, $\boldsymbol{r}(t)$ representa el vector posición en el instante t correspondiente a una partícula que se mueve sobre una curva alabeada. En cada caso, determinar los vectores velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ y aceleración $\boldsymbol{a}(t)$ en función de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; calcular también la velocidad $v(t)$.

1. $\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^3)\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\boldsymbol{k}$.
2. $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$.
3. $\boldsymbol{r}(t) = 3t\cos t\,\boldsymbol{i} + 3t\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$.
4. $\boldsymbol{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j} + 4\operatorname{sen}\frac{t}{2}\boldsymbol{k}$.
5. $\boldsymbol{r}(t) = 3t^2\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$.
6. $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + (1 - \cos t)\boldsymbol{k}$.
7. Considerar la hélice descrita por la ecuación vectorial $\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j} + b\omega t\boldsymbol{k}$, donde ω es una constante positiva. Demostrar que la recta tangente forma un ángulo constante con el eje z y que el coseno de ese ángulo es $b/\sqrt{a^2 + b^2}$.
8. Refiriéndose a la hélice del ejercicio 7, demostrar que los vectores velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$, tienen longitud constante, y que

$$\frac{\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{v}\|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}\,.$$

9. Refiriéndose al ejercicio 7, sea $u(t)$ el vector unitario $u(t) = \operatorname{sen} \omega t\, i - \cos \omega t\, j$. Demostrar que existen dos constantes A y B tales que $v \times a = Au(t) + Bk$, y expresar A y B en función de a, b, y ω
10. Demostrar que para cualquier movimiento el producto escalar de los vectores velocidad y aceleración es igual a la mitad de la derivada del cuadrado de la velocidad:

$$v(t) \cdot a(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2(t)\,.$$

11. Sea c un vector unitario fijo. Una partícula se mueve en el espacio de modo que su vector posición $r(t)$ satisface la ecuación $r(t) \cdot c = e^{2t}$ para todo t, y su vector velocidad $v(t)$ forma un ángulo constante θ con c, siendo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$.
a) Demostrar que la velocidad en el instante t es $2e^{2t}/\cos\theta$.
b) Calcular el producto escalar $a(t) \cdot v(t)$ en función de t y θ.
12. La identidad $\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1$ para las funciones hiperbólicas sugiere que la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ puede representarse por las ecuaciones paramétricas $x = a \cosh \theta$, $y = b \operatorname{senh} \theta$, o lo que es lo mismo, por la ecuación vectorial $r = a \cosh \theta\, i + b \operatorname{senh} \theta\, j$. Cuando $a = b = 1$, el parámetro θ puede ser interpretado geométricamente de manera análoga a como se interpretan θ, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ en el círculo unidad dibujado en la figura 14.7 a). La figura 14.7 b) muestra una rama de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Si el punto P tiene coordenadas $x = \cosh\theta$ e $y = \operatorname{senh}\theta$, demostrar que θ es igual al doble del área del sector OAP dibujado en la figura.

[*Indicación:* Si $A(\theta)$ representa el área del sector OAP. Demostrar que

$$A(\theta) = \tfrac{1}{2}\cosh\theta \operatorname{senh}\theta - \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2 - 1}\, dx\,.$$

Derivar para llegar a $A'(\theta) = \frac{1}{2}$.]

13. Una partícula se mueve siguiendo una hipérbola de acuerdo con la ecuación $r(t) = a \cosh \omega t\, i + b \operatorname{senh} \omega t\, j$, donde ω es una constante. Demostrar que la aceleración es centrífuga.
14. Demostrar que la tangente en un punto X de una parábola biseca el ángulo formado por la recta que une X al foco y la que pasando por X es paralela al eje. Esto da una propiedad de reflexión de la parábola. (Ver figura 14.3.)
15. Una partícula de masa 1 se mueve en un plano de acuerdo con la ecuación $r(t) = x(t)i + y(t)j$. Es atraída hacia el origen por una fuerza cuya magnitud es igual a cuatro veces su distancia al origen. En el instante $t = 0$, la posición inicial es $r(0) = 4i$ y el vector velocidad inicial es $v(0) = 6j$.
a) Determinar los componentes $x(t)$ e $y(t)$ explícitamente en función de t.
b) La trayectoria de la partícula es una cónica. Hallar su ecuación cartesiana, dibujar la cónica e indicar la dirección del movimiento sobre la curva.
16. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $x^2 + c(y - x) = 0$ de tal manera que los componentes vertical y horizontal del vector aceleración son iguales. Si invierte T unidades de tiempo en ir desde el punto $(c, 0)$ al punto $(0, 0)$, ¿cuánto tiempo invertirá en ir desde $(c, 0)$ a la mitad del camino $(c/2, c/4)$?

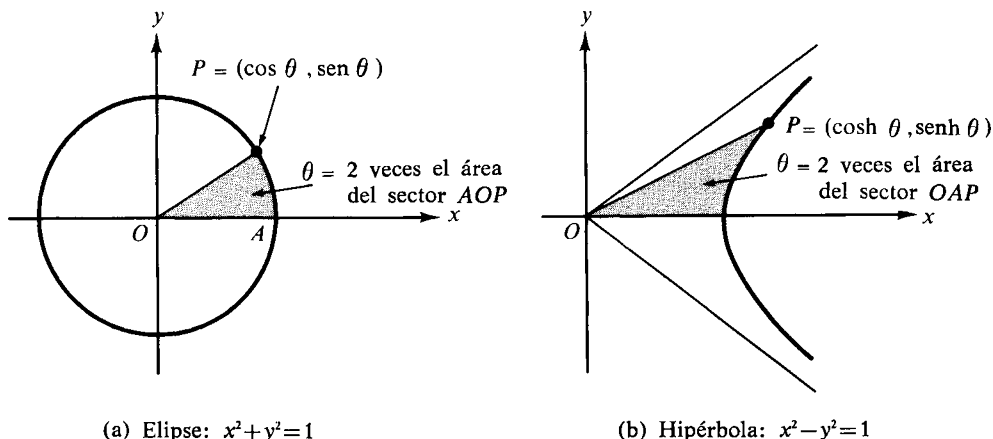


FIGURA 14.7 *Analogía entre los parámetros de una elipse y una hipérbola.*

17. Supongamos que una curva C está descrita por dos funciones equivalentes X e Y, siendo $Y(t) = X[u(t)]$. Demostrar que en cada punto de C los vectores velocidad asociados a X e Y son paralelos, pero que los correspondientes vectores aceleración no lo son.

14.8 Vector tangente unitario, normal principal y plano osculador a una curva

En el movimiento rectilíneo el vector aceleración es paralelo al vector velocidad. En el movimiento circular con velocidad angular constante, el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad. En esta sección vamos a ver que para un movimiento de tipo general el vector aceleración es la suma de dos vectores perpendiculares, uno paralelo al vector velocidad y el otro perpendicular a éste. Si el movimiento no es rectilíneo, esos dos vectores perpendiculares determinan un plano que pasa por el punto correspondiente de la curva y que llamamos plano osculador.

Para estudiar esos conceptos, introducimos el vector *unitario tangente* T. Esa es otra función vectorial asociada a la curva, y está definida por

$$T(t) = \frac{X'(t)}{\|X'(t)\|}$$

siempre que la velocidad $\|X'(t)\| \neq 0$. Obsérvese que $\|T(t)\| = 1$ para todo t.

La figura 14.8 muestra la posición del vector tangente unitario $T(t)$ para distintos valores de t. Cuando la partícula se mueve a lo largo de la curva, el correspondiente vector T, siendo de longitud constante, puede únicamente cam-

biar su dirección. La tendencia de T a cambiar su dirección puede medirse por su derivada T'. Puesto que T tiene longitud constante, el teorema 14.2 nos dice que T es perpendicular a su derivada T'.

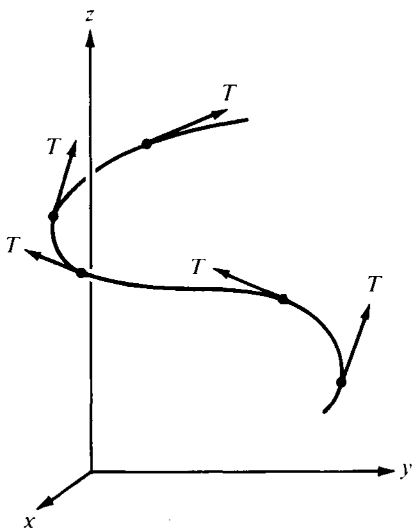


FIGURA 14.8 *El vector unitario tangente T.*

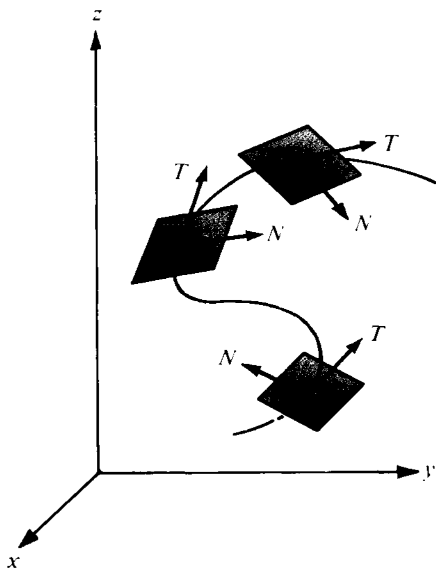


FIGURA 14.9 *El plano osculador.*

Si el movimiento es lineal, $T' = O$. Si $T' \neq O$, el vector unitario que tiene la misma dirección que T' se llama *normal principal* a la curva y se designa por N. Así pues, N es una nueva función vectorial asociada a la curva y está definida por la ecuación

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}, \quad \text{siempre que } \|T'(t)\| \neq 0.$$

Cuando los dos vectores unitarios $T(t)$ y $N(t)$ están trazados por el punto de la curva $X(t)$, determinan un plano llamado *plano osculador* de la curva. Si elegimos tres valores de t, por ejemplo t_1, t_2 y t_3, y consideramos el plano determinado por los tres puntos $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3)$, puede demostrarse que la posición del plano tiende a la del plano osculador en $X(t_1)$ cuando t_2 y t_3 tienden a t_1. Por esto, con frecuencia se dice que el plano osculador es el plano que mejor se ajusta o adapta a la curva en cada uno de sus puntos. Si la curva es plana (no una

recta), el plano osculador coincide con el plano de la curva. En general, no obstante, el plano osculador cambia al variar t. En la figura 14.9 se aprecia este hecho.

El teorema siguiente muestra que el vector aceleración es una suma de dos vectores, uno paralelo a T y el otro paralelo a T'.

TEOREMA 14.9. *Consideremos un movimiento descrito por una función vectorial* $\boldsymbol{r}$, *designemos con* $v(t)$ *la velocidad en el instante* t, $v(t) = \|\boldsymbol{r}'(t)\|$. *Entonces el vector aceleración* $\boldsymbol{a}$ *es una combinación lineal de* T *y* T' *dada por la fórmula*

$$(14.8) \qquad \boldsymbol{a}(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t)\,.$$

Si $T'(t) \neq O$, *también tenemos*

$$(14.9) \qquad \boldsymbol{a}(t) = v'(t)T(t) + v(t)\,\|T'(t)\|\,N(t)\,.$$

Demostración. La fórmula que define el vector tangente unitario nos da

$$\boldsymbol{v}(t) = v(t)T(t)\,.$$

Derivando este producto, encontramos que

$$\boldsymbol{a}(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t)\,,$$

lo que demuestra (14.8). Para demostrar (14.9), utilizamos la definición de N escribiendo $T'(t) = \|T'(t)\|\,N(t)$.

Este teorema demuestra que el vector aceleración está siempre en el plano osculador. Un ejemplo se ve en la figura 14.10. Los coeficientes de $T(t)$ y $N(t)$ en (14.9) se llaman respectivamente, *componentes tangencial y normal* de la aceleración. Un cambio en la velocidad repercute en el componente tangencial, mientras que un cambio en la dirección repercute en el componente normal.

Para una curva plana, la longitud de $T'(t)$ tiene una interpretación geométrica interesante. Ya que T es un vector unitario, podemos escribir

$$T(t) = \cos\alpha(t)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha(t)\boldsymbol{j}\,,$$

donde $\alpha(t)$ designa el ángulo formado por el vector tangente y el eje x positivo, como se ve en la figura 14.11. Derivando, encontramos

$$T'(t) = -\operatorname{sen}\alpha(t)\,\alpha'(t)\boldsymbol{i} + \cos\alpha(t)\,\alpha'(t)\boldsymbol{j} = \alpha'(t)\boldsymbol{u}(t)\,,$$

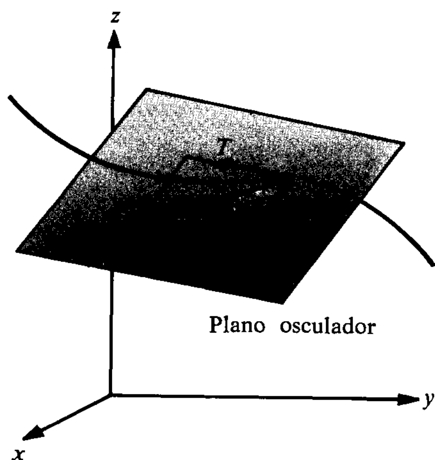


FIGURA 14.10 *El vector aceleración está contenido en el plano osculador.*

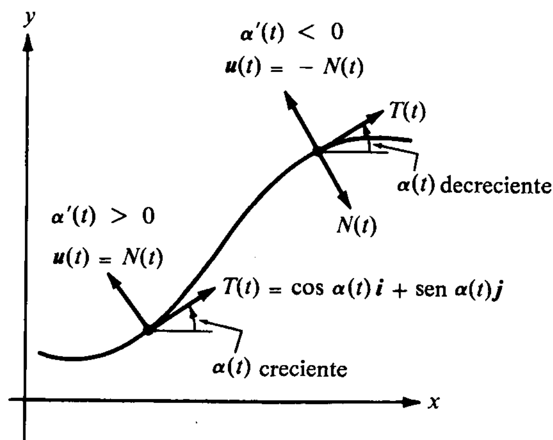


FIGURA 14.11 *Ángulo de inclinación del vector tangente a una curva plana.*

siendo $u(t)$ un vector unitario. Por consiguiente $\|T'(t)\| = |\alpha'(t)|$ y esto demuestra que $\|T'(t)\|$ es una medida del coeficiente de variación del ángulo de inclinación del vector tangente. Cuando $\alpha'(t) > 0$, el ángulo es creciente, y por tanto $u(t) = N(t)$. Cuando $\alpha'(t) < 0$, el ángulo es decreciente, en este caso, $u(t) = -N(t)$. En la figura 14.11 se representan los dos casos. Obsérvese que el ángulo de inclinación de $u(t)$ es $\alpha(t) + \frac{1}{2}\pi$ ya que

$$u(t) = -\operatorname{sen}\alpha(t)\boldsymbol{i} + \cos\alpha(t)\boldsymbol{j} = \cos\left(\alpha(t) + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\left(\alpha(t) + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}.$$

14.9 Ejercicios

Los ejercicios del 1 al 6 se refieren a los movimientos descritos en los ejercicios del 1 al 6, respectivamente, de la sección 14.7. Para el valor de t que se cita, a) expresar el vector tangente unitario T y el normal principal N en función de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; b) expresar la aceleración $\boldsymbol{a}$ como una combinación lineal de T y N.

1. $t = 2$.
2. $t = \pi$.
3. $t = 0$.
4. $t = \pi$.
5. $t = 1$.
6. $t = \frac{1}{4}\pi$
7. Demostrar que si el vector aceleración es siempre cero, el movimiento es rectilíneo.
8. Demostrar que el componente normal del vector aceleración es $\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\|/\|\boldsymbol{v}\|$.
9. Para cada una de las proposiciones siguientes referentes a la curva descrita por una partícula móvil en el espacio de 3 dimensiones, dar una demostración o poner un contraejemplo.

a) Si el vector velocidad es constante, la curva es plana.
b) Si la velocidad es constante, la curva es plana.
c) Si el vector aceleración es constante, la curva es plana.
d) Si el vector velocidad es perpendicular al vector aceleración, la curva es plana.

10. Una partícula de masa unidad con vector posición $\boldsymbol{r}(t)$ en el instante t se mueve en el espacio bajo la acción de ciertas fuerzas.
a) Demostrar que $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{O}$ implica $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$, siendo $\boldsymbol{c}$ un vector constante.
b) Si $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante, demostrar que el movimiento se realiza en un plano. Considerar $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{O}$.
c) Si la fuerza resultante que actúa sobre la partícula está siempre dirigida hacia el origen, demostrar que la partícula se mueve en un plano.
d) ¿El producto $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ es necesariamente constante si una partícula se mueve en un plano?

11. Una partícula se mueve a lo largo de una curva de tal manera que el vector velocidad forma un ángulo constante con un vector unitario dado $\boldsymbol{c}$.
a) Si la curva está en un plano que contenga $\boldsymbol{c}$, demostrar que el vector aceleración es cero o es paralelo al vector velocidad.
b) Dar un ejemplo de una tal curva (no plana) para la que el vector aceleración nunca es cero ni paralelo al vector velocidad.

12. Una partícula se mueve a lo largo de la elipse $3x^2 + y^2 = 1$ con vector de posición $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$. El movimiento es tal que el componente horizontal del vector velocidad en el instante t es $-g(t)$.
a) ¿Se mueve la partícula sobre la elipse en dirección a favor o contraria a las agujas del reloj?
b) Demostrar que el componente vertical del vector velocidad en el instante t es proporcional a $f(t)$ y hallar el factor de proporcionalidad.
c) ¿Cuánto tiempo se necesita para que la partícula recorra una vez la elipse?

13. Una curva plana C en el primer cuadrante tiene pendiente negativa en cada uno de sus puntos y pasa por el punto $(\frac{3}{2}, 1)$. El vector posición $\boldsymbol{r}$ que une el origen con un punto cualquiera (x, y) de C forma un ángulo θ con $\boldsymbol{i}$, y el vector velocidad forma un ángulo ϕ con $\boldsymbol{i}$, siendo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, y $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$. Si $3 \tan \phi = 4 \cot \theta$ en cada punto de C, hallar la ecuación cartesiana de C y dibujar la curva.

14. Una recta perpendicular a la recta tangente a una curva plana se llama recta normal. Si en cada punto de una cierta curva plana C se trazan la normal y una recta vertical, esas dos rectas interceptan sobre el eje x un segmento de longitud 2. Hallar la ecuación cartesiana de esa curva si pasa por el punto $(1, 2)$. Son posibles dos soluciones.

15. Dados dos vectores fijos no nulos A y B que forman un ángulo θ, siendo $0 < \theta < \pi$. Un movimiento con vector de posición $\boldsymbol{r}(t)$ en el instante t, satisface la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{r}'(t) = A \times \boldsymbol{r}(t)$$

y la condición inicial $\boldsymbol{r}(0) = B$.
a) Demostrar que el vector aceleración $\boldsymbol{a}(t)$ es ortogonal a A.
b) Demostrar que la velocidad es constante y calcularla en función de A, B y θ.
c) Dibujar la curva, mostrando su relación con los vectores A y B.

16. Este ejercicio describe cómo el vector unitario tangente y la normal principal quedan afectados por un cambio de parámetro. Supongamos que una curva C está descrita por dos funciones equivalentes X e Y, siendo $Y(t) = X[u(t)]$. Designemos la tangente unitaria correspondiente a X con el símbolo T_X y la correspondiente a Y por T_Y.
a) Demostrar que en cada punto de C tenemos $T_Y(t) = T_X[u(t)]$ si u es estrictamente creciente, pero si u es estrictamente decreciente entonces $T_Y(t) = -T_X[u(t)]$. En el

primer caso, se dice que u *conserva la orientación;* en el segundo caso, u *invierte la orientación.*
b) Probar que los correspondientes vectores normales principales N_X y N_Y satisfacen $N_Y(t) = N_X[u(t)]$ en cada punto de C. Deducir que el plano osculador es invariante frente a un cambio de parámetro.

14.10 Definición de longitud de un arco

En diversas partes del Cálculo y de la Geometría analítica se hace referencia a la longitud de un arco de curva. Antes de poder estudiar las propiedades de la longitud de una curva es preciso dar una *definición* de longitud de un arco. El propósito de este apartado es formular esta definición. Esta llevará de manera natural a la construcción de una función (llamada función longitud de arco) que mida la longitud de la trayectoria descrita por una partícula móvil en cada instante de su movimiento. Algunas de las propiedades fundamentales de esta función se estudian en la sección 14.12. En particular, se probará que para la mayor parte de las curvas que se presentan en la práctica esta función se puede expresar como la integral de la velocidad.

Para llegar a una definición de lo que se entiende por longitud de una curva, se procede como si se hubiera de medir esta longitud con una regla graduada. En primer lugar se señalan en la curva unos cuantos puntos que se toman como vértices de un polígono inscrito (en la fig. 14.12 se da un ejemplo), luego se mide la longitud total de esta poligonal con la regla graduada y se considera ésta como una aproximación de la longitud de la curva. Se observa que algunos polígonos «aproximan» la curva mejor que otros. En particular, si se empieza por un polígono P_1 y se construye un nuevo polígono inscrito P_2 añadiendo nuevos vértices a los de P_1 es natural que la longitud de P_2 sea mayor que la de P_1, tal como se ve en la figura 14.13. De la misma manera se pueden ir formando tantos polígonos como se quiera con longitudes cada vez mayores.

Por otra parte, intuitivamente se observa que la longitud de cada polígono inscrito no debe exceder a la de la curva (puesto que el segmento de recta es la trayectoria más corta entre dos puntos). Es decir, el número que se toma por definición como longitud de una curva, ha de ser una *cota superior* de las longitudes de todos los polígonos inscritos. Por tanto, parece natural definir la longitud de una curva como el *extremo superior* de las longitudes de todos los posibles polígonos inscritos.

En la mayor parte de curvas que se presentan en la práctica, esta definición es útil y basta para asignar una longitud a la curva. Sin embargo, es sorprendente que existan ciertos casos patológicos en los que esta definición no es aplicable. Hay curvas para las cuales no hay extremo superior de las longitudes de los polígonos inscritos. (En el ejercicio 22 de la sección 14.13 se da un ejemplo). Por tanto, se hace preciso clasificar las curvas en dos categorías, las que tienen

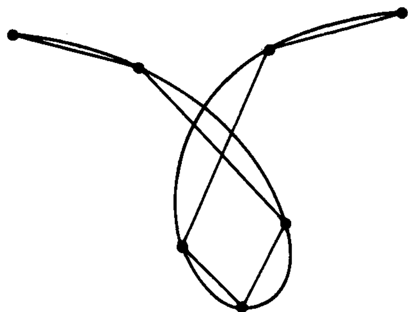


FIGURA 14.12 *Curva con una poligonal inscrita.*

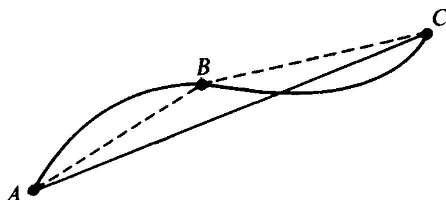


FIGURA 14.13 *La poligonal ABC tiene mayor longitud que la poligonal AC.*

una longitud y las que no la tienen. Las primeras se denominan *curvas rectificables* y las otras *no rectificables.*

Para formular estas ideas en términos analíticos, empezamos con una curva en el espacio de 3 ó 2 dimensiones descrita por una función vectorial $\boldsymbol{r}$, y consideremos la porción de la curva descrita por $\boldsymbol{r}(t)$ al variar t en un intervalo $[a, b]$. Al principio, suponemos tan sólo que $\boldsymbol{r}$ es continua en el intervalo paramétrico. Después añadiremos otras restricciones.

Consideremos ahora una partición P del intervalo $[a, b]$,

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, \qquad \text{donde} \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\,.$$

Designemos con $\pi(P)$ la poligonal cuyos vértices son los puntos $\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{r}(t_1), \ldots,$ $\boldsymbol{r}(t_n)$, respectivamente. (En la figura 14.14 se muestra un ejemplo con $n = 6$.) Los lados de esa poligonal tienen longitudes

$$\|\boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0)\|,\ \|\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)\|, \ldots, \|\boldsymbol{r}(t_n) - \boldsymbol{r}(t_{n-1})\|\,.$$

Por consiguiente, la longitud de la poligonal $\pi(P)$, que designamos con $\pi(P)$, es la suma

$$|\pi(P)| = \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{r}(t_k) - \boldsymbol{r}(t_{k-1})\|\,.$$

DEFINICIÓN. *Si existe un número positivo M tal que*

(14.10) $$|\pi(P)| \leq M$$

para todas las particiones de $[a, b]$, se dice que la curva es rectificable y la longitud del arco, indicada por $\Lambda(a, b)$, se define como el extremo superior de todos los números $|\pi(P)|$. Si no existe un M, la curva se denomina no rectificable.

Obsérvese que si existe un M que satisfaga (14.10) para cada partición P se tiene:

(14.11) $$|\pi(P)| \leq \Lambda(a, b) \leq M\,,$$

puesto que el extremo superior no puede exceder a ninguna cota superior.

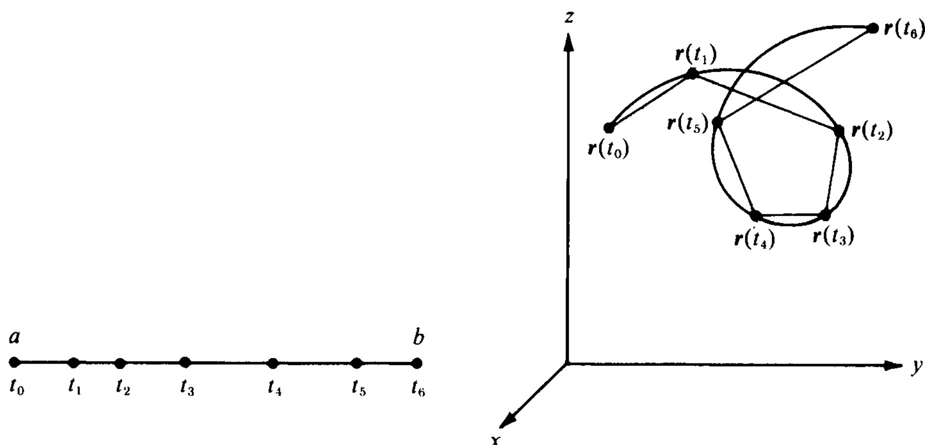


FIGURA 14.14 *Partición de $[a, b]$ en seis subintervalos y la poligonal inscrita correspondiente.*

Es fácil probar que una curva es rectificable siempre que su vector velocidad $\boldsymbol{v}$ sea continuo en el intervalo paramétrico $[a, b]$. En efecto, el teorema siguiente indica que en este caso se puede tomar la integral de la velocidad como una cota superior de todos los números $|\pi(P)|$.

TEOREMA 14.10. *Sea $\boldsymbol{v}(t)$ el vector velocidad de la curva con vector posición $\boldsymbol{r}(t)$ y sea $v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\|$ la velocidad. Si $\boldsymbol{v}$ es continua en $[a, b]$, la curva es rectificable y su longitud $\Lambda(a, b)$ satisface la desigualdad*

(14.12) $$\Lambda(a, b) \leq \int_a^b v(t)\,dt\,.$$

Demostración. Para cada partición P de $[a, b]$, tenemos

$$|\pi(P)| = \sum_{k=1}^{n} \|r(t_k) - r(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} r'(t)\, dt \right\|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} v(t)\, dt \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|v(t)\|\, dt = \int_a^b v(t)\, dt,$$

siendo la desigualdad una consecuencia del teorema 14.8. Esto prueba que

$$|\pi(P)| \leq \int_a^b v(t)\, dt$$

para todas las particiones P, y por tanto el número $\int_a^b v(t)\, dt$ es una cota superior del conjunto de todos los números $|\pi(P)|$. Esto demuestra que la curva es rectificable y al mismo tiempo se ve que la longitud $\Lambda(a, b)$ no puede exceder a la integral de la velocidad.

Más adelante se demostrará que la desigualdad (14.12) es, en efecto, una *igualdad*. Para ello se tendrá que hacer uso de la *aditividad* de la longitud de un arco, propiedad que se estudiará en el próximo apartado.

14.11 Aditividad de la longitud de arco

Si una curva rectificable se corta en dos trozos, la longitud de toda la curva es la suma de las longitudes de las dos partes. Esta es otra de estas propiedades «intuitivamente inmediatas» y cuya demostración no es trivial. Esta propiedad se denomina *aditividad de la longitud del arco* y se puede expresar analíticamente como sigue:

TEOREMA 14.11. *Consideremos una curva rectificable de longitud $\Lambda(a, b)$, descrita por un vector $r(t)$ cuando t varía en un intervalo $[a, b]$. Si $a < c < b$, sean C_1 y C_2 las curvas descritas por $r(t)$ cuando t varía en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente. Entonces C_1 y C_2 también son rectificables y, si $\Lambda(a, c)$ y $\Lambda(c, b)$ representan sus respectivas longitudes, tenemos*

$$\Lambda(a, b) = \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b).$$

Demostración. Sean P_1 y P_2 particiones arbitrarias de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Los puntos de P_1 y los de P_2 conjuntamente forman una nueva partición P de $[a, b]$ para la cual se tiene:

$$|\pi(P_1)| + |\pi(P_2)| = |\pi(P)| \leq \Lambda(a, b). \tag{14.13}$$

lo que pueba que $|\pi(P_1)|$ y $|\pi(P_2)|$ están acotadas por $\Lambda(a, b)$ y por tanto C_1 y C_2 son rectificables. De (14.13) se deduce también:

$$|\pi(P_1)| \leq \Lambda(a, b) - |\pi(P_2)|$$

Si se considera ahora P_2 fijo y P_1 variable en el conjunto de todas las particiones de $[a, c]$, puesto que el número $\Lambda(a, b) - |\pi(P_2)|$ es una cota superior de todos los números $|\pi(P_1)|$ no puede ser menor que su extremo superior que es $\Lambda(a, c)$. Por tanto se tiene $\Lambda(a, c) \leq \Lambda(a, b) - |\pi(P_2)|$, o lo que es lo mismo:

$$|\pi(P_2)| \leq \Lambda(a, b) - \Lambda(a, c).$$

Esto prueba que $\Lambda(a, b) - \Lambda(a, c)$ es un extremo superior de todas las sumas $|\pi(P_2)|$, y puesto que no puede ser menor que su extremo superior $\Lambda(c, b)$ se tiene $\Lambda(c, b) \leq \Lambda(a, b) - \Lambda(a, c)$, o sea:

$$\Lambda(a, c) + \Lambda(c, b) \leq \Lambda(a, b). \tag{14.14}$$

Para demostrar la igualdad basta probar la desigualdad contraria. Para ello se empieza por una partición cualquiera P de $[a, b]$. Si se adjunta el punto c a P se obtiene una partición P_1 de $[a, c]$ y una partición P_2 de $[c, b]$ de manera que:

$$|\pi(P)| \leq |\pi(P_1)| + |\pi(P_2)| \leq \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b).$$

Esto prueba que $\Lambda(a, c) + \Lambda(c, b)$ es un extremo superior de todos los números $|\pi(P)|$, y puesto que éste no puede ser menor que el extremo superior, ha de ser:

$$\Lambda(a, b) \leq \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b).$$

Esta desigualdad, junto con (14.14), implica la propiedad aditiva.

14.12 Función longitud de arco

Supongamos que una curva es el camino descrito por un vector posición $r(t)$. Una pregunta natural es esta: ¿Cuánto habrá avanzado la partícula móvil a lo largo de la curva en el instante t? Para discutir esta cuestión, introducimos *la función longitud de arco s*, definida como sigue:

$$s(t) = \Lambda(a, t) \quad \text{si} \quad t > a, \qquad s(a) = 0.$$

La igualdad $s(a) = 0$ significa tan sólo que estamos suponiendo que el movimiento comienza cuando $t = a$.

El teorema de la aditividad nos permite deducir algunas propiedades importantes de s. Por ejemplo, tenemos el siguiente

TEOREMA 14.12. *Para toda curva rectificable, la función longitud de arco s es monótona creciente en $[a, b]$. Esto es, tenemos*

$$s(t_1) \leq s(t_2) \quad \text{si} \quad a \leq t_1 < t_2 \leq b. \tag{14.15}$$

Demostración. Si $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, se tiene:

$$s(t_2) - s(t_1) = \Lambda(a, t_2) - \Lambda(a, t_1) = \Lambda(t_1, t_2),$$

donde la última igualdad es consecuencia de la aditividad. Puesto que $\Lambda(t_1, t_2) \geq 0$, queda demostrado (14.15).

A continuación se demostrará que la función s tiene una derivada en cada punto interior del intervalo paramétrico y que esta derivada es igual a la velocidad de la partícula.

TEOREMA 14.13. *Sean s la función longitud de arco asociada a una curva y $v(t)$ la velocidad en el tiempo t. Si v es continua en $[a, b]$, entonces la derivada $s'(t)$ existe para cada t de $[a, b]$ y viene dada por la fórmula*

$$s'(t) = v(t). \tag{14.16}$$

Demostración. Definamos $f(t) = \int_a^t v(u)\, du$. Sabemos que $f'(t) = v(t)$ en virtud del primer teorema fundamental del Cálculo. Demostraremos que $s'(t) = v(t)$. A tal fin formamos el cociente de diferencias

$$\left\| \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h} \right\|. \tag{14.17}$$

Supongamos primero que $h > 0$. El segmento de recta que une los puntos $\boldsymbol{r}(t)$ y $\boldsymbol{r}(t + h)$ puede considerarse como una poligonal que aproxima el arco que une esos dos puntos. Por consiguiente, en virtud de (14.11), tenemos

$$\|\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)\| \leq \Lambda(t, t+h) = s(t+h) - s(t).$$

Aplicando este resultado en (14.17) junto con la desigualdad (14.12) del teorema 14.10 obtenemos

$$\left\| \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(u)\, du = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Un razonamiento análogo prueba que estas desigualdades también son válidas para $h < 0$. Si hacemos $h \to 0$, el cociente de diferencias de la izquierda tiende a $\|r'(t)\| = v(t)$ y el de la derecha tiende a $f'(t) = v(t)$. Resulta de esto que el cociente $[s(t+h) - s(t)]/h$ también tiende a $v(t)$. Pero esto significa que $s'(t)$ existe y es igual a $v(t)$, como se quería demostrar.

El teorema 14.13 está de acuerdo con nuestra noción intuitiva de velocidad como la distancia recorrida por unidad de tiempo durante el movimiento.

Utilizando (14.16) junto con el segundo teorema fundamental del Cálculo, podemos calcular la longitud del arco integrando la velocidad. Así pues, el camino recorrido por una partícula durante un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt .$$

En particular, cuando $t_1 = a$ y $t_2 = b$, obtenemos por la longitud del arco la siguiente integral:

$$\Lambda(a, b) = \int_a^b v(t)\, dt .$$

EJEMPLO 1. *Longitud de un arco de circunferencia.* Para calcular la longitud de un arco de circunferencia de radio a, podemos imaginar una partícula móvil a lo largo de la circunferencia de acuerdo con la ecuación $r(t) = a \cos t\, i + a \operatorname{sen} t\, j$. El vector velocidad es $v(t) = -a \operatorname{sen} t\, i + a \cos t\, j$ y la velocidad es $v(t) = a$. Integrando la velocidad en un intervalo de longitud θ, encontramos que la longitud del arco descrito es $a\theta$. Dicho de otro modo, la longitud de un arco de circunferencia es proporcional al ángulo correspondiente; la constante de proporcionalidad es el radio de la circunferencia. Para una circunferencia unidad tenemos $a = 1$, y la longitud del arco es exactamente igual al ángulo medido.

EJEMPLO 2. *Longitud de la gráfica de una función real.* La gráfica de una función real f definida en un intervalo $[a, b]$ puede considerarse como una curva con vector posición $r(t)$ dado por

$$r(t) = ti + f(t)j .$$

El vector velocidad correspondiente es $v(t) = i + f'(t)j$, y la velocidad es

$$v(t) = \|v(t)\| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2} .$$

Por consiguiente, la longitud de la gráfica de f en un intervalo $[a, x]$ viene dada por la integral

$$(14.18) \qquad s(x) = \int_a^x v(t)\,dt = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt\,.$$

14.13 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 9, hallar la longitud del camino descrito por una partícula móvil sobre una curva de acuerdo con la ecuación dada, durante el intervalo de tiempo que en cada caso se especifica.

1. $\boldsymbol{r}(t) = a(1 - \cos t)\boldsymbol{i} + a(t - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0.$
2. $\boldsymbol{r}(t) = e^t \cos t\,\boldsymbol{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2.$
3. $\boldsymbol{r}(t) = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + a(\operatorname{sen} t - t \cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0.$
4. $\boldsymbol{r}(t) = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t\,\boldsymbol{i} + \dfrac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t\,\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad 0 < b < a.$
5. $\boldsymbol{r}(t) = a(\operatorname{senh} t - t)\boldsymbol{i} + a(\cosh t - 1)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le T, \quad a > 0.$
6. $\boldsymbol{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + (1 - \cos t)\boldsymbol{k} \quad (0 \le t \le 2\pi).$
7. $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + 6t^3\boldsymbol{k} \quad (0 \le t \le 2).$
8. $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + \log(\sec t)\boldsymbol{j} + \log(\sec t + \tan t)\boldsymbol{k} \quad (0 \le t \le \frac{1}{4}\pi).$
9. $\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + a \operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j} + b\omega\boldsymbol{k} \quad (t_0 \le t \le t_1).$
10. Hallar una integral parecida a la de (14.18) para la longitud de la gráfica de una ecuación de la forma $x = g(y)$, teniendo g derivada continua en un intervalo $[c, d]$.
11. La ecuación de una curva es $y^2 = x^3$. Hallar la longitud del arco que une $(1, -1)$ a $(1, 1)$.
12. Dos puntos A y B de un círculo unidad de centro O determinan en él un sector circular AOB. Probar que la longitud del arco AB es igual a dos veces el área del sector.
13. Establecer integrales para las longitudes de las curvas cuyas ecuaciones son a) $y = e^x$, $0 \le x \le 1$; b) $x = t + \log t$, $y = t - \log t$, $1 \le t \le e$. Probar que la segunda longitud es el producto de la primera por $\sqrt{2}$.
14. a) Establecer la integral que da la longitud de la curva $y = c\cosh(x/c)$ desde $x = 0$ a $x = a$ $(a > 0 \ c > 0)$.
    b) Probar que el producto de la longitud de esta curva por c es igual al área de la región limitada por $y = c\cosh(x/c)$, el eje x, el eje y y la recta $x = a$.
    c) Calcular esta integral y hallar la longitud de la curva cuando $a = 2$.
15. Demostrar que la longitud de la curva $y = \cosh x$ que une los puntos $(0, 1)$ y $(x, \cosh x)$ es $\operatorname{senh} x$ si $x > 0$.
16. Una función no negativa f tiene la propiedad de que su conjunto de ordenadas en un intervalo cualquiera tiene un área proporcional a la longitud del arco de la gráfica correspondiente al intervalo. Hallar f.
17. Utilizando la ecuación vectorial $\boldsymbol{r}(t) = a\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + b\cos t\,\boldsymbol{j}$ donde $0 < b < a$, probar que la longitud L de una elipse está dada por la integral

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt\,,$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. El número e es la excentricidad de la elipse. Éste es un caso particular de una integral de la forma:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt\,,$$

llamada *integral elíptica de segunda clase,* donde $0 \leq k < 1$. Los números $E(k)$ están tabulados para varios valores de k.

18. Si $0 < b < 4a$, sea $\boldsymbol{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\boldsymbol{j} + b \operatorname{sen} \frac{1}{2}t\, \boldsymbol{k}$. Probar que la longitud de la trayectoria descrita desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$ es $8aE(k)$, donde $E(k)$ tiene el significado dado en el ejercicio 17 y $k^2 = 1 - (b/4a)^2$.
19. Una partícula se mueve con vector posición

$$\boldsymbol{r}(t) = tA + t^2B + 2(\tfrac{2}{3}t)^{3/2} A \times B\,,$$

donde A y B son dos vectores unitarios fijos que forman un ángulo de $\pi/3$ radianes. Calcular la velocidad de la partícula en el instante t y hallar cuanto tiempo invierte para desplazarse una distancia de 12 unidades de longitud de arco desde la posición inicial $\boldsymbol{r}(0)$.
20. a) Cuando un círculo rueda (sin deslizamiento) a lo largo de un recta, un punto de la circunferencia describe una curva llamada *cicloide.* Si la recta fija es el eje x y si el punto móvil (x, y) está inicialmente en el origen, demostrar que cuando el círculo gira un ángulo θ tenemos

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)\,, \qquad y = a(1 - \cos \theta)\,,$$

donde a es el radio del círculo. Esas son las ecuaciones paramétricas de la cicloide.
b) Refiriéndose a la parte a), demostrar que $dy/dx = \cot \frac{1}{2}\theta$ y deducir que la recta tangente a la cicloide en (x, y) forma un ángulo $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$ con el eje x. Hacer un gráfico y mostrar que la recta tangente pasa por el punto más alto de la circunferencia.
21. Sea C una curva descrita por dos funciones equivalentes X e Y, donde $Y(t) = X\,[u(t)]$ para $c \leq t \leq d$. Si la función u que define el cambio de parámetro tiene derivada continua en $[c, d]$ demostrar que

$$\int_{u(c)}^{u(d)} \|X'(u)\|\, du = \int_c^d \|Y'(t)\|\, dt\,,$$

y deducir que la longitud de arco de C es invariante frente a un tal cambio de parámetro.
22. Consideremos la curva plana cuya ecuación vectorial es $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}$, donde

$$f(t) = t \cos\left(\frac{\pi}{2t}\right) \quad \text{y} \quad t \neq 0\,, \qquad f(0) = 0\,.$$

Consideremos la siguiente partición del intervalo $[0, 1]$:

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Demostrar que la correspondiente poligonal inscrita $\pi(P)$ tiene longitud

$$|\pi(P)| > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

y deducir que esa curva no es rectificable.

14.14 Curvatura de una curva

En una recta, el vector unitario tangente T no cambia su dirección y por tanto $T' = O$. Si la curva no es una línea recta, la derivada T' mide la tendencia de la tangente a cambiar su dirección. El coeficiente de variación o derivada de la tangente unitaria *respecto a la longitud del arco* se denomina vector *curvatura* de la curva. Se designa por dT/ds, donde s representa la longitud del arco. La regla de la cadena y la fórmula $s'(t) = v(t)$ permiten relacionar el vector curvatura dT/ds con la derivada T' respecto al tiempo mediante la ecuación

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{s'(t)}\, T'(t) = \frac{1}{v(t)}\, T'(t).$$

Puesto que $T'(t) = \|T'(t)\|\, N(t)$, obtenemos

(14.19)
$$\frac{dT}{ds} = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}\, N(t),$$

que dice que el vector curvatura tiene la misma dirección que la normal principal $N(t)$. El factor escalar que multiplica a $N(t)$ en (14.19) es un número no negativo llamado *curvatura* de la curva en t y se designa por $\kappa(t)$ (κ es la letra griega kappa). Así, la curvatura $\kappa(t)$ definida como la *longitud del vector curvatura* está dada por la fórmula siguiente:

(14.20)
$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}.$$

EJEMPLO 1. *Curvatura de una circunferencia.* Para un círculo de radio a, dado por la ecuación $\boldsymbol{r}(t) = a \cos t\,\boldsymbol{i} + b \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j}$, tenemos $\boldsymbol{v}(t) = -a \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + a \cos t\,\boldsymbol{j}$, $v(t) = a$, $T(t) = -\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j}$, y $T'(t) = -\cos t\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j}$. Luego tenemos $\|T'(t)\| = 1$ así que $\kappa(t) = 1/a$. Esto prueba que una circunferencia tiene curvatura constante. El recíproco de la curvatura es el radio de la circunferencia.

Cuando $\kappa(t) \neq 0$ su inverso se denomina *radio de curvatura* y se designa por $\rho(t)$ (ρ es la letra griega ro). La circunferencia en el plano osculador de radio $\rho(t)$ y centro situado sobre la normal y hacia el extremo del vector curvatura se llama *círculo osculador.* Se puede demostrar que el círculo osculador es la posición límite de las circunferencias que pasan por tres puntos próximos de la curva cuando dos de los puntos se aproximan al tercero. Debido a esta propiedad se dice que el círculo osculador es el círculo que «mejor se ajusta a la curva» en cada uno de sus puntos.

EJEMPLO 2. *Curvatura de una curva plana.* En una curva plana se ha visto que $\|T'(t)\| = |\alpha'(t)|$, donde $\alpha(t)$ es el ángulo de inclinación del vector tangente, señalado en la figura 14.11. Puesto que $\alpha'(t) = d\alpha/dt = (d\alpha/ds)(ds/dt) = v(t)d\alpha/ds$, la ecuación (14.20) implica:

$$\kappa(t) = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Dicho de otra forma, la curvatura de una curva plana es el valor absoluto de la derivada de α respecto a la longitud del arco. Mide el cambio de dirección respecto del camino recorrido a lo largo de la curva.

EJEMPLO 3. *Curvas planas de curvatura constante.* Si $d\alpha/ds$ es una constante no nula: $d\alpha/ds = a$, entonces $\alpha = as + b$ donde b es una constante, y por tanto $T = \cos(as + b)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}(as + b)\boldsymbol{j}$. Integrando se tiene: $\boldsymbol{r} = (1/a)\operatorname{sen}(as + b)\boldsymbol{i} - (1/a)\cos(as + b)\boldsymbol{j} + A$, donde A es un vector constante. De aquí resulta $\|\boldsymbol{r} - A\| = 1/|a|$, es decir, la curva es una circunferencia (o un arco de circunferencia) de centro en el extremo de A y radio $1/|a|$. Esto demuestra que una curva de curvatura constante $\kappa \neq 0$ es una circunferencia (o arco de circunferencia) de radio $1/\kappa$.

Vamos ahora a demostrar un teorema que relaciona la curvatura, la velocidad y la aceleración.

TEOREMA 14.14. *Para un movimiento cualquiera con vector velocidad $\boldsymbol{v}(t)$, velocidad $v(t)$, vector aceleración $\boldsymbol{a}(t)$, y curvatura $\kappa(t)$, tenemos*

$$\boldsymbol{a}(t) = v'(t)T(t) + \kappa(t)v^2(t)N(t). \tag{14.21}$$

Esta fórmula, a su vez, implica

$$\kappa(t) = \frac{\|\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{v}(t)\|}{v^3(t)}. \tag{14.22}$$

Demostración. Para demostrar (14.21), ponemos (14.20) en la forma $\|T'(t)\| = \kappa(t)v(t)$, que nos da $T'(t) = \kappa(t)v(t)N(t)$. Sustituyendo esta expresión de $T'(t)$ en la ecuación (14.8), obtenemos (14.21).

Para demostrar (14.22), formemos el producto vectorial $\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{v}(t)$, utilizando (14.21) para $\boldsymbol{a}(t)$ y la fórmula $\boldsymbol{v}(t) = v(t)T(t)$ para el vector velocidad. Esto nos da

$$(14.23) \qquad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = v'vT \times T + \kappa v^3 N \times T = \kappa v^3 N \times T$$

ya que $T \times T = O$. Si consideramos la longitud de cada miembro de (14.23) y observamos que

$$\|N \times T\| = \|N\| \, \|T\| \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi = 1 \, ,$$

obtenemos $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}\| = \kappa v^3$, lo que prueba (14.22).

En la práctica resulta más sencillo calcular los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}$ (derivando el vector posición $\boldsymbol{r}$); por tanto la ecuación (14.22) nos proporciona un método útil para calcular la curvatura. Este método es ordinariamente más sencillo que determinar la curvatura a partir de su definición.

Si se trata de una línea recta se tiene $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = O$ y por tanto la curvatura es constantemente cero. Una curva con curvatura pequeña en un punto tiene en este punto radio de curvatura grande y en la proximidad de este punto difiere poco de una línea recta. Por tanto, la curvatura es la medida de la tendencia de una curva a desviarse de la línea recta.

14.15 Ejercicios

1. Considérense las curvas descritas en los ejercicios del 1 al 6 de la sección 14.9 y en cada caso determinar la curvatura $\kappa(t)$ para el valor indicado de t.
2. Una hélice está descrita por la función de posición $\boldsymbol{r}(t) = a \cos \omega t\, \boldsymbol{i} + a \operatorname{sen} \omega t\, \boldsymbol{j} + b\omega t \boldsymbol{k}$. Demostrar que tiene curvatura constante $\kappa = a/(a^2 + b^2)$.
3. Dos vectores unitarios fijos A y B forman un ángulo θ, siendo $0 < \theta < \pi$. Una partícula se mueve sobre una curva alabeada de manera que su vector de posición $\boldsymbol{r}(t)$ y el vector velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ están relacionados por la ecuación $\boldsymbol{v}(t) = A \times \boldsymbol{r}(t)$. Si $\boldsymbol{r}(0) = B$, demostrar que la curva tiene curvatura constante y calcularla en función de θ.
4. Un punto se mueve en el espacio según la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = 4 \cos t\, \boldsymbol{i} + 4 \operatorname{sen} t\, \boldsymbol{j} + 4 \cos t\, \boldsymbol{k} \, .$$

a) Probar que la trayectoria es una elipse y hallar la ecuación del plano que contiene dicha elipse.
b) Probar que el radio de curvatura es $\rho(t) = 2\sqrt{2}\,(1 + \operatorname{sen}^2 t)^{3/2}$.

5. Para la curva cuya ecuación vectorial es $\boldsymbol{r}(t) = e^t\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\,t\,\boldsymbol{k}$, demostrar que la curvatura es $\kappa(t) = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$.
6. a) Para una curva plana descrita por la ecuación $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, demostrar que la curvatura viene dada por la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{3/2}} .$$

b) Si una curva plana tiene la ecuación cartesiana $y = f(x)$, demostrar que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ es

$$\frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} .$$

7. Si un punto se mueve de manera que los vectores velocidad y aceleración tienen siempre longitud constante, probar que la curvatura es constante en todos los puntos del camino. Expresar esta constante por medio de $\|\boldsymbol{a}\|$ y $\|\boldsymbol{v}\|$.
8. Si dos curvas de ecuaciones cartesianas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son tangentes en el punto (a, b) y tienen la misma curvatura en este punto probar que $|f''(a)| = |g''(a)|$.
9. Para ciertos valores de las constantes a y b, las dos curvas de ecuaciones cartesianas $y = ax(b - x)$ y $(x + 2)y = x$ se cortan solamente en un punto P, tienen una recta tangente común en P, y la misma curvatura en P.
a) Hallar todos los a y b que satisfacen todas esas condiciones.
b) Para cada elección posible de a y b que satisfagan las condiciones dadas, construir un gráfico de las dos curvas. Mostrar de qué manera se cortan en P.
10. a) Demostrar que en el vértice de una parábola el radio de curvatura alcanza su valor mínimo.
b) Dados dos vectores unitarios fijos A y B que forman un ángulo θ, siendo $0 < \theta < \pi$. La curva con vector posición $\boldsymbol{r}(t) = tA + t^2B$ es una parábola situada en el plano generado por A y B. Determinar (en función de A, B y θ) el vector posición del vértice de esa parábola. Puede utilizarse la propiedad de la parábola establecida en la parte a).
11. Una partícula se mueve a lo largo de una curva plana con velocidad constante igual a 5. Sale del origen en el instante $t = 0$ con velocidad inicial $5\boldsymbol{j}$, y nunca pasa a la izquierda del eje y. En todo momento la curvatura del camino es $\kappa(t) = 2t$. Designemos con $\alpha(t)$ el ángulo que forma el vector velocidad con el eje x positivo en el instante t.
a) Determinar explícitamente $\alpha(t)$ como función de t.
b) Determinar el vector velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ en función de $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.
12. Una partícula se mueve a lo largo de una curva plana con velocidad constante igual a 2. El movimiento empieza en el origen cuando $t = 0$ y el vector velocidad inicial $\boldsymbol{v}(0)$ es $2\boldsymbol{i}$. Se sabe que en cada instante la curvatura es $\kappa(t) = 4t$. Hallar el vector velocidad cuando $t = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ si la curva no está nunca debajo del eje x.

14.16 Los vectores velocidad y aceleración en coordenadas polares

A veces es más natural describir los puntos de una curva plana en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Puesto que las coordenadas rectangulares (x, y) están ligadas a las polares r y θ por las ecuaciones

$$x = r\cos\theta , \qquad y = r\operatorname{sen}\theta ,$$

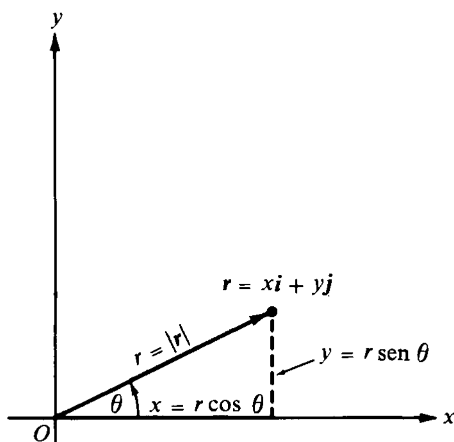


FIGURA 14.15 *Coordenadas polares.*

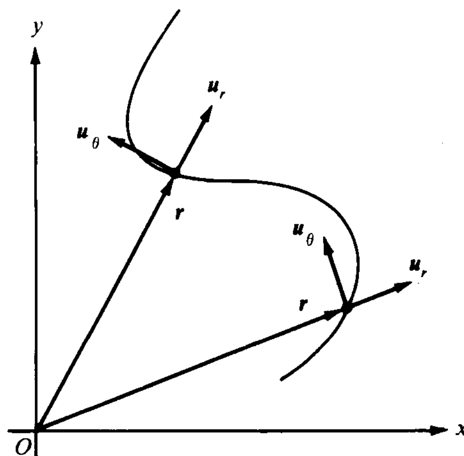


FIGURA 14.16 *Los vectores unitarios* $\boldsymbol{u}_r$ *y* $\boldsymbol{u}_\theta$.

el vector de posición $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ que une el origen con (x, y) viene dado por

$$\boldsymbol{r} = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} = r(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}),$$

siendo $r = \|\boldsymbol{r}\|$. En la figura 14.15 se aprecia esa relación.

El vector $\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}$ es un vector de longitud unidad que tiene la misma dirección que $\boldsymbol{r}$. Este vector unitario se designa corrientemente por $\boldsymbol{u}_r$ y la ecuación anterior se escribe así:

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r, \qquad \text{donde} \quad \boldsymbol{u}_r = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}.$$

Conviene también introducir un vector unitario $\boldsymbol{u}_\theta$, perpendicular a $\boldsymbol{u}_r$, que se define como sigue:

$$\boldsymbol{u}_\theta = \frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}.$$

Observese que tenemos

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r.$$

En el estudio de las curvas planas, los dos vectores unitarios $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$ desempeñan el mismo papel en coordenadas polares que los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ en coorde-

nadas rectangulares. La figura 14.16 muestra los vectores unitarios $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$ ligados a la curva, en alguno de sus puntos.

Supongamos ahora que las coordenadas polares r y θ son funciones de t, por ejemplo $r = f(t)$, $\theta = g(t)$. Deduciremos fórmulas para expresar los vectores velocidad y aceleración en función de $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$. Para el vector de posición, tenemos

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r = f(t)\boldsymbol{u}_r .$$

Puesto que θ depende del parámetro t, lo mismo le ocurre al vector unitario $\boldsymbol{u}_r$ y hay que tenerlo en cuenta cuando se calcula el vector velocidad. Así pues tenemos

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d(r\boldsymbol{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} .$$

Utilizando la regla de la cadena, podemos expresar $d\boldsymbol{u}_r/dt$ en función de $\boldsymbol{u}_\theta$ escribiendo

$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta , \tag{14.24}$$

y la ecuación para el vector velocidad se convierte en

$$\boldsymbol{v} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta . \tag{14.25}$$

Los factores escalares dr/dt y $rd\theta/dt$ que multiplican a $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$ se llaman, respectivamente, *componentes radial* y *transversal* del vector velocidad.

Puesto que $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$ son vectores unitarios ortogonales, encontramos que

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 ,$$

con lo que la velocidad v viene dada por la fórmula

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2} .$$

Derivando ambos miembros de (14.25), encontramos que el vector aceleración tiene la expresión siguiente

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt}\right) + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt}\right)$$

La derivada $d\boldsymbol{u}_r/dt$ puede expresarse en función de $\boldsymbol{u}_\theta$ por medio (14.24). Análogamente podemos expresar la derivada de $\boldsymbol{u}_\theta$ por la ecuación

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta} = -\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_r .$$

Esto nos lleva a la siguiente fórmula que expresa $\boldsymbol{a}$ en función de sus componentes radial y transversal:

(14.26)
$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\boldsymbol{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{u}_\theta .$$

Cuando $\theta = t$, la curva puede describirse mediante la ecuación polar $r = f(0)$. En este caso, las fórmulas para la velocidad, y los vectores velocidad y aceleración se simplifican considerablemente, y obtenemos

$$\boldsymbol{v} = \frac{dr}{d\theta}\boldsymbol{u}_r + r\boldsymbol{u}_\theta , \qquad v = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} , \qquad \boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} - r\right)\boldsymbol{u}_r + 2\frac{dr}{d\theta}\boldsymbol{u}_\theta .$$

14.17 Movimiento plano con aceleración radial

El vector aceleración se llama *radial* si el componente transversal en la igualdad (14.26) es siempre cero. Este componente es igual a

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) .$$

Por consiguiente, el vector aceleración es radial si y sólo si $r^2\, d\theta/dt$ es constante.

El movimiento plano con aceleración radial tiene una interpretación geométrica interesante en función del área. Designemos con $A(t)$ el área de la región barrida por el vector posición entre un instante $t = a$ y un instante posterior t. En la figura 14.17 la región sombreada es un ejemplo. Demostraremos que el coeficiente de variación instantáneo de esa área es exactamente igual a $\frac{1}{2}r^2\, d\theta/dt$. Esto es, tenemos

(14.27)
$$A'(t) = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} .$$

De esto resulta que el vector aceleración es radial si y sólo si el vector posición barre el área, de manera que el área barrida sea proporcional al tiempo empleado

Para demostrar (14.27), suponemos que es posible eliminar t entre las dos ecuaciones $r = f(t)$, $\theta = g(t)$, y en consecuencia expresar r como función de θ, pongamos $r = R(\theta)$. Esto significa que existe una función real R tal que $R[g(t)] = f(t)$. Entonces la región sombreada de la figura 14.17 es el conjunto radial de R en el intervalo $[g(a), g(t)]$. Según el teorema 2.6, el área de esa región viene dada por la integral

$$A(t) = \tfrac{1}{2}\int_{g(a)}^{g(t)} R^2(\theta)\, d\theta .$$

Derivando esta integral, según el primer teorema fundamental del Cálculo y la regla de la cadena, encontramos que

$$A'(t) = \frac{1}{2}R^2[g(t)]g'(t) = \frac{1}{2}f^2(t)g'(t) = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt},$$

lo cual demuestra (14.27).

14.18 Coordenadas cilíndricas

Si las coordenadas x e y de un punto $P(x, y, z)$ del espacio se sustituyen por las coordenadas polares r y θ, los tres números r, θ, z se denominan *coorde-*

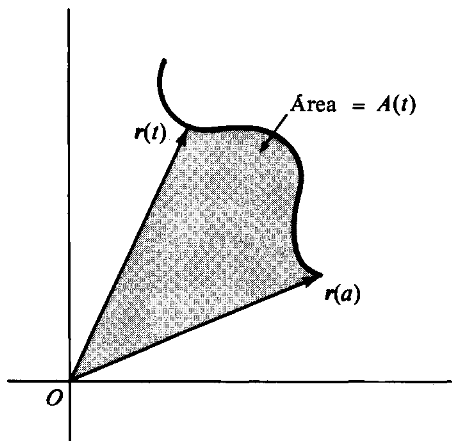


FIGURA 14.17 *El vector de posición barre el área con el coeficiente de variación*

$$A'(t) = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

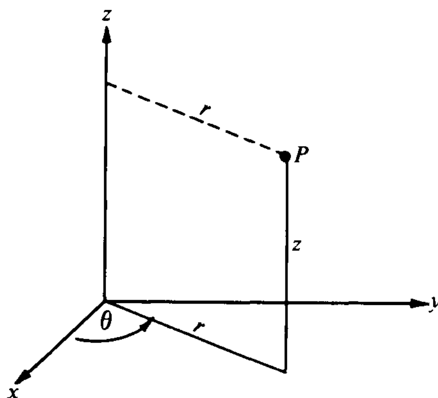


FIGURA 14.18 *Coordenadas cilíndricas.*

nadas cilíndricas del punto P. El número no negativo r representa ahora la distancia del punto P al eje z, tal como se indica en la figura 14.18. Los puntos del espacio para los que r es constante equidistan del eje z y por tanto pertenecen a un cilindro circular (de aquí el nombre de coordenadas *cilíndricas*).

Para estudiar curvas *alabeadas* en coordenadas cilíndricas, la ecuación del radio vector $\boldsymbol{r}$ se ha de sustituir por una de la forma:

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r + z(t)\boldsymbol{k} .$$

Las fórmulas correspondientes para los vectores velocidad y aceleración se obtienen sin más que sumar los términos $z'(t)\boldsymbol{k}$ y $z''(t)\boldsymbol{k}$, a los segundos miembros de las fórmulas bidimensionales en (14.25) y (14.26).

14.19 Ejercicios

1. Una partícula se mueve en el plano de manera que su posición en el instante t tiene coordenadas polares $r = t$, $\theta = t$. Hallar las fórmulas para los vectores velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$, y la curvatura κ en un instante t cualquiera.
2. Una partícula se mueve en el espacio de manera que su posición en el instante t tiene coordenadas cilíndricas $r = t$, $\theta = t$, $z = t$.
   a) Probar que la curva está situada en un cono y hallar una ecuación cartesiana para este cono (la curva se denomina *hélice cónica*).
   b) Hallar las fórmulas para la velocidad $\boldsymbol{v}$, la aceleración $\boldsymbol{a}$ y la curvatura κ en el instante t.
   c) Hallar una fórmula para determinar el ángulo que forman la tange te a la curva y la generatriz del cono en cada punto de la curva.
3. Una partícula se mueve en el espacio de manera que su posición en el instante t tiene coordenadas cilíndricas $r = \text{sen } t$, $\theta = t$, $z = \log \sec t$, donde $0 \leq t < \frac{1}{2}\pi$.
   a) Probar que la curva está situada en un cilindro de ecuación $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.
   b) Hallar una fórmula (en función de t) para determinar el ángulo que forma el vector velocidad con $\boldsymbol{k}$.
4. Si una curva tiene la ecuación polar $r = f(\theta)$, donde $a \leq \theta \leq b \leq a + 2\pi$, demostrar que la longitud de arco es

$$\int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta .$$

5. La curva de ecuación polar $r = a(1 + \cos \theta)$, donde $a > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se llama *cardioide*. Trazar la gráfica de la cardioide $r = 4(1 + \cos \theta)$ y calcular la longitud de su arco.
6. Una partícula se mueve siguiendo una curva plana cuya ecuación polar es $r = e^{c\theta}$, donde c es una constante y θ varía entre 0 y 2π.
   a) Hacer un gráfico indicando la forma de la curva para cada uno de los siguientes valores de c: $c = 0$, $c = 1$, $c = -1$.
   b) Designemos por $L(c)$ la longitud del arco de curva y por $a(c)$ el área de la región barrida por el vector de posición cuando θ varía de 0 a 2π. Calcular $L(c)$ y $a(c)$ en función de c.

7. Trazar la curva cuya ecuación polar es $r = \operatorname{sen}^2 \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y mostrar que consta de dos bucles.
   a) Hallar el área de la región limitada por un bucle de la curva.
   b) Calcular la longitud de un bucle de la curva.
   En cada uno de los ejercicios del 8 al 11, representar la curva plana cuya ecuación polar se da y calcular la longitud de su arco.

8. $r = \theta$, $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$.
9. $r = e^\theta$, $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$.
10. $r = 1 + \cos\theta$, $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$.
11. $r = 1 - \cos\theta$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
12. Si una curva tiene la ecuación polar $r = f(\theta)$, demostrar que su radio de curvatura ρ viene dado por la fórmula $\rho = (r^2 + r'^2)^{3/2}/|r^2 - rr'' + 2r'^2|$, donde $r' = f'(\theta)$ y $r'' = f''(\theta)$.
13. Para cada una de las curvas de los ejercicios del 8 al 11, calcular el radio de curvatura para el valor indicado de θ.
   a) Cualquier θ en el ejercicio 8.
   b) Cualquier θ en el ejercicio 9.
   c) $\theta = \frac{1}{4}\pi$ en el ejercicio 10.
   d) $\theta = \frac{1}{2}\pi$ en el ejercicio 11.
14. Designemos por ϕ el ángulo, $0 \leq \phi \leq \pi$, formado por el vector de posición y el vector velocidad de una curva. Si la curva está expresada en coordenadas polares, demostrar que $v \operatorname{sen}\phi = r$ y $v \cos\phi = dr/d\theta$, siendo v la velocidad.
15. Un proyectil cohete está proyectado de manera que disparado se dirija directamente hacia el blanco. Debido a fallos técnicos, su dirección en el vuelo efectivo forma un ángulo fijo $\alpha \neq 0$ con la dirección desde el proyectil al blanco. Determinar la trayectoria cuando se dispara hacia un blanco fijo. Discutir la forma de la trayectoria al variar α. ¿Alcanzará el proyectil el blanco? (Suponer que el movimiento se realiza en un plano.)
16. Debido a fallos mecánicos, los técnicos del lanzamiento han perdido el control de un proyectil cohete lanzado recientemente. Se sabe que el proyectil seguirá un curso rectilíneo con velocidad constante, de dirección desconocida. Cuando el proyectil está a 4 millas de distancia se ha localizado un instante y se ha perdido de nuevo. Inmediatamente se lanza un antiproyectil con velocidad constante triple que la del primero. ¿Cuál ha de ser el curso del segundo proyectil para que alcance al primero? (Se supone que ambos proyectiles se mueven en el mismo plano.)
17. Probar que si una ecuación diferencial homogénea de primer orden de la forma $y' = f(x, y)$ se escribe en coordenadas polares, se reduce a una ecuación separable. Aplicar este método para resolver $y' = (y - x)/(y + x)$.
18. Una partícula (móvil en el espacio) tiene velocidad dada por $\boldsymbol{v} = \omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}$, donde ω es una constante y $\boldsymbol{r}$ es el vector posición. Probar que la partícula se mueve sobre una circunferencia con velocidad angular constante ω. (La velocidad angular está definida por $|d\theta/dt|$, donde θ es el ángulo polar en el instante t.)
19. Una partícula se mueve en un plano perpendicular al eje z. El movimiento tiene lugar a lo largo de una circunferencia con centro en este eje.
   a) Probar que existe un vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ paralelo al eje z tal que:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(t),$$

   donde $\boldsymbol{r}(t)$ y $\boldsymbol{v}(t)$ son los vectores posición y velocidad en el instante t. El vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ se llama *vector velocidad angular* y su magnitud $\omega(t) = \|\boldsymbol{\omega}(t)\|$ es la *velocidad angular.*
   b) El vector $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\omega}'(t)$ se llama vector *aceleración angular.* Demostrar que el vector aceleración $\boldsymbol{a}(t)$ $[= \boldsymbol{v}'(t)]$ viene dado por la fórmula

$$\boldsymbol{a}(t) = [\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t)]\boldsymbol{\omega}(t) - \omega^2(t)\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{r}(t).$$

c) Si la partícula está en el plano xy y si la velocidad angular $\omega(t)$ es constante, sea $\omega(t) = \omega$, demostrar que el vector aceleración $\boldsymbol{a}(t)$ es centrípeto y que, $\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2\boldsymbol{r}(t)$.

20. Se dice que un cuerpo está sometido a un *movimiento rígido* si, para cada par de partículas p y q en el cuerpo, la distancia $\|\boldsymbol{r}_p(t) - \boldsymbol{r}_q(t)\|$ es independiente de t, donde $\boldsymbol{r}_p(t)$ y $\boldsymbol{r}_q(t)$ indican los vectores posición de p y q en el instante t. Probar que para un cuerpo rígido en el que cada partícula gira alrededor del eje z se tiene: $\boldsymbol{v}_p(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}_p(t)$, donde $\boldsymbol{\omega}(t)$ es la misma para cada partícula, y $\boldsymbol{v}_p(t)$ es la velocidad de la partícula p.

14.20 Aplicaciones al movimiento planetario

Después del análisis de gran número de datos sobre movimiento planetario acumulados hasta el año 1600, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) se propuso descubrir las leyes matemáticas que rigen el movimiento de los planetas. Entonces se conocían seis planetas y según la teoría de Copérnico se suponía que sus órbitas estaban situadas en esferas concéntricas alrededor del Sol. Kepler intentó demostrar que los radios de estas esferas estaban relacionados con los cinco poliedros regulares de la Geometría. Se le ocurrió la idea ingeniosa de que el sistema solar estaba construido como un rompecabezas chino. En el centro del sistema situaba el Sol, y después en sucesión colocaba las seis esferas concéntricas que podían inscribirse y circunscribirse a los cinco poliedros regulares — octaedro, icosaedro, dodecaedro, tetraedro y cubo, en este orden (de dentro hacia fuera). La esfera más interna, inscrita en el octaedro regular, corresponde a la órbita de Mercurio. La que le seguía, circunscrita al octaedro e inscrita al icosaedro, corresponde a la órbita de Venus. La órbita de la Tierra estaba en la esfera circunscrita al icosaedro e inscrita al dodecaedro, y así sucesivamente; la esfera más externa, conteniendo la órbita de Júpiter, estaría circunscrita al cubo. A pesar de que esta teoría parecía correcta dentro de un 5 % de error, las observaciones astronómicas efectuadas en este período se hacían con un tanto por ciento de error mucho menor, y Kepler finalmente pensó en modificar esta teoría. Después de muchos estudios posteriores se le ocurrió que los datos observados relativos a órbitas correspondían más a trayectorias *elípticas* que a las trayectorias circulares del sistema de Copérnico. Finalmente, tras esfuerzo incesante, Kepler dio tres leyes famosas, descubiertas empíricamente, que explicaban todos los fenómenos astronómicos conocidos hasta entonces. Se pueden enunciar como sigue:

Primera ley de Kepler. Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.

Segunda ley de Kepler. Las áreas barridas por el radio vector desde el Sol a un planeta son proporcionales al tiempo.

Tercera ley de Kepler. El cuadrado del período de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

Observación: Por *período* de un planeta se entiende el tiempo necesario para que recorra una vez la órbita elíptica. La *distancia media* al sol es la mitad de la longitud del eje mayor de la elipse.

La formulación de estas leyes a partir del estudio de tablas astronómicas fue un hecho muy notable. Cerca de unos 50 años más tarde, Newton probó que las tres leyes de Kepler eran consecuencia de su segunda ley del movimiento y de la célebre ley de la gravitación universal. En esta sección, haciendo uso del método vectorial, se verá cómo se pueden deducir las leyes de Kepler de las de Newton.

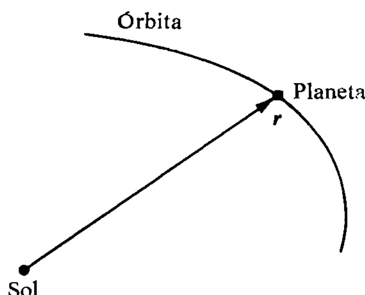


FIGURA 14.19 *El vector posición desde el Sol al planeta.*

Supongamos que se tiene un Sol fijo de masa M y un planeta móvil de masa m atraído por el Sol con una fuerza F. (Prescindimos de la influencia de otras fuerzas.) La segunda ley del movimiento de Newton establece que

$$F = m\boldsymbol{a}\,, \tag{14.28}$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el vector aceleración del movimiento del planeta. Designemos con $\boldsymbol{r}$ el vector posición desde el Sol al planeta (ver figura 14.19), sean $r = \|\boldsymbol{r}\|$ y $\boldsymbol{u}_r$ un vector unitario con la misma dirección que $\boldsymbol{r}$, así que $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$. La ley de la gravitación universal establece que

$$F = -G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{u}_r\,,$$

donde G es una constante. Combinando ésta con (14.28), obtenemos

$$\boldsymbol{a} = -\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{u}_r\,, \tag{14.29}$$

lo que nos dice que la aceleración es *radial*. Demostraremos en seguida que la órbita está en un plano. Una vez sabido esto, se deduce inmediatamente de los resultados de la sección 14.17 que el área barrida por el vector posición es proporcional al tiempo.

Para demostrar que el camino está en un plano utilizamos el hecho de que $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{a}$ son paralelos. Si introducimos el vector velocidad $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$, tenemos

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) .$$

Puesto que $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = O$, eso significa que $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ es un vector constante, sea $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$.

Si $\boldsymbol{c} = O$, el vector posición $\boldsymbol{r}$ es paralelo al $\boldsymbol{v}$ y el movimiento es rectilíneo. Puesto que la trayectoria de un planeta no es rectilínea, debe ser $\boldsymbol{c} \neq O$. La relación $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$ demuestra que $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, así que el vector posición está en un plano perpendicular a $\boldsymbol{c}$. Puesto que la aceleración es radial, $\boldsymbol{r}$ barre el área en una razón constante es decir proporcionalmente al tiempo. Esto demuestra la segunda ley de Kepler.

Es fácil probar que esa constante de proporcionalidad es exactamente la mitad del vector $\boldsymbol{c}$. En efecto, si usamos coordenadas polares y expresamos la velocidad en función de $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$ como en la ecuación (14.25), encontramos que

$$(14.30) \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = (r\boldsymbol{u}_r) \times \left(\frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta\right) = r^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta ,$$

y por tanto $\|\boldsymbol{c}\| = |r^2\, d\theta/dt|$. Según (14.27) esto es igual a $2|A'(t)|$, donde $A'(t)$ es la velocidad con la que el radio vector barre el área o *velocidad areolar*.

En la figura 14.20 se representa la segunda ley de Kepler. Las dos regiones sombreadas, que son barridas por el vector posición en intervalos de tiempo iguales, tienen áreas iguales.

Demostraremos ahora que el camino es una elipse. Ante todo, formemos el producto vectorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, utilizando (14.29) y (14.30), y encontramos que

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \left(-\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{u}_r\right) \times \left(r^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta\right) = -GM\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_r \times (\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta) = GM\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta .$$

ya que $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ y $\boldsymbol{u}_\theta = d\boldsymbol{u}_r/d\theta$, la ecuación anterior relativa a $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ también puede escribirse como sigue:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c}) = \frac{d}{dt}(GM\boldsymbol{u}_r) .$$

Integrando obtenemos

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} = GM\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{b},$$

donde $\boldsymbol{b}$ es otro vector constante. Podemos poner esta igualdad en la forma

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} = GM(\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{e}), \tag{14.31}$$

siendo $GM\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}$. Combinaremos ésta con (14.30) para eliminar $\boldsymbol{v}$ y obtener una expresión para $\boldsymbol{r}$. A tal fin multiplicamos escalarmente ambos miembros de (14.30) por $\boldsymbol{c}$ y ambos miembros de (14.31) por $\boldsymbol{r}$. Igualando las dos expresiones del producto mixto $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c}$, llegamos a la ecuación

$$GMr(1 + e\cos\phi) = c^2, \tag{14.32}$$

en la que $e = \|\boldsymbol{e}\|$, $c = \|\boldsymbol{c}\|$, y ϕ representa el ángulo formado por el vector constante $\boldsymbol{e}$ y el radio vector $\boldsymbol{r}$. (Ver la figura 14.21.) Si ponemos $d = c^2/(GMe)$, la ecuación (14.32) se transforma en

$$r = \frac{ed}{e\cos\phi + 1} \quad \text{o} \quad r = e(d - r\cos\phi). \tag{14.33}$$

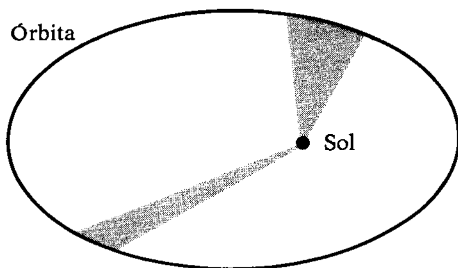


FIGURA 14.20 *Segunda ley de Kepler. Las dos regiones sombreadas, barridas en intervalos iguales de tiempo, tienen la misma área.*

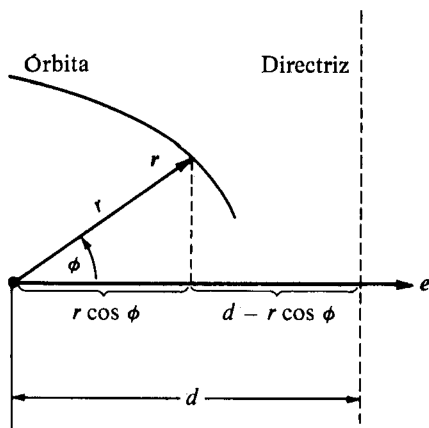


Figura 14.21 *La razón* $r/(d - r\cos\phi)$ *es la excentricidad de* $e = \|\boldsymbol{e}\|$.

Según el teorema 13.18, ésta es la ecuación polar de una cónica con excentricidad e y un foco en el Sol. La figura 14.21 muestra la directriz trazada perpendicu-

larmente a e a una distancia d del Sol. La distancia desde el planeta a la directriz es $d - r\cos\phi$, y la razón $r/(d - r\cos\phi)$ es la excentricidad e. La cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, y una hipérbola si $e > 1$. Puesto que los planetas recorren caminos cerrados, la órbita que consideramos debe ser una elipse. Esto demuestra la primera ley de Kepler.

Finalmente, deduzcamos la tercera ley de Kepler. Supongamos que la elipse tiene el eje mayor de longitud $2a$ y el eje menor de longitud $2b$. El área de la elipse será pues πab. Sea T el tiempo empleado por el planeta en dar una vuelta a su órbita elíptica. Puesto que el vector posición barre el área con la velocidad areolar $\frac{1}{2}c$, tenemos $\frac{1}{2}cT = \pi ab$, o bien $T = 2\pi ab/c$. Queremos demostrar que T^2 es proporcional a a^3.

De la sección 13.22 deducimos $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $ed = a(1 - e^2)$, así que

$$c^2 = GMed = GMa(1 - e^2),$$

y tenemos por tanto

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^4(1 - e^2)}{GMa(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 .$$

Puesto que T^2 es el producto de una constante por a^3, esto demuestra la tercera ley de Kepler.

14.21 Ejercicios de repaso

1. Sea $\boldsymbol{r}$ el vector que une el origen a un punto arbitrario de la parábola $y^2 = x$, sean α el ángulo que $\boldsymbol{r}$ forma con la recta tangente, $0 \le \alpha \le \pi$, y θ el ángulo que forma $\boldsymbol{r}$ con el eje x positivo, $0 \le \theta \le \pi$. Expresar α en función de θ.
2. Demostrar que el vector $T = y\boldsymbol{i} + 2c\boldsymbol{j}$ es tangente a la parábola $y^2 = 4cx$ en el punto (x, y), y que el vector $N = 2c\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ es perpendicular a T.

   [*Indicación:* Escribir la ecuación vectorial de la parábola, empleando y como parámetro.]

3. Demostrar que la ecuación de la recta de pendiente m que es tangente a la parábola $y^2 = 4cx$ puede escribirse en la forma $y = mx + c/m$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de contacto?
4. a) Resolver el ejercicio 3 para la parábola $(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$.
   b) Resolver el ejercicio 3 para la parábola $x^2 = 4cy$, y, en general, para la parábola $(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0)$.
5. Demostrar que la ecuación de una recta tangente a la parábola $y^2 = 4cx$ en el punto (x_1, y_1) puede escribirse en la forma $y_1 y = 2c(x + x_1)$.
6. Resolver el ejercicio 5 para cada una de las parábolas citadas en el ejercicio 4.

7. a) Sea P un punto de la parábola $y = x^2$. Sea Q el punto de intersección de la recta normal en P con el eje y. ¿Cuál es la posición límite de Q cuando P tiende hacia el eje y?
b) Resolver el mismo problema para la curva $y = f(x)$, siendo $f'(0) = 0$.
8. La recta $y = c$ corta a la parábola $y = x^2$ en dos puntos. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por esos dos puntos y por el vértice de la parábola. El radio depende de c. ¿Qué le ocurre al radio cuando $c \to 0$?
9. Demostrar que un punto (x_0, y_0) está *dentro*, *en* o *fuera* de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ según que $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2$ sea *menor*, *igual* o *mayor* que 1.
10. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Demostrar que los vectores T y N dados por

$$T = -\frac{y}{b^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{a^2}\boldsymbol{j}, \qquad N = \frac{x}{a^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{b^2}\boldsymbol{j}$$

son, respectivamente, *tangente* y *normal* a la elipse cuando se aplican en el punto (x, y). Si el ángulo excéntrico de (x_0, y_0) es θ_0, demostrar que la tangente en (x_0, y_0) tiene la ecuación cartesiana

$$\frac{x}{a}\cos\theta_0 + \frac{y}{b}\operatorname{sen}\theta_0 = 1 .$$

11. Demostrar que la tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación $x_0x/a^2 + y_0y/b^2 = 1$.
12. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a una recta tangente cualquiera es constante, siendo esa constante el cuadrado de la longitud del semieje menor.
13. Se trazan dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$, paralelas a la recta $x + 2y = 7$. Hallar los puntos de contacto.
14. Una circunferencia pasa por los dos focos de una elipse y es tangente a ella en dos puntos. Hallar la excentricidad de la elipse.
15. Sea V uno de los dos vértices de una hipérbola cuyo eje transverso tiene longitud $2a$ y cuya excentricidad es 2. Sea P un punto situado en la misma rama que V. Designemos con A el área de la región limitada por la hipérbola y por el segmento rectilíneo VP, y sea r la longitud de VP.
a) Colocar los ejes coordenados en una posición conveniente y escribir la ecuación de la hipérbola.
b) Expresar el área A como una integral y, sin intentar el cálculo de esa integral, demostrar que Ar^{-3} tiende a un límite cuando el punto P tiende a V. Hallar ese límite.
16. Demostrar que los vectores $T = (y/b^2)\boldsymbol{i} + (x/a^2)\boldsymbol{j}$ y $N = (x/a^2)\boldsymbol{i} - (y/b^2)\boldsymbol{j}$ son, respectivamente, tangente y normal a la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ si se aplican en el punto (x, y) de la curva.
17. Demostrar que la recta tangente a la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0) tiene como ecuación $x_0x/a^2 - y_0y/b^2 = 1$.
18. La recta normal en cada punto de una curva y la que une aquel punto con el origen forman un triángulo isósceles cuya base está en el eje x. Demostrar que la curva es una hipérbola.
19. La normal en un punto P de una curva corta al eje x en X y al eje y en Y. Hallar la curva si cada punto P es el punto medio del correspondiente segmento rectilíneo XY y si el punto $(4, 5)$ está en la curva.
20. Demostrar que el producto de las distancias desde cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

21. La ecuación polar de una curva es $r = f(\theta)$. Hallar f si un arco cualquiera que una dos puntos distintos de la curva tiene longitud proporcional a: a) al ángulo formado por los dos radios vectores; b) la diferencia de las distancias del origen a los dos puntos; c) el área del sector formado por el arco y los dos radios vectores.
22. Si una curva en el espacio de 3 dimensiones está representada por una función vectorial $\boldsymbol{r}$ definida en un intervalo paramétrico $[a, b]$, demostrar que el producto mixto $\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}(a) \times \boldsymbol{r}(b)$ es cero por lo menos para un valor de t en (a, b). Interpretar este resultado geométricamente.

15

ESPACIOS LINEALES

15.1 Introducción

A lo largo de este libro hemos encontrado muchos ejemplos de objetos matemáticos que pueden sumarse unos con otros y multiplicarse por números reales. Ante todo, los números reales son objetos de tal naturaleza. Otros ejemplos son las funciones vectoriales, los números complejos, las series y los vectores en el espacio *n-dimensional*. En este capítulo tratamos un concepto matemático general, llamado *espacio lineal*, que incluye todos esos ejemplos y muchos otros como casos particulares.

Brevemente, un espacio lineal es un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera sobre el que pueden realizarse ciertas operaciones llamadas *adición* y *multiplicación por números*. Al definir un espacio lineal no especificamos la naturaleza de los elementos ni decimos cómo se realizan las operaciones entre ellos. En cambio, exigimos que las operaciones tengan ciertas propiedades que tomamos como axiomas de un espacio lineal. Vamos ahora a hacer con detalle una descripción de esos axiomas.

15.2 Definición de espacio lineal

Sea V un conjunto no vacío de objetos, llamados *elementos*. El conjunto V se llama espacio lineal si satisface los diez axiomas siguientes que se enuncian en tres grupos.

Axiomas de clausura

AXIOMA 1. CLAUSURA RESPECTO DE LA ADICIÓN. *A todo par de elementos x e y de V corresponde un elemento único de V llamado suma de x e y, designado por $x + y$.*

AXIOMA 2. CLAUSURA RESPECTO DE LA MULTIPLICACIÓN POR NÚMEROS REALES. *A todo x de V y todo número real a corresponde un elemento de V llamado producto de a por x, designado por ax.*

Axiomas para la adición

AXIOMA 3. LEY CONMUTATIVA. *Para todo x y todo y de V, tenemos $x + y = y + x$.*

AXIOMA 4. LEY ASOCIATIVA. *Cualesquiera que sean x, y, z de V, tenemos $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

AXIOMA 5. EXISTENCIA DE ELEMENTO CERO. *Existe un elemento en V, designado con el símbolo O, tal que*

$$x + O = x \qquad \text{para todo } x \text{ de } V.$$

AXIOMA 6. EXISTENCIA DE OPUESTOS. *Para todo x de V, el elemento $(-1)x$ tiene la propiedad*

$$x + (-1)x = O .$$

Axiomas para la multiplicación por números

AXIOMA 7. LEY ASOCIATIVA. *Para todo x de V y todo par de números reales a y b, tenemos*

$$a(bx) = (ab)x .$$

AXIOMA 8. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICIÓN EN V. *Para todo x y todo y de V y todo número real a, tenemos*

$$a(x + y) = ax + ay .$$

AXIOMA 9. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICIÓN DE NÚMEROS. *Para todo x de V y todo par de números reales a y b, tenemos*

$$(a + b)x = ax + bx .$$

AXIOMA 10. EXISTENCIA DE ELEMENTO IDÉNTICO. *Para todo x de V, tenemos $1x = x$.*

Los espacios lineales así definidos, se llaman, a veces, espacios lineales *reales* para resaltar el hecho de que se multiplican los elementos de V por números reales. Si en los axiomas 2, 7, 8 y 9 se reemplaza *número real* por *número complejo,* la estructura que resulta se llama *espacio lineal complejo.* Algunas veces un espacio lineal se llama también *espacio vectorial lineal* o simplemente *espacio vectorial*; los números utilizados como multiplicadores se llaman *escalares.* Un espacio lineal real tiene números reales como escalares; un espacio lineal complejo tiene como escalares números complejos. Si bien consideraremos principalmente ejemplos de espacios lineales reales, todos los teoremas son válidos para espacios lineales complejos. Cuando digamos espacio lineal sin más, se sobrentenderá que el espacio puede ser real o complejo.

15.3 Ejemplos de espacios lineales

Si precisamos el conjunto V y decimos cómo se suman sus elementos y cómo se multiplican por números, obtenemos un ejemplo concreto de espacio lineal. El lector fácilmente puede comprobar que cada uno de los ejemplos siguientes satisface todos los axiomas para un espacio lineal real.

EJEMPLO 1. Sea $V = \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales, y sean $x + y$ y ax la adición y la multiplicación ordinarias de números reales.

EJEMPLO 2. Sea $V = \mathbf{C}$ el conjunto de todos los números complejos, definimos $x + y$ como la adición ordinaria de números complejos, y ax como la multiplicación del número complejo x por el número real a. Aunque los elementos de V sean números complejos, éste es un espacio lineal real porque los escalares son reales.

EJEMPLO 3. *Sea* $V = V_n$, el espacio vectorial de todas las n-plas de números reales, con la adición y la multiplicación por escalares definidas en la forma ordinaria en función de los componentes.

EJEMPLO 4. Sea V el conjunto de todos los vectores V_n ortogonales a un vector no nulo dado N. Si $n = 2$, este espacio lineal es una recta que pasa por O con N como vector normal. Si $n = 3$, es un plano que pasa por O con N como vector normal.

Los siguientes ejemplos se llaman *espacios funcionales.* Los elementos de V son funciones vectoriales, con la suma de dos funciones f y g definidas en la forma ordinaria:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo real x en la intersección de los dominios de f y g. La multiplicación de una función f por un escalar real a se define así: af es aquella función cuyo valor en cada x del dominio de f es $af(x)$. El elemento cero es la función cuyos valores son nulos para todo x. El lector puede comprobar fácilmente que cada uno de los conjuntos siguientes es un espacio funcional.

EJEMPLO 5. El conjunto de todas las funciones definidas en un intervalo dado.

EJEMPLO 6. El conjunto de todos los polinomios.

EJEMPLO 7. El conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$, siendo n fijo. (Siempre que consideremos este conjunto, se sobrentenderá que siempre está incluido el polinomio nulo.) El conjunto de todos los polinomios de grado *igual* a n no es una espacio lineal porque no se satisfacen los axiomas de clausura. Por ejemplo, la suma de dos polinomios de grado n puede no ser de grado n.

EJEMPLO 8. El conjunto de todas las funciones continuas en un intervalo dado. Si el intervalo es $[a, b]$, designamos este espacio con $C(a, b)$.

EJEMPLO 9. El conjunto de todas las funciones derivables en un punto dado.

EJEMPLO 10. El conjunto de todas las funciones integrables en un intervalo dado.

EJEMPLO 11. El conjunto de todas las funciones f definidas en el punto 1 siendo $f(1) = 0$. El número 0 es esencial en este ejemplo. Si reemplazamos 0 por un número no nulo c, violamos el axioma de clausura.

EJEMPLO 12. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + ay' + by = 0$, donde a y b son constantes dadas. También aquí es esencial el 0. El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial no homogénea no satisface los axiomas de clausura.

Estos ejemplos y muchos otros hacen patente cómo el concepto de espacio lineal está extendido por el Álgebra, la Geometría y el Análisis. Cuando se deduce un teorema de los axiomas de un espacio lineal, obtenemos un resultado válido para cada ejemplo concreto. Unificando varios ejemplos de este modo, conseguimos un conocimiento más profundo en cada uno. En ocasiones el conocimiento de un determinado ejemplo ayuda para anticipar o interpretar resultados válidos para otros ejemplos y pone en evidencia relaciones que de otro modo podrían pasar inadvertidas.

15.4 Consecuencias elementales de los axiomas

Los teoremas que siguen se deducen fácilmente de los axiomas de un espacio lineal.

TEOREMA 15.1. UNICIDAD DEL ELEMENTO CERO. *En cualquier espacio lineal existe un elemento cero y sólo uno.*

Demostración. El axioma 5 nos asegura que existe por lo menos un elemento cero. Supongamos que existan dos, sean O_1 y O_2. Haciendo $x = O_1$ y $O = O_2$ en el axioma 5, obtenemos $O_1 + O_2 = O_1$. Análogamente, haciendo $x = O_2$ y $O = O_1$, encontramos $O_2 + O_1 = O_2$. Pero $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$ por la ley conmutativa, así que $O_1 = O_2$.

TEOREMA 15.2. UNICIDAD DE ELEMENTOS OPUESTOS. *En cualquier espacio lineal todo elemento tiene exactamente un opuesto. Esto es, para todo x existe un y, y sólo uno tal que $x + y = O$.*

Demostración. El axioma 6 nos dice que cada x tiene por lo menos un opuesto, a saber $(-1)x$. Supongamos que x tenga dos opuestos, sean y_1 e y_2. Entonces $x + y_1 = O$ y $x + y_2 = O$. Sumando y_2 a los dos miembros de la primera igualdad y aplicando los axiomas 5, 4 y 3, obtenemos que

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2 ,$$

y

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1 .$$

Por consiguiente $y_1 = y_2$, con lo que x tiene exactamente un opuesto, el elemento $(-1)x$.

Notación. El opuesto de x se designa por $-x$. La diferencia $y - x$ se define como la suma $y + (-x)$.

El teorema siguiente muestra un conjunto de propiedades que rigen los cálculos algebraicos elementales en un espacio lineal.

TEOREMA 15.3. *En un espacio lineal, designemos con x e y dos elementos cualesquiera y con a y b dos escalares cualesquiera. Tenemos entonces las propiedades siguientes:*

a) $0x = O$.
b) $aO = O$.

c) $(-a)x = -(ax) = a(-x)$.
d) *Si* $ax = O$, *o bien* $a = 0$ *o* $x = O$, *o los dos.*
e) *Si* $ax = ay$ *y* $a \neq 0$, *entonces* $x = y$.
f) *Si* $ax = bx$ *y* $x \neq O$, *entonces* $a = b$.
g) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$.
h) $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$, *y en general,* $\sum_{i=1}^{n} x = nx$.

Demostraremos a), b) y c) y dejamos como ejercicios las demostraciones de las otras propiedades.

Demostración de a). Sea $z = 0x$. Deseamos demostrar que $z = O$. Sumando z a sí mismo y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z .$$

Sumemos ahora $-z$ a ambos miembros y obtenemos $z = O$.

Demostración de b). Sea $z = aO$, sumar z a sí mismo, y aplicar el axioma 8.

Demostración de c). Sea $z = (-a)x$. Sumando z a ax y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O ,$$

así que z es el opuesto de ax, $z = -(ax)$. Análogamente, si sumamos $a(-x)$ a ax y aplicamos el axioma 8 y la propiedad b), encontramos que $a(-x) = -(ax)$.

15.5 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 28, determinar si cada uno de los conjuntos dados es un espacio lineal real, si la adición y multiplicación por escalares reales está definida en la forma usual. Para aquellos en los que no es así, decir cuáles son los axiomas que no se cumplen. Las funciones de los ejercicios 1 al 17 son reales. En los ejercicios 3, 4 y 5, cada función tiene un dominio que contiene 0 y 1. En los ejercicios 7 al 12, cada dominio contiene todos los números reales.

1. Todas las funciones racionales.
2. Todas las funciones racionales f/g, con el grado de $f \leq$ que el grado de g (incluyendo $f = 0$).
3. Todas las f con $f(0) = f(1)$.
4. Todas las f con $2f(0) = f(1)$.
5. Todas las f con $f(1) = 1 + f(0)$.
6. Todas las funciones escalonadas definidas en $[0, 1]$.
7. Todas las f en las que $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.
8. Todas las funciones pares.
9. Todas las funciones impares.

10. Todas las funciones acotadas.
11. Todas las funciones crecientes.
12. Todas las funciones con período 2π.
13. Todas las f integrables en $[0, 1]$ con $\int_0^1 f(x)dx = 0$.
14. Todas las f integrables en $[0, 1]$ con $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$.
15. Todas las f que satisfacen $f(x) = f(1 - x)$ para todo x.
16. Todos los polinomios de Taylor de grado $\leq n$ para un n fijo (incluyendo el polinomio cero).
17. Todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, siendo P y Q funciones dadas, continuas para todo x.
18. Todas las sucesiones reales acotadas.
19. Todas las sucesiones reales convergentes.
20. Todas las series reales convergentes.
21. Todas las series reales absolutamente convergentes.
22. Todos los vectores (x, y, z) de V_3 con $z = 0$.
23. Todos los vectores (x, y, z) de V_3 con $x = 0$ o $y = 0$.
24. Todos los vectores (x, y, z) de V_3 con $y = 5x$.
25. Todos los vectores (x, y, z) de V_3 con $3x + 4y = 1$, $z = 0$.
26. Todos los vectores (x, y, z) de V_3 que son productos de (1, 2, 3) por escalares.
27. Todos los vectores (x, y, z) de V_3 cuyos componentes satisfacen un sistema de tres ecuaciones lineales de la forma

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0\,, \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0\,, \qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0\,.$$

28. Todos los vectores de V_n que son combinaciones lineales de dos vectores dados A y B.
29. Sea $V = \mathbf{R}^+$, el conjunto de los números reales positivos. Definamos la «suma» de dos elementos x e y de V como su producto $x \cdot y$ (en el sentido ordinario), y definamos la «multiplicación» de un elemento x de V por un escalar c poniendo x^c. Demostrar que V es un espacio lineal real con el elemento cero.
30. Demostrar que el axioma 10 no puede deducirse de los otros axiomas.

    [*Indicación:* Dar un ejemplo de un conjunto V con operaciones que satisfagan los axiomas del 1 al 9 pero no el 10.]

31. Sea S el conjunto de todos los pares ordenados (x_1, x_2) de números reales. En cada caso determinar si S es o no un espacio lineal con las operaciones de adición y multiplicación por escalares definidas como se indica. Si el conjunto no es un espacio lineal, indicar cuáles son los axiomas que no se cumplen.
    a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\quad a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$.
    b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.
    c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$, $\quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.
    d) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$, $\quad a(x_1, x_2) = (|ax_1|, |ax_2|)$.
32. Demostrar las partes de la d) a la h) del teorema 15.3.

15.6 Subespacios de un espacio lineal

Dado un espacio lineal V sea S un subconjunto no vacío de V. Si S es también un espacio lineal, entonces S se llama *subespacio* de V. El teorema que sigue

da un sencillo criterio para determinar si un subconjunto de un espacio lineal es o no un subespacio.

TEOREMA 15.4. *Sea S un subconjunto no vacío de un espacio lineal V. Tal subconjunto S es un subespacio si y sólo si satisface los axiomas de clausura.*

Demostración. Si S es un subespacio, satisface todos los axiomas de un espacio lineal, y por tanto, en particular, los axiomas de clausura.

Demostremos ahora que si S satisface los axiomas de clausura, satisface también los otros. Las leyes conmutativa y asociativa para la adición (axiomas 3 y 4) y los axiomas para la multiplicación por escalares (axiomas del 7 al 10) se satisfacen automáticamente en S porque son válidos para todos los elementos de V. Falta comprobar los axiomas 5 y 6, la existencia del elemento cero en S, y la existencia de un opuesto para cada elemento de S.

Sea x un elemento cualquiera de S. (S tiene por lo menos un elemento ya que no es vacío.) Según el axioma 2, ax está en S para todo escalar a. Tomando $a = 0$, resulta que $0x$ está en S. Pero $0x = O$, en virtud del teorema 15.3 a), con lo cual $O \in S$, y se satisface el axioma 5. Tomando $a = -1$, vemos que $(-1)x$ está en S. Pero $x + (-1)x = O$ ya que x y $(-1)x$ están ambos en V, así que el axioma 6 se satisface en S. Por consiguiente S es un subespacio de V.

DEFINICIÓN. *Sea S un subconjunto no vacío de un espacio lineal V. Un elemento x de V de la forma*

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i ,$$

en donde $x_1, \ldots, x_k$ pertenecen todos a S y $c_1, \ldots, c_k$ son escalares, se denomina combinación lineal de elementos de S. El conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S satisface los axiomas de clausura y por tanto es un subespacio de V. Decimos de ese subespacio que está generado por S, o también le llamamos la envolvente lineal de S, y lo designamos por $L(S)$. Si S es vacío, definimos $L(S)$ como $\{O\}$, el conjunto consta sólo del elemento cero.

Conjuntos distintos pueden generar el mismo subespacio. Por ejemplo, el espacio V_2 está generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores: $\{i, j\}$, $\{i, j, i + j\}$, $\{O, i, -i, j, -j, i + j\}$. El espacio de todos los polinomios $p(t)$ de grado $\leq n$ está generado por el conjunto de $n + 1$ polinomios $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. También está generado por el conjunto $\{1, t/2, t^2/3, \ldots, t^n/(n + 1)\}$ y por $\{1, (1 + t), (1 + t)^2, \ldots, (1 + t)^n\}$. El espacio de todos los polinomios está generado por el conjunto infinito de los polinomios $\{1, t, t^2, \ldots\}$.

Al llegar aquí surgen de modo natural numerosas preguntas. Por ejemplo, ¿qué espacios pueden generarse por un número finito de elementos ¿Si un espacio está generado por un número finito de elementos, cuál es el menor número de elementos necesarios? Para discutir estas cuestiones y otras con ellas relacionadas

introducimos los conceptos de *dependencia, independencia, bases* y *dimensión.* Ya en el capítulo 12 encontramos esas ideas al estudiar el espacio vectorial V_n Ahora vamos a extenderlas a espacios lineales de tipo general.

15.7 Conjuntos dependientes e independientes en un espacio lineal

DEFINICIÓN. *Un conjunto S de elementos de un espacio lineal V se llama dependiente si existe un conjunto finito de elementos distintos de S,* $x_1, \ldots, x_k$, *y un correspondiente conjunto de escalares* $c_1, \ldots, c_k$, *no todos cero, tales que*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O .$$

El conjunto S se llama independiente si no es dependiente. En tal caso, cualesquiera que sean los elementos distintos $x_1, \ldots, x_k$ *de S y los escalares* $c_1, \ldots, c_k$,

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O \qquad \textit{implica} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0 .$$

Si bien la dependencia y la independencia son propiedades de los conjuntos de elementos, podemos también aplicar esas denominaciones a los elementos mismos. Por ejemplo, los elementos de un conjunto independiente se llaman elementos independientes.

Si S es un conjunto finito, la definición anterior está de acuerdo con la dada en el capítulo 12 para el espacio V_n. No obstante, la definición dada aquí no está restringida a conjuntos finitos.

EJEMPLO 1. Si un subconjunto T de un conjunto S es dependiente, el mismo *S es dependiente.* Esto es lógicamente equivalente a la afirmación de que todo subconjunto de un conjunto independiente es independiente.

EJEMPLO 2. Si un elemento de S es el producto de otro por un escalar, S es dependiente.

EJEMPLO 3. Si $O \in S$, entonces S es dependiente.

EJEMPLO 4. El conjunto vacío es independiente.

En el capítulo 12 fueron discutidos muchos ejemplos de conjuntos dependientes e independientes. Los ejemplos que a continuación se comentan, ilustran esos conceptos en espacios funcionales. En cada caso el espacio lineal fundamental V es el conjunto de todas las funciones reales definidas en la recta real.

EJEMPLO 5. Sean $u_1(t) = \cos^2 t$, $u_2(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $u_3(t) = 1$ para todo número real t. La identidad pitagórica prueba que $u_1 + u_2 - u_3 = O$, así que las tres funciones u_1, u_2, u_3 son dependientes.

EJEMPLO 6. Sea $u_k(t) = t^k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, y t real. El conjunto $S = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ es independiente. Para demostrar esto, basta demostrar que para cada n los $n + 1$ polinomios $u_0, u_1, \ldots, u_n$ son independientes. Una relación de la forma $\sum c_k u_k = O$ significa que

$$\sum_{k=0}^{n} c_k t^k = 0 \tag{15.1}$$

para todo real t. Cuando $t = 0$, encontramos que $c_0 = 0$. Repitiendo el proceso, encontramos que cada coeficiente c_k es cero.

EJEMPLO 7. Si $a_1, \ldots, a_n$ son números reales distintos, las n funciones exponenciales

$$u_1(x) = e^{a_1 x}, \ldots, u_n(x) = e^{a_n x}$$

son independientes. Podemos demostrar esto por inducción sobre n. El resultado es trivial cuando $n = 1$. Por consiguiente, supongamos que es válida para $n - 1$ funciones exponenciales y consideremos los escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{a_k x} = 0. \tag{15.2}$$

Sea a_M el mayor de los n números $a_1, \ldots, a_n$. Multiplicando ambos miembros de (15.2) por $e^{-a_M x}$, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{(a_k - a_M)x} = 0. \tag{15.3}$$

Si $k \neq M$, el número $a_k - a_M$ es negativo. Por consiguiente, cuando $x \to +\infty$ en la ecuación(15.3),cada término con $k \neq M$ tiende a cero y encontramos que $c_M = 0$. Suprimiendo el término M-ésimo de (15.2) y aplicando la hipótesis de inducción, encontramos que cada uno de los $n - 1$ restantes coeficientes c_k es cero.

TEOREMA 15.5. *Sea S un conjunto independiente que consta de k elementos de un espacio lineal V y sea $L(S)$ el subespacio generado por S. Entonces todo conjunto de $k + 1$ elementos de $L(S)$ es dependiente.*

Demostración. Cuando $V = V_n$, el teorema 15.5 se reduce al 12.8. Si examinamos la demostración del 12.8 encontramos que únicamente se basa en el hecho de que V_n es un espacio lineal y no en otra propiedad particular de V_n. Por consiguiente la demostración dada para el teorema 12.8 es válida para un espacio lineal V cualquiera.

15.8 Bases y dimensión

DEFINICIÓN. *Un conjunto finito S de elementos de un espacio lineal V se llama base finita de V si S es independiente y genera V. El espacio V es de dimensión finita si tiene una base finita. De otro modo, V es de infinitas dimensiones.*

TEOREMA 15.6. *Sea V un espacio lineal de dimensión finita. Entonces toda base finita de V tiene el mismo número de elementos.*

Demostración. Sean S y T dos bases finitas de V. Supongamos que S y T constan respectivamente de k y m elementos. Puesto que S es independiente y engendra V, el teorema 15.5 nos dice que todo conjunto de $k + 1$ elementos de V es dependiente. Por consiguiente, todo conjunto de más de k elementos de V es dependiente. Ya que T es un conjunto independiente, debe ser $m \leq k$. El mismo razonamiento con S y T intercambiadas prueba que $k \leq m$. Por lo tanto $k = m$.

DEFINICIÓN. *Si un espacio lineal V tiene una base de n elementos, el entero n se llama dimensión de V. Escribimos $n = \dim V$.*

EJEMPLO 1. El espacio V_n tiene dimensión n. Una base es el conjunto de los n vectores coordenados unitarios.

EJEMPLO 2. El espacio de todos los polinomios $p(t)$ de grado $\leq n$ tiene dimensión $n + 1$. Una base es el conjunto de $n + 1$ polinomios $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Todo polinomio de grado $\leq n$ es una combinación lineal de esos $n + 1$ polinomios.

EJEMPLO 3. El espacio de las soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 2y' - 3y = 0$ tiene dimensión 2. Una base está formada por las dos funciones $u_1(x) = e^{-x}$, $u_2(x) = e^{3x}$. Toda solución es una combinación lineal de esas dos.

EJEMPLO 4. El espacio de todos los polinomios $p(t)$ es de infinitas dimensiones. El conjunto infinito $\{1, t, t^2, \ldots\}$ genera este espacio y ningún conjunto *finito* de polinomios genera el espacio.

TEOREMA 15.7. *Sea V un espacio lineal de dimensión finita con* $\dim V = n$. *Se tiene*:

a) *Cualquier conjunto de elementos independiente de V es un subconjunto de una cierta base para V.*

b) *Cualquier conjunto de n elementos independientes es una base para V.*

Demostración. La demostración de a) es idéntica a la de la parte b) del teorema 12.10. La demostración de b) es idéntica a la de la parte c) del teorema 12.10.

Sea V un espacio lineal de dimensión n y consideremos una base cuyos elementos $e_1, \ldots, e_n$ se toman en un cierto orden. Una tal base ordenada la consideramos como una n-pla $(e_1, \ldots, e_n)$. Si $x \in V$, podemos expresar x como una combinación lineal de esos elementos base:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \,. \tag{15.4}$$

Los coeficientes en esta ecuación determinan una n-pla de números $(c_1, \ldots, c_n)$ que está unívocamente determinada por x. En efecto, si tenemos otra representación de x como combinación lineal de $e_1, \ldots, e_n$, por ejemplo $x = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i$, restando de (15,4) encontramos que $\sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i)e_i = O$. Pero ya que los elementos base son independientes, eso implica que $c_i = d_i$ para cada i, con lo cual $(c_1, \ldots, c_n) = (d_1, \ldots, d_n)$.

Los componentes de la n-pla ordenada $(c_1, \ldots, c_n)$ determinada por (15.4) se llaman *componentes de x respecto a la base ordenada* $(e_1, \ldots, e_n)$.

15.9 Ejercicios

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10, S es el conjunto de todos los vectores (x, y, z) de V_3 cuyos componentes satisfacen la condición que se da. Determinar si S es un subespacio de V_3. Si lo es, calcular $\dim S$.

1. $x = 0$.
2. $x + y = 0$.
3. $x + y + z = 0$.
4. $x = y$.
5. $x = y = z$.
6. $x = y$ or $x = z$.
7. $x^2 - y^2 = 0$.
8. $x + y = 1$.
9. $y = 2x$ y $z = 3x$.
10. $x + y + z = 0$ y $x - y - z = 0$.

Sea P_n el espacio lineal de todos los polinomios de grado $\leq n$, siendo n fijo. En cada ejercicio del 11 al 20, sea S el conjunto de todos los polinomios f de P_n que satisfacen la condición dada. Determinar si S es un subespacio de P_n. Si lo es, calcular $\dim S$.

11. $f(0) = 0$.
12. $f'(0) = 0$.

13. $f''(0) = 0$.
14. $f(0) + f'(0) = 0$.
15. $f(0) = f(1)$.
16. $f(0) = f(2)$.
17. f es par.
18. f es impar.
19. f es de grado $\leq k$, siendo $k < n$, o $f = 0$.
20. f es de grado k, siendo $k < n$, o $f = 0$.
21. En el espacio lineal de todos los polinomios reales $p(t)$, describir el subespacio engendrado por cada uno de los siguientes conjuntos de polinomios y determinar su dimensión.
(a) $\{1, t^2, t^4\}$; (b) $\{t, t^3, t^5\}$; (c) $\{t, t^2\}$; (d) $\{1 + t, (1 + t)^2\}$.
22. En este ejercicio, $L(S)$ es el subespacio generado por un subconjunto S de un espacio lineal V. Demostrar las proposiciones de la a) a la f).
a) $S \subseteq L(S)$.
b) Si $S \subseteq T \subseteq V$ y si T es un subespacio de V, entonces $L(S) \subseteq T$. Esta propiedad se expresa diciendo que $L(S)$ es el *menor* subespacio de V que contiene S.
c) Un subconjunto S de V es un subespacio de V si y sólo si $L(S) = S$.
d) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $L(S) \subseteq L(T)$.
e) Si S y T son subespacios de V, también lo es $S \cap T$.
f) Si S y T son subconjuntos de V, entonces $L(S \cap T) \subseteq L(S) \cap L(T)$.
g) Dar un ejemplo en el que $L(S \cap T) \neq L(S) \cap L(T)$.
23. Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales definidas en la recta real. Determinar si cada uno de los siguientes subconjuntos de V es dependiente o independiente. Calcular la dimensión del subespacio generado por cada conjunto.
(a) $\{1, e^{ax}, e^{bx}\}$, $a \neq b$.
(b) $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$.
(c) $\{1, e^{ax}, xe^{ax}\}$.
(d) $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\}$.
(e) $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$.
(f) $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$.
(g) $\{\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x\}$.
(h) $\{1, \cos 2x, \operatorname{sen}^2 x\}$.
(i) $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x\}$.
(j) $\{e^x \cos x, e^{-x} \operatorname{sen} x\}$.
24. Sean V un espacio lineal de dimensión finita, y S un subespacio de V. Demostrar cada una de las proposiciones siguientes.
a) S es de dimensión finita y $\dim S \leq \dim V$.
b) $\dim S = \dim V$ si y sólo si $S = V$.
c) Toda base de S es parte de una base de V.
d) Una base de V no contiene necesariamente una base de S.

15.10 Productos interiores, espacios euclídeos. Normas

En la Geometría euclídea ordinaria, aquellas propiedades que cuentan con la posibilidad de medir longitudes de segmentos rectilíneos y ángulos formados por rectas se llaman propiedades *métricas*. En nuestro estudio de V_n, definimos las longitudes y los ángulos en función del producto escalar. Queremos ahora extender esas ideas a espacios lineales más generales. Primero introduciremos una generalización del producto escalar, que llamaremos *producto interior*, y luego definiremos la longitud y el ángulo en función de este producto interior.

El producto escalar $x \cdot y$ de dos vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots\ y_n)$ de V_n se definió en el capítulo 12 por la fórmula

$$(15.5) \qquad x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

En un espacio lineal general, escribimos (x, y) en lugar de $x \cdot y$ para los productos interiores, y definimos el producto axiomáticamente y no mediante una fórmula. Esto es, establecemos unas ciertas propiedades que queremos que satisfagan los productos interiores y las consideramos como *axiomas*.

DEFINICIÓN. *Un espacio lineal real V tiene un producto interior si a cada par de elementos x e y de V corresponde un número real único* (x, y) *que satisface los siguientes axiomas cualesquiera que sean x, y, z de V y para todos los escalares reales c.*

1) $(x, y) = (y, x)$ (*conmutatividad, o simetría*).
2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ (*distributividad, o linealidad*).
3) $c(x, y) = (cx, y)$ (*asociatividad, u homogeneidad*).
4) $(x, x) > 0$ *si* $x \neq O$ (*positividad*).

Un espacio lineal con un producto interior se llama *espacio real euclídeo.*

Observación: Haciendo $c = 0$ en (3), encontramos que $(O, y) = 0$ para todo y.

En un espacio lineal complejo, un producto interior (x, y) es un número complejo que satisface los mismos axiomas que los del producto interior real, excepto el de la simetría que se reemplaza por la relación

$$(1') \qquad (x, y) = \overline{(y, x)},$$

siendo $\overline{(y, x)}$ el complejo conjugado de (y, x). En el axioma de homogeneidad, el multiplicador escalar c puede ser cualquier número complejo. Del axioma de la homogeneidad y (1'), llegamos a la relación

$$(x, cy) = \overline{(cy, x)} = \bar{c}\overline{(y, x)} = \bar{c}(x, y).$$

Un espacio lineal complejo con un producto interior se llama *espacio euclídeo complejo.* (A veces se usa también la denominación de *espacio unitario.*) Un ejemplo es el espacio vectorial complejo $V_n(\mathbf{C})$ brevemente discutido en la sección 12.16.

Aunque nos interesan principalmente los ejemplos de espacios euclídeos reales, los teoremas de este capítulo son válidos para espacios euclídeos complejos.

Cuando decimos espacio euclídeo sin más, entenderemos que puede ser real o complejo.

El lector debiera comprobar que cada ejemplo que sigue satisface todos los axiomas del producto interior.

EJEMPLO 1. En V_n sea $(x, y) = x \cdot y$, el producto escalar ordinario de x e y.

EJEMPLO 2. Si $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ son dos vectores de V_2, definimos (x, y) mediante la fórmula

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 .$$

Este ejemplo pone de manifiesto que pueden existir más de un producto interior en un espacio lineal dado.

EJEMPLO 3. Sea $C(a, b)$ el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$. Definamos un producto interior de dos funciones f y g con la fórmula

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt .$$

Esta fórmula es análoga a la ecuación (15.5) que define el producto escalar de dos vectores en V_n. Los valores de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ desempeñan el papel de los componentes x_i e y_i y la integración el de la suma.

EJEMPLO 4. En el espacio $C(a, b)$, definimos

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t)\, dt ,$$

donde w es una función positiva fija de $C(a, b)$. Tal función se llama *función peso.* En el ejemplo 3 tenemos $w(t) = 1$ para todo t.

EJEMPLO 5. En el espacio lineal de todos los polinomios reales, definimos

$$(f, g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t)\, dt .$$

Debido al factor exponencial, esta integral impropia converge para todo par de polinomios f y g.

TEOREMA 15.8. *En un espacio euclídeo V, todo producto interior satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \qquad \textit{para todo } x \textit{ y todo } y \textit{ en } V.$$

Además, el signo de igualdad es válido si y sólo si x e y son dependientes.

Demostración. Cuando se demostró el resultado análogo para los vectores en V_n (teorema 12.3), se hizo resaltar que la demostración era una consecuencia de las propiedades del producto escalar citadas en el teorema 12.2 y no se hizo depender de la definición particular utilizada para deducir esas propiedades. Por lo tanto, la misma demostración es válida en cualquier espacio euclídeo real. Cuando aplicamos esa demostración en un espacio euclídeo complejo, obtenemos la desigualdad $(x, y)(y, x) \leq (x, x)(y, y)$, que coincide con la desigualdad de Cauchy-Schwarz ya que

$$(x, y)(y, x) = (x, y)\overline{(x, y)} = |(x, y)|^2 .$$

EJEMPLO. Aplicando el teorema 15.8 al espacio $C(a, b)$ con el producto interior $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, encontramos que la desigualdad de Cauchy-Schwarz se transforma en

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

El producto interior puede utilizarse para introducir el concepto métrico de longitud en cualquier espacio euclídeo.

DEFINICIÓN. *En un espacio euclídeo V, el número no negativo $\|x\|$ definido por la ecuación*

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

se denomina norma del elemento x.

Cuando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa en función de las normas, toma la forma

$$|(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\| .$$

Puesto que es posible definir un producto interior de muchas maneras, la norma de un elemento dependerá del producto interior elegido. Esta falta de uni-

cidad era de esperar. Este hecho es análogo al de que podemos asignar números distintos a la medida de la longitud de un segmento rectilíneo dado, según la elección de escala o unidad de medida. El teorema que sigue da las propiedades fundamentales de las normas que no dependen de la elección de producto interior.

TEOREMA 15.9. *En un espacio euclídeo, toda norma tiene las propiedades siguientes para todos los elementos x e y, y todos los escalares c:*

a) $\|x\| = 0$ si $x = O$.

b) $\|x\| > 0$ si $x \neq O$ (*positividad*).

c) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$ (*homogeneidad*).

d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*desigualdad triangular*).

El signo de igualdad es válido en la desigualdad triangular si y sólo si x e y son dependientes.

Demostración. Las propiedades a), b) y c) se deducen inmediatamente de los axiomas del producto interior. Para demostrar d) observemos que

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) = \\ = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)}\,.$$

La suma $(x, y) + \overline{(x, y)}$ es real. La desigualdad de Cauchy-Schwarz prueba que $|(x, y)| \leq \|x\|\ \|y\|$ y que $|\overline{(x, y)}| \leq \|x\|\ \|y\|$, así que tenemos

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\,.$$

Esto demuestra d). El signo de igualdad en d) es válido siempre que lo sea en la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

DEFINICIÓN. *En un espacio euclídeo real V, el ángulo formado por dos elementos no nulos x e y se define como el número θ del intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisface la ecuación*

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\|\ \|y\|}\,. \tag{15.6}$$

Observación: La desigualdad de Cauchy-Schwarz prueba que el cociente del segundo miembro de (15.6) está en el intervalo $[-1, 1]$, así que existe sólo un θ en $[0, \pi]$ cuyo coseno es igual al de este cociente.

15.11 Ortogonalidad en un espacio euclídeo

DEFINICIÓN. *En un espacio euclídeo V, dos elementos x e y se llaman ortogonales si su producto interior es cero. Un subconjunto S de V es un conjunto*

ortogonal si $(x, y) = 0$ *para todo par de elementos distintos* x *e* y *de* S. *Un conjunto ortogonal se llama ortonormal si cada uno de sus elementos tiene norma* 1.

El elemento cero es ortogonal a todo elemento de V; es el único elemento ortogonal a sí mismo. El siguiente teorema demuestra una relación entre ortogonalidad y dependencia.

TEOREMA 15.10. *En un espacio euclídeo* V, *todo conjunto ortogonal de elementos no nulos es independiente. En particular, en un espacio euclídeo de dimensión finita con* $\dim V = n$, *todo conjunto ortogonal que conste de* n *elementos no nulos es una base para* V.

Demostración. Sea S un conjunto ortogonal de elementos no nulos de V, y supongamos que una cierta combinación lineal finita de elementos de S es cero, sea

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O,$$

donde cada $x_i \in S$. Formando el producto escalar de cada miembro por x_1 y teniendo en cuenta que $(x_1, x_i) = 0$ si $i \neq 1$, encontramos que $c_1(x_1, x_1) = 0$. Pero $(x_1, x_1) \neq 0$ ya que $x_1 \neq O$ con lo cual $c_1 = 0$. Repitiendo el razonamiento cambiando x_1 por x_j, encontramos que cada $c_j = 0$. Esto prueba que S es independiente. Si $\dim V = n$ y si S consta de n elementos, el teorema 15.7 b) demuestra que S es una base para V.

EJEMPLO. En el espacio lineal real $C(0, 2\pi)$ con el producto interior $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$, sea S el conjunto de las funciones trigonométricas $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ dadas por

$$u_0(x) = 1, \qquad u_{2n-1}(x) = \cos nx, \qquad u_{2n}(x) = \operatorname{sen} nx, \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Si $m \neq n$, tenemos las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} u_n(x) u_m(x)\,dx = 0,$$

así que S es un conjunto ortogonal. Puesto que ningún elemento de S es el elemento cero, S es independiente. La norma de cada elemento de S se calcula fácilmente. Tenemos $(u_0, u_0) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ y, para $n \geq 1$, tenemos

$$(u_{2n-1}, u_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad (u_{2n}, u_{2n}) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \pi.$$

Por consiguiente, $\|u_0\| = \sqrt{2\pi}$ y $\|u_n\| = \sqrt{\pi}$ para $n \geq 1$. Dividiendo cada u_n por su norma, obtenemos un conjunto ortonormal $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ donde $\varphi_n = u_n/\|u_n\|$. Así pues, tenemos

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \varphi_{2n}(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \text{para} \quad n \geq 1.$$

En la sección 15.15 demostraremos que todo espacio euclídeo de dimensión finita tiene una base ortogonal. El teorema que sigue muestra cómo se calculan los componentes de un elemento relativos a una tal base.

TEOREMA 15.11. *Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita n, y supongamos que $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortogonal para V. Si un elemento x está expresado como una combinación lineal de los elementos de la base, sea ésta*

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \tag{15.7}$$

entonces sus componentes relativos a la base ordenada $(e_1, \ldots, e_n)$ vienen dados por las fórmulas

$$c_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.8}$$

En particular, si S es una base ortonormal, cada c_j viene dada por

$$c_j = (x, e_j). \tag{15.9}$$

Demostración. Formando el producto interior de cada miembro de (15,7) con e_j, obtenemos

$$(x, e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i(e_i, e_j) = c_j(e_j, e_j)$$

puesto que $(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Esto implica (15.8), y cuando $(e_j, e_j) = 1$, obtenemos (15.9).

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal, la ecuación (15.7) puede escribirse en la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i. \tag{15.10}$$

El siguiente teorema prueba que en un espacio euclídeo real de dimensión finita con una base ortonormal el producto interior de dos elementos es igual a la suma de los productos de sus componentes.

TEOREMA 15.12. *Sea V un espacio euclídeo real de dimensión finita n, y supongamos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal para V. Para todo par de elementos x e y de V, tenemos*

$$(15.11) \qquad (x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)(y, e_i) \quad \textit{(Fórmula de Parseval).}$$

En particular, cuando $x = y$, tenemos

$$(15.12) \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)^2 .$$

Demostración. Formando el producto interior de ambos miembros de la ecuación (15.10) con y, y aplicando la propiedad de linealidad del producto interior, obtenemos (15.11). Cuando $x = y$, la ecuación (15.11) se reduce a (15.12).

Observación: La ecuación (15.11) se denomina como se indica en honor de M. A. Parseval (1776-1836 aproximadamente), que obtuvo este tipo de fórmula en un espacio funcional especial.

15.12 Ejercicios

1. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vectores arbitrarios de V_n. Determinar en cada caso si (x, y) es un producto interior en V_n, si (x, y) está definido por la fórmula que se da. En el caso en que (x, y) no sea un producto interior, decir cuáles son los axiomas que no se satisfacen.

(a) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i |y_i|$.

(b) $(x, y) = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|$.

(c) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j$.

(d) $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 \right)^{1/2}$

(e) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

2. Supongamos que mantenemos los tres primeros axiomas del producto interior real (simetría, linealidad y homogeneidad) pero reemplazamos el cuarto axioma por uno nuevo (4'): $(x, x) = 0$ si y sólo si $x = O$. Demostrar que o $(x, x) > 0$ para todo $x \neq O$ o bien $(x, x) < 0$ para todo $x \neq O$.

[*Indicación:* Suponer $(x, x) > 0$ para un cierto $x \neq O$ y $(y, y) < 0$ para un cierto $y \neq O$. En el espacio generado por $\{x, y\}$, hallar un elemento $z \neq O$ con $(z, z) = 0$.]

Demostrar que en los ejercicios del 3 al 7 cada una de las proposiciones es válida para todo par de elementos x e y de un espacio euclídeo real.

3. $(x, y) = 0$ si y sólo si $\|x + y\| = \|x - y\|$.
4. $(x, y) = 0$ si y sólo si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
5. $(x, y) = 0$ si y sólo si $\|x + cy\| \geq \|x\|$ para todo c real
6. $(x + y, x - y) = 0$ si y sólo si $\|x\| = \|y\|$.
7. Si x e y son elementos no nulos que forman un ángulo θ, entonces

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\| \cos \theta .$$

8. En el espacio lineal real $C(1, e)$, definimos un producto interior por

$$(f, g) = \int_1^e (\log x) f(x) g(x)\, dx .$$

a) Si $f(x) = \sqrt{x}$, calcular $\|f\|$.
b) Hallar un polinomio de primer grado $g(x) = a + bx$ que sea ortogonal a la función constante $f(x) = 1$.

9. En el espacio lineal real $C(-1, 1)$, sea $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Considerar las tres funciones u_1, u_2 u_3 dadas por

$$u_1(t) = 1\,, \qquad u_2(t) = t\,, \qquad u_3(t) = 1 + t\,.$$

Demostrar que dos de ellas son ortogonales, dos forman entre sí un ángulo $\pi/3$, y dos forman entre sí un ángulo $\pi/6$.

10. En el espacio lineal P_n de todos los polinomios reales de grado $\leq n$, definimos

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) .$$

a) Demostrar que (f, g) es un producto interior para P_n.
b) Calcular (f, g) cuando $f(t) = t$ y $g(t) = at + b$.
c) Si $f(t) = t$, hallar todos los polinomios g ortogonales a f.

11. En el espacio lineal de todos los polinomios reales, definimos $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t) g(t)\, dt$.
a) Demostrar que esa integral impropia converge absolutamente para todos los polinomios f y g.
b) Si $x_n(t) = t^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, demostrar que $(x_n, x_m) = (m + n)!$.
c) Calcular (f, g) cuando $f(t) = (t + 1)^2$ y $g(t) = t^2 + 1$.
d) Hallar todos los polinomios de primer grado $g(t) = a + bt$ ortogonales a $f(t) = 1 + t$.

12. En el espacio lineal de todos los polinomios reales, determinar si (f, g) es o no un producto interior cuando se define (f, g) con la fórmula que se da. En el caso en que (f, g) no es un producto interior, indicar qué axiomas no son respetados. En c), f' y g' indican derivadas.

a) $(f,g) = f(1)g(1)$.

b) $(f,g) = \left| \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \right|$.

c) $(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$.

d) $(f,g) = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)$.

13. V está formado con todas las sucesiones indefinidas de números reales $\{x_n\}$ para los cuales las series $\sum x_n^2$ convergen. Si $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ son dos elementos de V, definimos

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

a) Demostrar que esta serie converge absolutamente.

[*Indicación:* Usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para aproximar la suma $\sum_{n=1}^{M} |x_n y_n|$.]

b) Demostrar que V es un espacio lineal con (x, y) como producto interior.

c) Calcular (x, y) si $x_n = 1/n$ e $y_n = 1/(n + 1)$ para $n \geq 1$.

d) Calcular (x, y) si $x_n = 2^n$ e $y_n = 1/n!$ para $n \geq 1$.

14. Sea V el conjunto de todas las funciones reales f continuas en $[0, +\infty)$ y tales que la integral $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t)dt$ converge. Definamos $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)dt$.

a) Demostrar que la integral que da (f, g) converge absolutamente para cada par de funciones f y g de V.

[*Indicación:* Aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para aproximar la integral $\int_0^M e^{-t}|f(t)g(t)|\,dt$.]

b) Demostrar que V es un espacio lineal con (f, g) como producto interior.

c) Calcular (f, g) si $f(t) = e^{-t}$ y $g(t) = t^n$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

15. En un espacio euclídeo complejo, demostrar que el producto interior tiene las siguientes propiedades para todos los elementos x, y, z y todos los complejos a y b.

(a) $(ax, by) = a\bar{b}(x, y)$.

(b) $(x, ay + bz) = \bar{a}(x, y) + \bar{b}(x, z)$.

16. Demostrar que en todo espacio euclídeo son válidas las identidades siguientes.

(a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x)$.

(b) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(x, y) + 2(y, x)$.

(c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.

17. Demostrar que el espacio de todas las funciones complejas continuas en un intervalo $[a, b]$ se transforma en un espacio unitario si definimos un producto interior por la fórmula

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)\overline{g(t)}\,dt ,$$

donde w es una función positiva fija, continua en $[a, b]$.

15.13 Construcción de conjuntos ortogonales. Método de Gram-Schmidt

Todo espacio lineal de dimensión finita tiene una base finita. Si el espacio es euclídeo, podemos construir siempre una base *ortogonal*. Este resultado se dedu-

cirá como consecuencia de un teorema cuya demostración enseña a construir conjuntos ortogonales en cualquier espacio euclídeo, de dimensión finita o de infinitas dimensiones. La construcción se llama *método de Gram-Schmidt,* en memoria de J. P. Gram (1850-1916) y E. Schmidt (1845-1921).

TEOREMA 15.13. TEOREMA DE ORTOGONALIZACIÓN. *Sea $x_1, x_2, \ldots,$ una sucesión finita o indefinida de elementos de un espacio euclídeo V, y designemos con $L(x_1, \ldots, x_k)$ el subespacio generado por los k primeros de esos elementos. Existe una sucesión correspondiente de elementos $y_1, y_2, \ldots,$ de V que tiene las siguientes propiedades para cada entero k:*

a) *El elemento y_{k+1} es ortogonal a todo elemento del subespacio $L(y_1, \ldots y_k)$.*

b) *El subespacio generado por $y_1, \ldots, y_k$ es el mismo que el generado por $x_1, \ldots, x_k$:*

$$L(y_1, \ldots, y_k) = L(x_1, \ldots, x_k).$$

c) *La sucesión $y_1, y_2, \ldots,$ es única, salvo factores escalares. Esto es, si $y_1', y_2', \ldots,$ es otra sucesión de elementos de V que satisfacen las propiedades* a) *y* b), *entonces por cada k existe un escalar c_k tal que $y_k' = c_k y_k$.*

Demostración. Construyamos los elementos $y_1, y_2, \ldots,$ por inducción. Para iniciar el proceso, tomamos $y_1 = x_1$. Supongamos ahora que hemos construido $y_1, \ldots, y_r$ de modo que a) y b) se satisfacen cuando $k = r$. Definamos y_{r+1} mediante la ecuación

$$y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} a_i y_i, \tag{15.13}$$

donde los escalares $a_1, \ldots, a_r$ tienen que determinarse. Para $j \leq r$, el producto interior de y_{r+1} con y_j viene dado por

$$(y_{r+1}, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - \sum_{i=1}^{r} a_i(y_i, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - a_j(y_j, y_j),$$

puesto que $(y_i, y_j) = 0$ si $i \neq j$. Si $y_j \neq O$, podemos hacer y_{r+1} ortogonal a y_j tomando

$$a_j = \frac{(x_{r+1}, y_j)}{(y_j, y_j)} \tag{15.14}$$

Si $y_j = O$, entonces y_{r+1} es ortogonal a y_j para cualquier a_j que se elija, en este caso elegimos $a_j = 0$. Así pues, el elemento y_{r+1} está bien definido y es ortogonal

a cada uno de los anteriores elementos $y_1, \ldots, y_r$. Por consiguiente, es ortogonal a todo elemento del subespacio

$$L(y_1, \ldots, y_r).$$

Esto demuestra a) cuando $k = r + 1$.

Para demostrar b) cuando $k = r + 1$, tenemos que probar que $L(y_1, \ldots, y_{r+1}) = L(x_1, \ldots, x_{r+1})$, dado que $L(y_1, \ldots, y_r) = L(x_1, \ldots, x_r)$. Los r primeros elementos $y_1, \ldots, y_r$ pertenecen a

$$L(x_1, \ldots, x_r)$$

y por tanto están en el subespacio más amplio $L(x_1, \ldots, x_{r+1})$. El nuevo elemento y_{r+1} dado por (15.13) es una diferencia de dos elementos de $L(x_1, \ldots, x_{r+1})$ así que también está en $L(x_1, \ldots, x_{r+1})$. Esto demuestra que

$$L(y_1, \ldots, y_{r+1}) \subseteq L(x_1, \ldots, x_{r+1}).$$

La ecuación (15.13) prueba que x_{r+1} es la suma de dos elementos de $L(y_1, \ldots, y_{r+1})$ con lo que un razonamiento análogo da la inclusión en el otro sentido:

$$L(x_1, \ldots, x_{r+1}) \subseteq L(y_1, \ldots, y_{r+1}).$$

Esto demuestra b) cuando $k = r + 1$. Por lo tanto a) y b) han sido demostrados por inducción respecto de k.

Finalmente demostramos c) por inducción respecto de k. El caso $k = 1$ es trivial. Por consiguiente, supongamos que c) es cierto para $k = r$ y consideremos el elemento y'_{r+1}. En virtud de b), este elemento pertenece a

$$L(y_1, \ldots, y_{r+1}),$$

así que podemos escribir

$$y'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i y_i = z_r + c_{r+1} y_{r+1},$$

donde $z_r \in L(y_1, \ldots, y_r)$. Queremos demostrar que $z_r = O$. Por la propiedad a), y'_{r+1} y $c_{r+1}y_{r+1}$ son ambos ortogonales a z_r. Por consiguiente, su diferencia, z_r, es ortogonal a z_r. Dicho de otro modo, z_r es ortogonal a sí mismo, así que $z_r = O$. Esto completa la demostración del teorema de ortogonalidad.

En la construcción anterior, puede suceder que $y_{r+1} = O$ para algún r. Entonces (15.13) prueba que x_{r+1} es una combinación lineal de $y_1, \ldots, y_r$, y por tanto

de $x_1, \ldots, x_r$, así que los elementos $x_1, \ldots, x_{r+1}$ son dependientes. En otras palabras, si los k primeros elementos $x_1, \ldots, x_k$ son independientes, los elementos correspondientes $y_1, \ldots, y_k$ son *no nulos*. En este caso los coeficientes a_i de (15.13) vienen dados por (15.14), y las fórmulas que definen $y_1, \ldots, y_k$ se convierten en

$$(15.15) \quad y_1 = x_1, \qquad y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Estas fórmulas constituyen el método de Gram-Schmidt para construir un conjunto ortogonal de elementos no nulos $y_1, \ldots, y_k$ que generan el mismo subespacio que el conjunto independiente dado $x_1, \ldots x_k$. En particular, si $x_1, \ldots, x_k$ es una base para un espacio euclídeo de dimensión finita, entonces $y_1, \ldots, y_k$ es una base ortogonal para el mismo espacio. También podemos convertir ésta en una base ortonormal *normalizando* cada uno de los elementos y_i, esto es, dividiéndolo por su norma. Por consiguiente, como corolario del teorema 15.13 tenemos el siguiente.

TEOREMA 15.14. *Todo conjunto euclídeo de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

Si x e y son elementos en un espacio euclídeo, con $y \neq O$, el elemento

$$\frac{(x, y)}{(y, y)} y$$

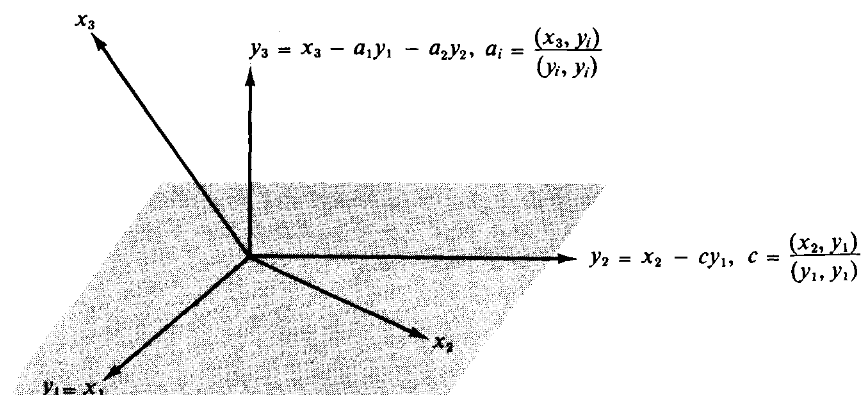


FIGURA 15.1 *El método de Gram-Schmidt en* V_3. *Un conjunto ortogonal* $\{y_1, y_2, y_3\}$ *se construye a partir de un conjunto independiente* $\{x_1, x_2, x_3\}$.

se llama la *proyección de x sobre y*. En el método de Gram-Schmidt (15.15), construimos el elemento y_{r+1} restando de x_{r+1} la proyección de x_{r+1} sobre cada uno de los anteriores elementos $y_1, \ldots, y_r$. La figura 15.1 representa la construcción geométrica en el espacio vectorial V_3.

EJEMPLO 1. En V_4, hallar una base ortonormal para el subespacio generado por los tres vectores $x_1 = (1, -1, 1, -1)$, $x_2 = (5, 1, 1, 1,)$, y $x_3 = (-3, -3, 1, -3)$.

Solución. Aplicando el método de Gram-Schmidt, encontramos

$$y_1 = x_1 = (1, -1, 1, -1)\,,$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}\, y_1 = x_2 - y_1 = (4, 2, 0, 2)\,,$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)}\, y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)}\, y_2 = x_3 - y_1 + y_2 = (0, 0, 0, 0)\,.$$

Puesto que $y_3 = O$, los tres vectores x_1, x_2, x_3 deben ser dependientes. Pero ya que y_1 e y_2 son no nulos, los vectores x_1 y x_2 son independientes. Por consiguiente $L(x_1, x_2, x_3)$ es un subespacio de dimensión 2. El conjunto $\{y_1, y_2\}$ es una base ortogonal para ese subespacio. Dividiendo y_1 e y_2 cada uno por su norma llegamos a una base ortonormal que consta de dos vectores

$$\frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \qquad \text{y} \qquad \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1)\,.$$

EJEMPLO 2. *Polinomios de Legendre.* En el espacio lineal de todos los polinomios, con el producto interior $(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)\, y(t)\, dt$, consideramos la sucesión indefinida $x_0, x_1, x_2, \ldots$, donde $x_n(t) = t^n$. Cuando se aplica a esa sucesión el teorema de ortogonalización se transforma en otra sucesión de polinomios $y_0, y_1, y_2, \ldots$, que el matemático francés A. M. Legendre (1752-1833) fue el primero en encontrar en su trabajo sobre la teoría del potencial. Los primeros de esos polinomios se calculan fácilmente con el método de Gram-Schmidt. Ante todo, tenemos $y_0(t) = x_0(t) = 1$. Puesto que

$$(y_0, y_0) = \int_{-1}^{1} dt = 2 \qquad \text{y} \qquad (x_1, y_0) = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0\,,$$

encontramos que

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{(x_1, y_0)}{(y_0, y_0)}\, y_0(t) = x_1(t) = t\,.$$

A continuación, utilizamos las relaciones

$$(x_2, y_0) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}, \qquad (x_2, y_1) = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0, \qquad (y_1, y_1) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}$$

para obtener

$$y_2(t) = x_2(t) - \frac{(x_2, y_0)}{(y_0, y_0)}\, y_0(t) - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}\, y_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Del mismo modo, encontramos que

$$y_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \qquad y_4(t) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}, \qquad y_5(t) = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t.$$

En el Volumen II encontraremos de nuevo esos polinomios en el estudio de las ecuaciones diferenciales, y probaremos que

$$y_n(t) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n.$$

Los polinomios P_n dados por

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\, y_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$$

se conocen con el nombre de *polinomios de Legendre*. Los polinomios de la sucesión ortonormal correspondiente $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, dados por $\varphi_n = y_n/\|y_n\|$ se llaman *polinomios de Legendre normalizados*. De las fórmulas para $y_0, \ldots, y_5$ dadas antes, encontramos que

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t, \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1), \quad \varphi_3(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5t^3 - 3t),$$

$$\varphi_4(t) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35t^4 - 30t^2 + 3), \qquad \varphi_5(t) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}(63t^5 - 70t^3 + 15t).$$

15.14 Complementos ortogonales. Proyecciones

Sean V un espacio euclídeo y S un subespacio de dimensión finita. Vamos a considerar el siguiente problema de aproximación: *Dado un elemento x de*

V, determinar un elemento en S cuya distancia a x sea lo más pequeña posible. La distancia entre dos elementos x e y se define como la norma $\|x - y\|$.

Antes de discutir este problema en su forma general, consideremos un caso particular, representado en la figura 15.2. Aquí V es el espacio vectorial V_3 y S es un subespacio de dimensión dos, un plano que pasa por el origen. Dado x de V, el problema consiste en encontrar, en el plano S, el punto s más próximo a x.

Si $x \in S$, evidentemente la solución es $s = x$. Si x no pertenece a S, el punto más próximo s se obtiene trazando una perpendicular desde x al plano. Este sencillo ejemplo sugiere una introducción al problema general de aproximación y da origen a la discusión que sigue.

DEFINICIÓN. *Sea S un subconjunto de un espacio euclídeo V. Se dice que un elemento de V es ortogonal a S si es ortogonal a todo elemento de S. El conjunto de todos los elementos ortogonales a S se designa con $S^\perp$ y es el «perpendicular a S».*

Es un ejercicio sencillo comprobar que $S^\perp$ es un subespacio de V, tanto, si S lo es como si no lo es. En el caso en que S sea un subespacio, entonces $S^\perp$ se llama *complemento ortogonal* de S.

EJEMPLO. Si S es un plano que pasa por el origen, como se ve en la figura 15.2, entonces $S^\perp$ es una recta por el origen perpendicular a ese plano. Este ejemplo da también una interpretación geométrica para el teorema siguiente.

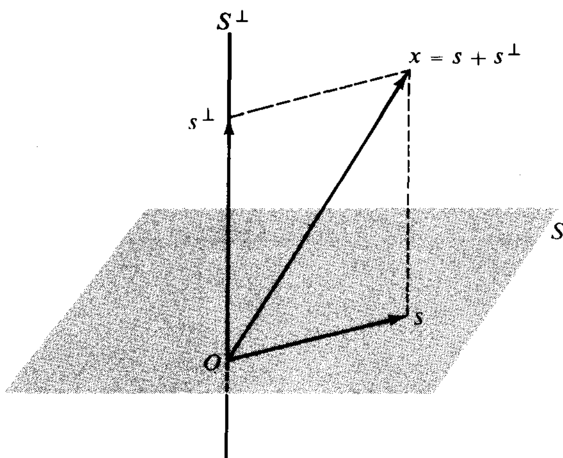


FIGURA 15.2 *Interpretación geométrica del teorema de descomposición ortogonal en V_3.*

TEOREMA 15.15. TEOREMA DE LA DESCOMPOSICION ORTOGONAL. *Sean V un espacio euclídeo y S un subespacio de V de dimensión finita. Todo elemento x de V puede representarse en forma única como una suma de dos elementos, uno de S y otro de $S^{\perp}$. Esto es, tenemos*

$$x = s + s^{\perp}, \quad \textit{donde} \quad s \in S \quad y \quad s^{\perp} \in S^{\perp}. \tag{15.16}$$

Además, la norma de x viene dada por la fórmula pitagórica

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^{\perp}\|^2. \tag{15.17}$$

Demostración. Demostremos primero que existe en realidad una descomposición ortogonal (15.16). Puesto que S es de dimensión finita, tiene una base ortonormal finita, sea ésta $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dado x, definimos los elementos s y $s^{\perp}$ así:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i, \qquad s^{\perp} = x - s. \tag{15.18}$$

Observemos que cada término $(x, e_i)e_i$ es la proyección de x sobre e_i. El elemento s es la suma de las proyeccciones de x sobre cada elemento de la base. Puesto que s es una combinación lineal de los elementos de la base, s está en S. La definición de $s^{\perp}$ prueba que la ecuación (15.16) es válida. Para demostrar que $s^{\perp}$ está en $S^{\perp}$, consideremos el producto interior de $s^{\perp}$ y cualquier elemento e_j de la base. Tenemos

$$(s^{\perp}, e_j) = (x - s, e_j) = (x, e_j) - (s, e_j).$$

Pero de (15.18), encontramos que $(s, e_j) = (x, e_j)$, así que $s^{\perp}$ es ortogonal a e_j. Por consiguiente $s^{\perp}$ es ortogonal a todo elemento de S, lo cual significa que $s^{\perp} \in S^{\perp}$.

Probamos a continuación que la descomposición ortogonal (15.16) es única. Supongamos que x tuviera dos descomposiciones, sean éstas

$$x = s + s^{\perp} \qquad \text{y} \qquad x = t + t^{\perp}, \tag{15.19}$$

donde s y t están en S, y $s^{\perp}$ y $t^{\perp}$ están en $S^{\perp}$. Queremos demostrar que $s = t$ y $s^{\perp} = t^{\perp}$. De (15.19), tenemos $s - t = t^{\perp} - s^{\perp}$, así que sólo necesitamos demostrar que $s - t = O$. Pero $s - t \in S$ y $t^{\perp} - s^{\perp} \in S^{\perp}$ con lo que $s - t$ es ortogonal a $t^{\perp} - s^{\perp}$ e igual a $t^{\perp} - s^{\perp}$. Puesto que el elemento cero es el único elemento ortogonal a sí mismo, debe ser $s - t = O$. Esto demuestra que la descomposición es única.

Finalmente, demostremos que la norma de x viene dada por la fórmula pitagórica. Tenemos

$$\|x\|^2 = (x, x) = (s + s^\perp, s + s^\perp) = (s, s) + (s^\perp, s^\perp),$$

siendo nulos los restantes términos ya que s y $s^\perp$ son ortogonales. Esto demuestra (15.17).

DEFINICIÓN. *Sea S un subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo V, y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal para S. Si $x \in V$, el elemento s definido por la ecuación*

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i$$

se denomina proyección de x sobre el subespacio S.

Demostramos seguidamente que la proyección de x sobre S es la solución del problema de aproximación establecido al comienzo de esta sección.

15.15 Aproximación óptima de elementos de un espacio euclídeo por elementos de un subespacio de dimensión finita

TEOREMA 15.16. TEOREMA DE APROXIMACIÓN. *Sea S un subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo V, y sea x un elemento de V. La proyección de x sobre S es más próxima a x que cualquier otro elemento de S. Esto es, si s es la proyección de x sobre S, tenemos*

$$\|x - s\| \leq \|x - t\|$$

para todo t de S; es válido el signo de igualdad si y sólo si $t = s$.

Demostración. En virtud del teorema 15.15 podemos escribir $x = s + s^\perp$, donde $s \in S$ y $s^\perp \in S^\perp$. Entonces, para cualquier t de S, tenemos

$$x - t = (x - s) + (s - t).$$

Puesto que $s - t \in S$ y $x - s = s^\perp \in S^\perp$, ésta es una descomposición ortogonal de $x - t$, así que su norma viene dada por la fórmula pitagórica

$$\|x - t\|^2 = \|x - s\|^2 + \|s - t\|^2.$$

Pero $||s - t||^2 \geq 0$, con lo que $||x - t||^2 \geq ||x - s||^2$, valiendo el signo igual si y sólo si $s = t$. Esto completa la demostración.

EJEMPLO 1. *Aproximación de funciones continuas en* $[0, 2\pi]$,*por polinomios trigonométricos.* Sea $V = C(0, 2\pi)$, el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 2\pi]$, y definamos un producto interior mediante la ecuación $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$. En la sección 15.11 vimos un conjunto ortonormal de funciones trigonométricas $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, donde

$$(15.20) \qquad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \varphi_{2k}(x) = \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \text{para} \quad k \geq 1 .$$

Los $2n + 1$ elementos $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ generan un subespacio S de dimensión $2n + 1$. Los elementos de S se llaman *polinomios trigonométricos.*

Si $f \in C(0, 2\pi)$, sea f_n la proyección de f sobre el subespacio S. Tenemos entonces

$$(15.21) \qquad f_n = \sum_{k=0}^{2n} (f, \varphi_k)\varphi_k , \qquad \text{donde} \quad (f, \varphi_k) = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_k(x)\,dx .$$

Los números (f, φ_k) se llaman *coeficientes de Fourier* de f. Aplicando las fórmulas (15.20), podemos poner (15.21) en la forma

$$(15.22) \qquad f_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) ,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx , \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\,dx$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. El teorema de aproximación nos dice que el polinomio trigonométrico (15.22) aproxima f mejor que cualquier otro polinomio trigonométrico de S, en el sentido de que la norma $||f - f_n||$ es la más pequeña posible.

EJEMPLO 2. *Aproximación de funciones continuas en* $[-1, 1]$ *por polinomios de grado* $\leq n$. Sea $V = C(-1, 1)$, el espacio de las funciones reales continuas en $[-1, 1]$, y sea $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$. Los $n + 1$ polinomios de Legendre normalizados $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, introducidos en la sección 15.13, generan un subespacio S de dimensión $n + 1$ que consta de todos los polinomios de grado

$\leq n$. Si $f \in C(-1, 1)$, designemos con f_n la proyección de f sobre S. Tenemos entonces

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k , \qquad \text{donde} \quad (f, \varphi_k) = \int_{-1}^{1} f(t)\varphi_k(t)\, dt .$$

Este es el polinomio de grado $\leq n$ para el que la norma $\|f - f_n\|$ es la menor. Por ejemplo, cuando $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$, los coeficientes (f, φ_k) vienen dados por

$$(f, \varphi_k) = \int_{-1}^{1} \operatorname{sen} \pi t\ \varphi_k(t)\, dt .$$

En particular, tenemos $(f, \varphi_0) = 0$ y

$$(f, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \operatorname{sen} \pi t\, dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{\pi} .$$

Por consiguiente el polinomio de primer grado $f_1(t)$ más próximo a $\operatorname{sen} \pi t$ en $[-1, 1]$ es

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{\pi}\, \varphi_1(t) = \frac{3}{\pi}\, t .$$

Puesto que $(f, \varphi_2) = 0$, este es también la mejor aproximación cuadrática.

15.16 Ejercicios

1. En cada caso, hallar una base ortonormal para el subespacio de V_3 generado por los vectores dados.
   (a) $x_1 = (1, 1, 1)$, $\quad x_2 = (1, 0, 1)$, $\quad x_3 = (3, 2, 3)$.
   (b) $x_1 = (1, 1, 1)$, $\quad x_2 = (-1, 1, -1)$, $\quad x_3 = (1, 0, 1)$.
2. En cada caso, hallar una base ortonormal para el subespacio de V_4 generado por los vectores dados.
   (a) $x_1 = (1\ 1, 0, 0)$, $\quad x_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\quad x_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\quad x_4 = (1, 0, 0, 1)$.
   (b) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\quad x_2 = (1, 0, 2, 1)$, $\quad x_3 = (1, 2, -2, 1)$.
3. En el espacio lineal real $C(0, \pi)$ con producto interior $(x, y) = \int_0^{\pi} x(t)y(t)dt$, sea $x_n(t) = \cos nt$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Demostrar que las funciones $y_0, y_1, y_2, \ldots,$ dadas por

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{y} \qquad y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt \qquad \text{para} \quad n \geq 1 ,$$

   forman un conjunto ortonormal que genera el mismo subespacio que $x_0, x_1, x_2, \ldots$

4. En el espacio lineal de todos los polinomios reales, con producto interior $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$, sea $x_n(t) = t^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Demostrar que las funciones

$$y_0(t) = 1\,, \qquad y_1(t) = \sqrt{3}\,(2t - 1)\,, \qquad y_2(t) = \sqrt{5}\,(6t^2 - 6t + 1)$$

forman un conjunto ortonormal que genera el mismo subespacio que $\{x_0, x_1, x_2\}$.
5. Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales f continuas en $[0, +\infty)$ y tales que la integral $\int_0^\infty e^{-t}f^2(t)dt$ converge. Definamos $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t)dt$, y sea y_0, y_1, y_2, ..., el conjunto obtenido aplicando el método de Gram-Schmidt a x_0, x_1, x_2, ..., donde $x_n(t) = t^n$ para $n \geq 0$. Demostrar que $y_0(t) = 1$, $y_1(t) = t - 1$, $y_2(t) = t^2 - 4t + 2$, $y_3(t) = t^3 - 9t^2 + 18t - 6$.
6. En el espacio lineal real $C(1, 3)$ con producto interior $(f, g) = \int_1^3 f(x)g(x)dx$, sea $f(x) = 1/x$ y demostrar que el polinomio constante g más próximo a f es $g = \frac{1}{2}\log 3$. Calcular $\|g - f\|^2$ para este g.
7. En el espacio lineal real $C(0, 2)$ con producto interior $(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x)dx$, sea $f(x) = e^x$ y demostrar que el polinomio constante g más próximo a f es $g = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$. Calcular $\|g - f\|^2$ para este g.
8. En el espacio lineal real $C(-1, 1)$ con producto interior $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, sea $f(x) = e^x$ y hallar el polinomio g más próximo a f. Calcular $\|g - f\|^2$ para este g.
9. En el espacio lineal real $C(0, 2\pi)$ con producto interior $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$, sea $f(x) = x$. En el subespacio generado por $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = \cos x$, $u_2(x) = \operatorname{sen} x$, hallar el polinomio trigonométrico más próximo a f.
10. En el espacio lineal V del ejercicio 5, poner $f(x) = e^{-x}$ y hallar el polinomio de primer grado más próximo a f.

16

TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

16.1 Transformaciones lineales

Uno de los modernos objetivos del Análisis es un estudio amplio de funciones cuyos dominios y recorridos son subconjuntos de espacios lineales. Tales funciones se llaman *transformaciones, aplicaciones,* u *operadores.* Este capítulo trata de los ejemplos más sencillos. llamados transformaciones *lineales,* que se presentan en todas las ramas de la Matemática. Las propiedades de transformaciones más generales se obtienen a menudo aproximándolas mediante transformaciones lineales.

Introducimos primero la notación y la terminología más corriente relativa a funciones cualesquiera. Sean V y W dos conjuntos. El símbolo

$$T : V \to W$$

se usará para indicar que T es una función cuyo dominio es V y cuyos valores están en W. Para cada x de V, el elemento $T(x)$ de W se llama *imagen de x a través de T,* y decimos que *T aplica x en* $T(x)$. Si A es un subconjunto cualquiera de V, el conjunto de todas las imágenes $T(x)$ para x de A se llama *la imagen de A a través de T* y se representa por $T(A)$. La imagen del dominio $V, T(V)$, es el recorrido de T.

Supongamos ahora que V y W son espacios lineales que tienen el mismo conjunto de escalares, y definamos una transformación lineal como sigue.

DEFINICIÓN. *Si V y W son dos espacios lineales, una función $T: V \to W$ se llama transformación lineal de V en W, si tiene las propiedades siguientes:*

a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ *cualesquiera que sean x e y de V,*
b) $T(cx) = cT(x)$ *para todo x de V y cualquier escalar c.*

Esto significa que T conserva la adición y la multiplicación por escalares. Las dos propiedades pueden combinarse en una fórmula que establece que

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$$

para todo x y todo y de V y todos los escalares a y b. Por inducción, tenemos también la relación más general

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

para n elementos cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ de V y n escalares cualesquiera $a_1, \ldots, a_n$.

El lector puede comprobar fácilmente que los ejemplos siguientes son transformaciones lineales.

EJEMPLO 1. *Transformación idéntica.* La transformación $T: V \to V$, donde $T(x) = x$ para todo x de V, se denomina transformación idéntica y se designa por I o por I_V.

EJEMPLO 2. *Transformación cero.* La transformación $T: V \to V$ que aplica cada elemento de V en O se llama transformación cero y se designa por O.

EJEMPLO 3. *Multiplicación por un escalar fijo c.* Tenemos aquí $T: V \to V$, donde $T(x) = cx$ para todo x de V. Cuando $c = 1$, se trata de la transformación idéntica. Cuando $c = 0$, es la transformación cero.

EJEMPLO 4. *Ecuaciones lineales.* Sean $V = V_n$ y $W = V_m$. Dados mn números reales a_{ik}, con $i = 1, 2, \ldots, m$ y $k = 1, 2, \ldots, n$, definamos $T: V_n \to V_m$ como sigue: T aplica cada vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de* V_n en el vector $y = (y_1, \ldots, y_m)$ de V_m de acuerdo con las ecuaciones

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

EJEMPLO 5. *Producto interior con un elemento fijo.* Sea V un espacio euclídeo. Para un elemento fijo z de V, definamos $T: V \to \mathbf{R}$ así: Si $x \in V$, $T(x) = (x, z)$, el producto interior de x por z.

EJEMPLO 6. *Proyección sobre un subespacio.* Sean V un espacio euclídeo y S un subespacio de V de dimensión finita. Definamos $T: V \to S$ así: Si $x \in V$, $T(x)$ es la proyección de x sobre S.

EJEMPLO 7. *El operador derivación.* Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales f derivables en un intervalo abierto (a, b). La transformación lineal que aplica cada función f de V en su derivada f' se llama operador derivación y se designa por D. Así pues, tenemos $D: V \to V$, donde $D(f) = f'$ para cada f de V.

EJEMPLO 8. *El operador integración.* Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$. Si $f \in V$, definamos $g = T(f)$ como la función V dada por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{si} \quad a \leq x \leq b\,.$$

Esta transformación T se llama operador integración.

16.2 Núcleo y recorrido

En esta sección, T representa una transformación lineal de un espacio lineal V en un espacio lineal W.

TEOREMA 16.1. *El conjunto $T(V)$ (recorrido de T) es un subespacio de W. Además, T aplica el elemento cero de V en el elemento cero de W.*

Demostración. Para demostrar que $T(V)$ es un subespacio de W, tan sólo necesitamos comprobar los axiomas de clausura. Tomemos dos elementos cualesquiera de $T(V)$, sean $T(x)$ y $T(y)$. Entonces $T(x) + T(y) = T(x + y)$, así que $T(x) + T(y)$ pertenece a $T(V)$. Asimismo, para cualquier escalar c tenemos $cT(x) = T(cx)$, con lo que $cT(x)$ pertenece a $T(V)$. Por consiguiente, $T(V)$ es un subespacio de W. Tomando $c = 0$ en la relación $T(cx) = cT(x)$, encontramos que $T(O) = O$.

DEFINICIÓN. *El conjunto de todos los elementos de V que T aplica en O se llama núcleo de T y se designa por $N(T)$. Así pues, tenemos*

$$N(T) = \{x \mid x \in V \quad y \quad T(x) = O\}\,.$$

TEOREMA 16.2. *El núcleo de T es un subespacio de V.*

Demostración. Si x e y están en $N(T)$, lo mismo les ocurre a $x + y$ y a cx para todos los escalares c, ya que

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = O \qquad \text{y} \qquad T(cx) = cT(x) = O.$$

Los ejemplos que siguen describen los núcleos de las transformaciones lineales dadas en la sección 16.1.

EJEMPLO 1. *Transformación idéntica.* El núcleo es $\{O\}$, el subespacio constituido tan sólo por el elemento cero.

EJEMPLO 2. *Transformación cero.* Puesto que todo elemento de V se aplica en cero, el núcleo es el mismo V.

EJEMPLO 3. *Multiplicación por un escalar fijo c.* Si $c \neq 0$, el núcleo sólo contiene el elemento O. Si $c = 0$, el núcleo es V.

EJEMPLO 4. *Ecuaciones lineales.* El núcleo está constituido por todos los vectores $(x_1, \ldots, x_n)$ de V_n para los cuales

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m .$$

EJEMPLO 5. *Producto interior por un elemento fijo z.* El núcleo consta de todos los elementos de V ortogonales a z.

EJEMPLO 6. *Proyección sobre un subespacio S.* Si $x \in V$, tenemos la única descomposición ortogonal $x = s + s^{\perp}$ (según el teorema 15.15). Puesto que $T(x) = s$, tenemos $T(x) = O$ si y sólo si $x = s^{\perp}$. Por consiguiente, el núcleo es $S^{\perp}$, el complemento ortogonal de S.

EJEMPLO 7. *Operador derivación.* El núcleo está formado por todas las funciones constantes en el intervalo dado.

EJEMPLO 8. *Operador integración.* El núcleo contiene solamente la función cero.

16.3 Dimensión del núcleo y rango de la transformación

También en esta sección T representa una transformación de un espacio lineal V en un espacio lineal W. Nos interesa la relación entre las dimensiones de V, del núcleo $N(T)$ y del recorrido $T(V)$. Si V es de dimensión finita, el núcleo también lo será por ser un subespacio de V. En el teorema que sigue, demostramos que el recorrido $T(V)$ también es de dimensión finita; su dimensión se llama *rango* de T.

TEOREMA 16.3. *Si V es de dimensión finita, también lo es $T(V)$, y tenemos*

$$\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V . \tag{16.1}$$

Dicho de otro modo, la dimensión del núcleo más el rango de una transformación lineal es igual a la dimensión de su dominio.

Demostración. Sean $n = \dim V$ y $e_1, \ldots, e_k$ una base para $N(T)$, donde $k = \dim N(T) \leq n$. Según el teorema 15.7, esos elementos forman parte de una cierta base de V, por ejemplo de la base

$$e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+r}, \tag{16.2}$$

donde $k + r = n$. Demostraremos que los r elementos

$$T(e_{k+1}), \ldots, T(e_{k+r}) \tag{16.3}$$

forman una base de $T(V)$, demostrando así que $\dim T(V) = r$. Puesto que $k+r=n$, también eso demuestra (16.1).

Demostramos primero que los r elementos de (16.3) generan $T(V)$. Si $y \in T(V)$, es $y = T(x)$ para un cierto x de V, y podemos escribir $x = c_1e_1 + \ldots + c_{k+r}e_{k+r}$. Luego, tenemos

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{k+r} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i T(e_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i) = \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i)$$

puesto que $T(e_1) = \ldots = T(e_k) = O$. Esto demuestra que los elementos (16.3) generan $T(V)$.

Demostremos ahora que esos elementos son independientes. Supongamos que existieran escalares $c_{k+1}, \ldots, c_{k+r}$ tales que

$$\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i) = O .$$

Esto implicaría que

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i e_i\right) = O$$

por lo que el elemento $x = c_{k+1}e_{k+1} + \ldots + c_{k+r}e_{k+r}$ sería del núcleo $N(T)$. Significa esto que existirían escalares $c_1, \ldots, c_k$ tales que $x = c_1e_1 + \ldots + c_ke_k$, con lo que tendríamos

$$x - x = \sum_{i=1}^{k} c_ie_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} c_ie_i = O .$$

Pero como los elementos (16.2) son independientes, todos los escalares c_i han de ser cero. Por consiguiente, los elementos (16.3) son independientes.

Nota: Si V es de dimensión infinita por lo menos uno de los dos $N(T)$ o $T(V)$ es de dimensión infinita. En el ejercicio 30 de la Sección 16.4 se esboza una demostración de este hecho.

16.4 Ejercicios

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10, se define una transformación $T: V_2 \to V_2$ mediante la fórmula dada para $T(x, y)$, donde (x, y) es un punto cualquiera de V_2. Determinar en cada caso si T es lineal. Si T es lineal, decir cuáles son el núcleo y el recorrido, y calcular sus dimensiones

1. $T(x, y) = (y, x)$.
2. $T(x, y) = (x, -y)$.
3. $T(x, y) = (x, 0)$.
4. $T(x, y) = (x, x)$.
5. $T(x, y) = (x^2, y^2)$.
6. $T(x, y) = (e^x, e^y)$.
7. $T(x, y) = (x, 1)$.
8. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$.
9. $T(x, y) = (x - y, x + y)$.
10. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$.

Hacer lo mismo en cada uno de los ejercicios del 11 al 15. Si la transformación $T: V_2 \to V_2$ es la que se indica.

11. T hace girar cualquier punto el mismo ángulo ϕ alrededor del origen. Esto es, T aplica un punto de coordenadas polares (r, θ) en el punto de coordenadas polares $(r, \theta + \phi)$, donde ϕ es fijo. Además, T aplica O en sí mismo.
12. T aplica cada punto en su simétrico respecto a una recta fija que pasa por el origen.
13. T aplica todo punto en el punto $(1, 1)$.
14. T aplica cada punto de coordenadas polares $(r, \ )$ en el punto de coordenadas $(2r, \theta)$. Además, T aplica O en sí mismo.
15. T aplica cada punto de coordenadas polares (r, θ) en el punto de coordenadas $(r, 2\theta)$. Además, T aplica O en sí mismo.

Hacer lo mismo en cada uno de los ejercicios 16 al 23 si la transformación $T: V_3 \to V_3$ está definida por la fórmula que se da para $T(x, y, z)$, donde (x, y, z) es un punto arbitrario de V_3.

16. $T(x, y, z) = (z, y, x)$.
17. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
18. $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.
19. $T(x, y, z) = (x, y, 1)$.
20. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$.
21. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$.
22. $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$.
23. $T(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$.

En cada uno de los ejercicios del 24 al 27, la transformación $T: V \to V$ es la que se indica. Determinar, en cada caso, si T es lineal. Si lo es, decir cuáles son el núcleo y el recorrido y calcular sus dimensiones cuando sean finitas.

24. Sea V el espacio lineal de todos los polinomios reales $p(x)$ de grado $\leq n$. Si $p \in V$, $q = T(p)$ significa que $q(x) = p(x + 1)$ para todo real de x.
25. Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales derivables en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Si $f \in V$, $g = T(f)$ significa que $g(x) = xf'(x)$ para todo x de $(-1, 1)$.
26. Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en $[a, b]$. Si $f \in V$, $g = T(f)$ significa que

$$g(x) = \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(x - t)\, dt \qquad \text{para} \quad a \leq x \leq b\,.$$

27. Sea V el espacio de todas las funciones reales derivables dos veces en un intervalo abierto (a, b). Si $y \in V$, definir $T(y) = y'' + Py' + Qy$ siendo P y Q dos constantes.
28. Sea V el espacio lineal de todas las sucesiones reales convergentes $\{x_n\}$. Definimos una transformación $T: V \to V$ así: Si $x = \{x_n\}$ es una sucesión convergente con límite a, ponemos $T(x) = \{y_n\}$, donde $y_n = a - x_n$ para $n \geq 1$. Demostrar que T es lineal y decir cuáles son el núcleo y el recorrido de T.
29. Sea V el espacio lineal de todas las funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Sea S el subconjunto de V que consta de todas las funciones f que satisfacen las tres ecuaciones

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0\,, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t\, dt = 0\,, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} t\, dt = 0\,.$$

a) Demostrar que S es un subespacio de V.
b) Demostrar que S contiene las funciones $f(x) = \cos nx$ y $f(x) = \operatorname{sen} nx$ para cada $n = 2, 3, \ldots$
c) Demostrar que S es de dimensión infinita.
Sea $T: V \to V$ la transformación lineal definida así: Si $f \in V$, $g = T(f)$ significa que

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(x - t)\} f(t)\, dt\,.$$

d) Demostrar que $T(V)$, el recorrido de T, es de dimensión finita y hallar una base para $T(V)$.
e) Determinar el núcleo de T.
f) Hallar todos los números reales $c \neq 0$ y todas las funciones f no nulas de V tales que $T(f) = cf$. (Obsérvese que una tal f pertenece al recorrido de T.)

30. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal de un espacio lineal V en un espacio lineal W. Si V es de dimensión infinita, demostrar que por lo menos uno de los dos $T(V)$ o $N(T)$ es de dimensión infinita.

[*Indicación:* Supóngase $\dim N(T) = k$, $\dim T(V) = r$, sea $e_1, \ldots, e_k$ una base para $N(T)$ y sean $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots\ e_{k+n}$ elementos independientes de V, siendo $n > r$. Los elementos $T(e_{k+1}), \ldots, T(e_{k+n})$ son dependientes ya que $n > r$. Utilizar este hecho para obtener una contradicción.]

16.5 Operaciones algebraicas con transformaciones lineales

Las funciones cuyos valores pertenecen a un espacio lineal dado W pueden sumarse unas con otras y pueden multiplicarse por escalares de W de acuerdo con la definición siguiente.

DEFINICIÓN. *Sean $S: V \to W$ y $T: V \to W$ dos funciones con un dominio común V y con valores pertenecientes a un espacio lineal W. Si c es un escalar cualquiera de W, definimos la suma $S + T$ y el producto cT por las ecuaciones*

$$(16.4) \qquad (S + T)(x) = S(x) + T(x), \qquad (cT)(x) = cT(x)$$

para todo x de V.

Nos interesa especialmente el caso en el que V es también un espacio lineal con los mismos escalares que W. En este caso designamos con $\mathscr{L}(V, W)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W.

Si S y T son dos transformaciones lineales de $\mathscr{L}(V, W)$, es un sencillo ejercicio comprobar que $S+T$ y cT también son transformaciones lineales de $\mathscr{L}(V, W)$. Aún más. Con las operaciones que acabamos de definir, el mismo conjunto $\mathscr{L}(V, W)$ se transforma en un nuevo espacio lineal. La transformación cero sirve de elemento cero en ese espacio, y la transformación $(-1)T$ es la opuesta de T. Se comprueba que se satisfacen los diez axiomas de un espacio lineal. Por consiguiente, tenemos el siguiente.

TEOREMA 16.4. *El conjunto $\mathscr{L}(V, W)$ de todas las transformaciones lineales de V en W es un espacio lineal con las operaciones de adición y multiplicación por escalares definidas en* (16.4).

Una operación algebraica más interesante que se efectúa con las transformaciones lineales es la *composición o multiplicación* de transformaciones. Esta operación no utiliza la estructura algebraica de un espacio lineal y puede definirse con entera generalidad del siguiente modo:

DEFINICIÓN. *Dados los conjuntos U, V, W. Sean $T: U \to V$ una función con dominio U y valores en V, y $S: V \to W$ otra función con dominio V y valores en W. La composición ST es la función $ST: U \to W$ definida por*

$$(ST)(x) = S[T(x)] \quad \textit{para todo } x \textit{ en } U.$$

Así pues, para aplicar x mediante la composición ST, aplicamos primero x mediante T y luego aplicamos $T(x)$ por medio de S. Esto se representa en la figura 16.1.

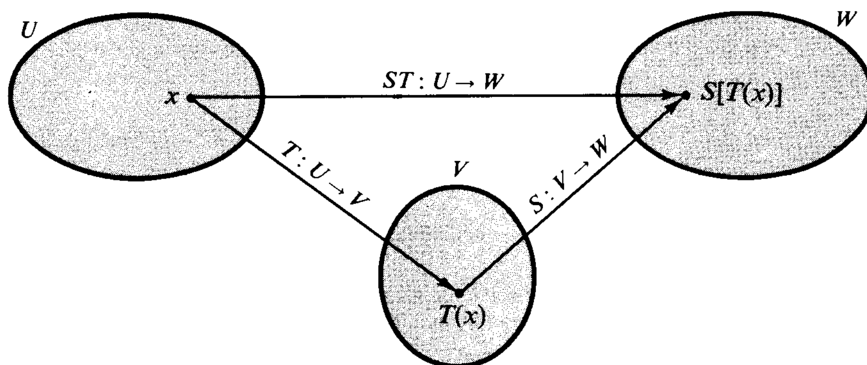


FIGURA 16.1 *Gráfico de la composición de dos transformaciones.*

La composición de funciones reales se ha encontrado repetidas veces en nuestro estudio del Cálculo, y hemos visto que la operación, en general, no es conmutativa. No obstante, como en el caso de las funciones reales, la composición satisface la ley asociativa.

TEOREMA 16.5. *Si $T: U \to V$, $S: V \to W$, y $R: W \to X$ son tres funciones, tenemos*

$$R(ST) = (RS)T$$

Demostración. Las funciones $R(ST)$ y $(RS)T$ tienen ambas dominio U y valores en X. Para cada x de U, tenemos

$$[R(ST)](x) = R[(ST)(x)] = R[S[T(x)]] \quad \text{y} \quad [(RS)T](x) = (RS)[T(x)] = R[S[T(x)]],$$

lo que demuestra que $R(ST) = (RS)T$.

DEFINICIÓN. Sea *$T: V \to V$ una función que aplica V en sí mismo. Definimos inductivamente las potencias enteras de T como sigue:*

$$T^0 = I, \qquad T^n = TT^{n-1} \quad \textit{para} \quad n \geq 1 .$$

Aquí I representa la transformación idéntica. El lector puede comprobar que la ley asociativa implica la ley de exponentes $T^mT^n = T^{m+n}$ para todos los enteros no negativos m y n.

El teorema que sigue prueba que la composición de transformaciones *lineales* es lineal.

TEOREMA 16.6. *Si U, V, W son espacios lineales con los mismos escalares, y si $T: U \to V$ y $S: V \to W$ son transformaciones lineales, la composición $ST: U \to W$ es lineal.*

Demostración. Para todo x y todo y de U y todos los escalares a y b, tenemos

$$(ST)(ax + by) = S[T(ax + by)] = S[aT(x) + bT(y)] = aST(x) + bST(y) .$$

La composición puede combinarse con las operaciones algebraicas de adición y multiplicación por escalares en $\mathscr{L}(V, W)$ llegando al siguiente

TEOREMA 16.7. *Sean U, V, W espacios lineales con los mismos escalares, supongamos que S y T pertenecen a $\mathscr{L}(V, W)$, y sea c un escalar cualquiera.*

a) *Para cualquier función R con valores en V, tenemos*

$$(S + T)R = SR + TR \qquad y \qquad (cS)R = c(SR) .$$

b) *Para cualquier transformación lineal $R: W \to U$, tenemos*

$$R(S + T) = RS + RT \qquad y \qquad R(cS) = c(RS) .$$

La demostración es una consecuencia inmediata de la definición de composición y se deja como ejercicio.

16.6 Inversas

Al estudiar las funciones reales aprendimos cómo construir nuevas funciones mediante la inversión de funciones monótonas. Queremos ahora extender el método de inversión a una clase más general de funciones.

Dada una función T, nuestro objetivo es encontrar, si es posible, otra función S cuya composición con T sea la transformación idéntica. Puesto que la composición, en general, no es conmutativa, tenemos que distinguir ST de TS. Por lo tanto introducimos dos tipos de inversas que llamamos mversa por la derecha e inversa por la izquierda.

DEFINICIÓN. *Dados dos conjuntos V y W y una función $T: V \to W$. Se dice que una función $S: T(V) \to V$ es inversa de T por la izquierda si $S[T(x)] = x$ para todo x de V, esto es, si*

$$ST = I_V ,$$

donde I_V es la transformación idéntica sobre V. Una función $R: T(V) \to V$ se llama inversa de T por la derecha si $T[R(y)] = y$ para todo y de $T(V)$, esto es, si

$$TR = I_{T(V)},$$

donde $I_{T(V)}$ es la transformación idéntica sobre $T(V)$.

EJEMPLO. *Una función sin inversa por la izquierda pero con dos inversas por la derecha.* Sean $V = \{1, 2\}$ y $W = \{0\}$. Definimos $T: V \to W$ como sigue: $T(1) = T(2) = 0$. Esta función tiene dos inversas por la derecha $R: W \to V$ y $R': W \to V$ dadas por

$$R(0) = 1, \qquad R'(0) = 2.$$

No puede tener inversa por la izquierda S ya que ello exigiría

$$1 = S[T(1)] = S(0) \qquad \text{y} \qquad 2 = S[T(2)] = S(0).$$

Este sencillo ejemplo pone de manifiesto que no tiene que existir necesariamente inversa por la izquierda y que la inversa por la derecha no tiene que ser necesariamente única.

Toda función $T: V \to W$ tiene por lo menos una inversa a la derecha. En efecto, cada y de $T(V)$ tiene la forma $y = T(x)$ para al menos un x de V. Si elegimos uno de esos valores x y definimos $R(y) = x$, entonces $T[R(y)] = T(x) = y$ para cada y de $T(V)$, así que R es una inversa por la derecha. La no unicidad puede presentarse debido a que puede haber más de un x de V que se aplique en un y de $T(V)$. Dentro de poco demostraremos (teorema 16.9) que si cada y de $T(V)$ es la imagen de *un sólo* x de V, la inversa por la derecha es única.
Antes demostraremos que si existe inversa por la izquierda es única y, al mismo tiempo, es inversa a la derecha.

TEOREMA 16.8. *Una $T: V \to W$ puede tener a lo más una inversa por la izquierda. Si T tiene inversa por la izquierda S, entonces S es también inversa por la derecha.*

Demostración. Supongamos que T tenga dos inversas por la izquierda, $S: T(V) \to V$ y $S': T(V) \to V$. Elijamos cualquier y en $T(V)$. Demostraremos que $S(y) = S'(y)$. Como $y = T(x)$ para un cierto x de V, tenemos

$$S[T(x)] = x \qquad \text{y} \qquad S'[T(x)] = x,$$

puesto que S y S' son ambas inversas por la izquierda. Por consiguiente $S(y) = x$ y $S'(y) = x$, con lo que $S(y) = S'(y)$ para todo y de $T(V)$. Por lo tanto $S = S'$ lo que demuestra que las inversas por la izquierda coinciden.

Demostremos ahora que toda inversa por la izquierda S es también inversa por la derecha. Elijamos un elemento cualquiera y en $T(V)$. Demostraremos que $T[S(y)] = y$. Puesto que $y \in T(V)$, tenemos $y = T(x)$ para un cierto x de V. Pero S es inversa por la izquierda, así que

$$x = S[T(x)] = S(y).$$

Aplicando T, llegamos a $T(x) = T[S(y)]$. Pero $y = T(x)$, con lo que $y = T[S(y)]$, lo cual completa la demostración.

El teorema que sigue caracteriza todas las funciones que tienen inversa por la izquierda.

TEOREMA 16.9. *Una función $T: V \to W$ tiene inversa por la izquierda si y sólo si T aplica elementos distintos de V en elementos distintos de W; esto es, si y sólo si, para cualesquiera x e y de V,*

(16.5) $$x \neq y \quad \textit{implica} \quad T(x) \neq T(y).$$

Nota: La condición (16.5) es equivalente a la afirmación

(16.6) $$T(x) = T(y) \quad \text{implica} \quad x = y.$$

Una función T que satisface (16.5) o (16.6) para cualesquiera x e y de V se denomina *uno a uno* en V.

Demostración. Supongamos que S es la inversa por la izquierda de T, y que $T(x) = T(y)$. Queremos demostrar que $x = y$. Aplicando S, encontramos $S[T(x)] = S[T(y)]$. Puesto que $S[T(x)] = x$ y $S[T(y)] = y$, esto implica $x = y$. Con ello queda demostrado que una función con inversa por la izquierda es uno a uno en su dominio.

Demostremos ahora el recíproco. Supongamos que T es uno a uno en V. Encontraremos una función $S: T(V) \to V$ que es inversa de T por la izquierda. Si $y \in T(V)$, entonces $y = T(x)$ para un cierto x de V. En virtud de (16.6), existe *exactamente un* x en V para el cual $y = T(x)$. Definamos $S(y)$ como ese x. Esto es, definamos S en $T(V)$ como sigue:

$$S(y) = x \quad \text{implica que} \quad T(x) = y.$$

Tenemos entonces $S[T(x)] = x$ para cada x de V, así que $ST = I_V$. Por consiguiente, la función S así definida es inversa de T por la izquierda.

DEFINICIÓN. *Sea $T: V \to W$ uno a uno en V. La única inversa de T por la izquierda (la cual sabemos que también es inversa por la derecha) se designa por T^{-1}. Decimos que T es invertible, y llamamos a T^{-1} la inversa de T.*

Los resultados de esta sección se refieren a funciones cualesquiera. Seguidamente aplicamos esas ideas a las transformaciones lineales.

16.7 Transformaciones lineales uno a uno

En esta sección, V y W representan espacios lineales con los mismos escalares, y $T: V \to W$ es una transformación lineal de $\mathscr{L}(V, W)$. La linealidad de T nos permite expresar de varias maneras la propiedad de que una transformación lineal sea uno a uno.

TEOREMA 16.10. *Sea $T: V \to W$ una transformación lineal de $\mathscr{L}(V, W)$. Son equivalentes las siguientes proposiciones.*

a) *T es uno a uno en V.*

b) *T es invertible y su inversa $T^{-1}: T(V) \to V$ es lineal.*

c) *Para todo x de V, $T(x) = O$ implica $x = O$. Esto es, el núcleo $N(T)$ contiene solamente el elemento cero de V.*

Demostración. Demostraremos que a) implica b), b) implica c), y c) implica a). Supongamos primero que a) es cierta. T tiene entonces inversa (según el teorema 16.9), y tenemos que demostrar que T^{-1} es lineal. Tomemos dos elementos cualesquiera u y v de $T(V)$. Entonces $u = T(x)$ y $v = T(y)$ para algún x y algún y de V. Para dos escalares cualesquiera a y b, tenemos

$$au + bv = aT(x) + bT(y) = T(ax + by),$$

ya que T es lineal. Luego, aplicando T^{-1}, tenemos

$$T^{-1}(au + bv) = ax + by = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v),$$

así que T^{-1} es lineal. Por consiguiente a) implica b).

Supongamos seguidamente que b) es cierta. Tomemos un x cualquiera de V para el cual $T(x) = O$. Aplicando T^{-1}, encontramos que $x = T^{-1}(O) = O$, puesto que T^{-1} es lineal. Por consiguiente, b) implica c).

Por último, supongamos cierta c). Tomemos dos elementos cualesquiera u y v de V siendo $T(u) = T(v)$. Por la linealidad, tenemos $T(u - v) = T(u) - T(v) = O$, así que $u - v = O$. Por consiguiente, T es uno a uno en V, y queda completada la demostración del teorema.

Cuando V es de dimensión finita, la propiedad de ser uno a uno puede formularse en función de la dependencia y de la dimensionalidad, como se indica en el teorema que sigue.

TEOREMA 16.11. *Sea $T: V \to W$ una transformación lineal de $\mathscr{L}(V, W)$ y supongamos que V es de dimensión finita,* $\dim V = n$. *Entonces son equivalentes las proposiciones siguientes.*

a) *T es uno a uno en V.*

b) *Si $e_1, \ldots, e_p$ son elementos independientes de V, $T(e_1), \ldots, T(e_p)$ son elementos independientes de $T(V)$.*

c) $\dim T(V) = n$.

d) *Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base para V, $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ es una base para $T(V)$.*

Demostración. Probaremos que a) implica b), b) implica c), c) implica d), y d) implica a). Supongamos que a) es cierta. Sean $e_1, \ldots, e_p$ elementos independientes de V y consideremos los elementos $T(e_1), \ldots, T(e_p)$ de $T(V)$. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{p} c_i T(e_i) = O$$

para ciertos escalares $c_1, \ldots, c_p$. En virtud de la linealidad, obtenemos

$$T\left(\sum_{i=1}^{p} c_i e_i\right) = O\,, \quad \text{y por tanto} \quad \sum_{i=1}^{p} c_i e_i = O$$

ya que T es uno a uno. Pero $e_1, \ldots, e_p$ son independientes, así que $c_1 = \ldots = c_p = 0$. Por consiguiente a) implica b).

Supongamos ahora que es cierta b). Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para V. Según b), los n elementos $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ de $T(V)$ son independientes. Por consiguiente, $\dim T(V) \geq n$. Pero, según el teorema 16.3, tenemos $\dim T(V) \leq n$. Luego $\dim T(V) = n$, con lo cual b) implica c).

Supongamos, seguidamente, que es cierta c) y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para V. Tomemos un elemento cualquiera y en $T(V)$. Entonces $y = T(x)$ para algún x en V, así que tenemos

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\,, \quad \text{y por tanto} \quad y = T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(e_i)\,.$$

Por consiguiente $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ genera $T(V)$. Pero hemos supuesto que $\dim T(V) = n$, así que $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ es una base para $T(V)$. Por consiguiente c) implica d).

Por último, supongamos cierta d). Demostraremos que $T(x) = O$ implica $x = O$. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para V. Si $x \in V$, podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad \text{y por tanto} \quad T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(e_i).$$

Si $T(x) = O$, entonces $c_1 = \ldots = c_n = 0$, puesto que los elementos $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ son independientes. Por lo tanto $x = O$, con lo cual T es uno a uno en V. Así pues, d) implica a) y el teorema queda demostrado.

16.8 Ejercicios

1. Sea $V = \{0, 1\}$. Describir todas las funciones $T: V \to V$. En total son cuatro. Desígnense con T_1, T_2, T_3, T_4 y construir una tabla de multiplicación que muestre la composición de cada par. Indicar cuáles son uno a uno en V y dar sus inversas.
2. Sea $V = \{0, 1, 2\}$. Describir todas las funciones $T: V \to V$ para las cuales $T(V) = V$. En total son seis. Desígnense con $T_1, T_2, \ldots, T_6$ y construir una tabla de multiplicación que muestre la composición de cada par. Indicar cuáles son uno a uno en V, y dar sus inversas.

En cada uno de los ejercicios del 3 al 12, una función $T: V_2 \to V_2$ se define con la fórmula que se da para $T(x, y)$, siendo (x, y) un punto cualquiera de V_2. Determinar en cada caso si T es uno a uno en V_2. Si es así, describir su recorrido $T(V_2)$; para cada punto (u, v) de $T(V_2)$; poner $(x, y) = T^{-1}(u, v)$ y dar fórmulas para determinar x e y en función de u y v.

3. $T(x, y) = (y, x)$.
4. $T(x, y) = (x, -y)$.
5. $T(x, y) = (x, 0)$.
6. $T(x, y) = (x, x)$.
7. $T(x, y) = (x^2, y^2)$.
8. $T(x, y) = (e^x, e^y)$.
9. $T(x, y) = (x, 1)$.
10. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$.
11. $T(x, y) = (x - y, x + y)$.
12. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$.

En cada uno de los ejercicios del 13 al 20, se define una función $T: V_3 \to V_3$ con la fórmula que se da para $T(x, y, z)$, siendo (x, y, z) un punto cualquiera de V_3. En cada caso, determinar si T es uno a uno en V_3. Si es así, describir su recorrido $T(V_3)$; para cada punto (u, v, w) de $T(V_3)$, póngase $(x, y, z) = T^{-1}(u, v, w)$ y dar fórmulas para la determinación de x, y, z en función de u, v, y w.

13. $T(x, y, z) = (z, y, x)$.
14. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
15. $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.
16. $T(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$.
17. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$.
18. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$.
19. $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$.
20. $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

21. Sea $T: V \to V$ una función que aplica V en sí mismo. Por inducción se definen las potencias con las fórmulas $T^0 = I$, $T^n = TT^{n-1}$ para $n \geq 1$. Demostrar que la ley asociativa para la composición implica la ley de exponente $T^m T^n = T^{m+n}$. Si T es invertible, demostrar que T^n también es invertible y que $(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n$.

En los ejercicios del 22 al 25, S y T representan funciones con dominio V y valores en V. En general $ST \neq TS$. Si $ST = TS$, decimos que S y T *conmutan.*

22. Si S y T conmutan, demostrar que $(ST)^n = S^nT^n$ para cualquier entero $n \geq 0$.
23. Si S y T son invertibles, demostrar que ST también lo es y que $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. Dicho de otro modo, la inversa de ST es la composición de las inversas, tomadas en orden inverso.
24. Si S y T son invertibles y conmutan, demostrar que sus inversas también conmutan.
25. Sea V un espacio lineal. Si S y T conmutan, demostrar que

$$(S + T)^2 = S^2 + 2ST + T^2 \qquad \text{y} \qquad (S + T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3 .$$

Indicar cómo deben modificarse esas fórmulas si $ST \neq TS$.

26. Sean S y T las transformaciones lineales de V_3 en V_3 definidas por las fórmulas $S(x, y, z) = (z, y, x)$ y $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$, siendo (x, y, z) un punto cualquiera de V_3
a) Determinar la imagen de (x, y, z) a través de cada una de las transformaciones siguientes: ST, TS, $ST - TS$, S^2, T^2, $(ST)^2$, $(TS)^2$, $(ST - TS)^2$.
b) Demostrar que S y T son uno a uno en V_3 y hallar la imagen de (u, v, w) a través de cada una de las transformaciones: S^{-1}, T^{-1}, $(ST)^{-1}$, $(TS)^{-1}$.
c) Hallar la imagen de (x, y, z) a través de $(T - I)^n$ para cada $n \geq 1$.
27. Sea V el espacio lineal de todos los polinomios reales $p(x)$. Sean D el operador derivación y T el operador integración que aplica cada polinomio p en un polinomio q dado por $q(x) = \int_0^x p(t)dt$. Demostrar que $DT = I$ pero que $TD \neq I$. Describir el núcleo y el recorrido de TD.
28. Sea V el espacio lineal de todos los polinomios reales $p(x)$. Sean D el operador derivación y T la transformación lineal que aplica $p(x)$ en $xp'(x)$.
a) Poner $p(x) = 2 + 3x - x^2 + 4x^3$ y determinar la imagen de p a través de cada una de las transformaciones siguientes: D, T, DT, TD, $DT - TD$, $T^2D^2 - D^2T^2$.
b) Determinar los polinomios p de V para los cuales $T(p) = p$.
c) Determinar los polinomios p de V para los cuales $(DT - 2D)(p) = O$.
d) Determinar los polinomios p de V para los cuales $(DT - TD)^n(p) = D^n(p)$.
29. Sean V y D como en el ejercicio 28 pero T es la transformación lineal que aplica $p(x)$ en $xp(x)$. Demostrar que $DT - TD = I$ y que $DT^n - T^nD = nT^{n-1}$ para todo $n \geq 2$.
30. Sean S y T dos transformaciones lineales de $\mathscr{L}(V, V)$ y supongamos que $ST - TS = I$. Demostrar que $ST^n - T^nS = nT^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.
31. Sea V el espacio lineal de todos los polinomios $p(x)$. Sean R, S, T funciones que aplican un polinomio cualquiera $p(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$ de V en los polinomios $r(x)$, $s(x)$ y $t(x)$ respectivamente, siendo

$$r(x) = p(0), \qquad s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}, \qquad t(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+1}.$$

a) Poner $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$ y determinar la imagen de p a través de cada una de las transformaciones siguientes: R, S, T, ST, TS, $(TS)^2$, T^2S^2, S^2T^2, TRS, RST.
b) Demostrar que R, S y T son lineales y determinar el núcleo y el recorrido de cada una.
c) Demostrar que T es uno a uno en V y determinar su inversa.
d) Si $n \geq 1$, expresar $(TS)^n$ y S^nT^n en función de I y R.
32. En relación con el ejercicio 28 de la Sección 16.4. Determinar si T es uno a uno en V. Si lo es, decir cuál es la inversa.

16.9 Transformaciones lineales con valores asignados

Si V es de dimensión finita, siempre podemos construir una transformación lineal $T: V \to W$ con valores asignados a los elementos base de V, como se explica en el teorema siguiente.

TEOREMA 16.12. *Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base para un espacio lineal n-dimensional V. Sean $u_1, \ldots, u_n$, n elementos arbitrarios de un espacio lineal W. Existe entonces una y sólo una transformación $T: V \to W$ tal que*

$$T(e_k) = u_k \quad para \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16.7}$$

Esta transformación T aplica un elemento cualquiera x de V del modo siguiente:

$$Si \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad entonces \ T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k. \tag{16.8}$$

Demostración. Todo x de V puede expresarse en forma única como combinación lineal de $e_1, \ldots, e_n$, siendo los multiplicadores $x_1, \ldots, x_n$ los componentes de x respecto a la base ordenada $(e_1, \ldots, e_n)$. Si definimos T mediante (16.8), conviene comprobar que T es lineal. Si $x = e_k$ para un cierto k, entonces todos los componentes de x son 0 excepto el k-ésimo, que es 1, con lo que (16.8) da $T(e_k) = u_k$, como queríamos.

Para demostrar que sólo existe una transformación lineal que satisface (16.7), sea T' otra y calculemos $T'(x)$. Encontramos que

$$T'(x) = T'\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k T'(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k = T(x).$$

Puesto que $T'(x) = T(x)$ para todo x de V, tenemos $T' = T$, lo cual completa la demostración.

EJEMPLO. Determinar la transformación lineal $T: V_2 \to V_2$ que aplique los elementos base $i = (1, 0)$ y $j = (0, 1)$ del modo siguiente

$$T(i) = i + j, \qquad T(j) = 2i - j.$$

Solución. Si $x = x_1 i + x_2 j$ es un elemento arbitrario de V_2, entonces $T(x)$ viene dado por

$$T(x) = x_1 T(i) + x_2 T(j) = x_1(i + j) + x_2(2i - j) = (x_1 + 2x_2)i + (x_1 - x_2)j.$$

16.10 Representación matricial de las transformaciones lineales

El teorema 16.12 demuestra que una transformación lineal $T: V \to W$ de un espacio lineal de dimensión finita V está determinada por su acción sobre un conjunto dado de elementos base $e_1, \ldots, e_n$. Supongamos ahora que el espacio W también es de dimensión finita, por ejemplo $\dim W = m$, y sea $w_1, \ldots, w_n$ una base para W. (Las dimensiones n y m pueden ser o no iguales.) Puesto que T tiene los valores en W, cada elemento $T(e_k)$ puede expresarse, con unicidad, como una combinación lineal de los elementos de la base $w_1, \ldots, w_m$, por ejemplo

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i ,$$

donde $t_{1k}, \ldots, t_{mk}$ son los componentes de $T(e_k)$ respecto a la base ordenada $(w_1, \ldots, w_m)$. Dispondremos verticalmente la m-pla $(t_{1k}, \ldots, t_{mk})$, como a continuación se indica:

(16.9)
$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{mk} \end{bmatrix}$$

Esto se llama *vector columna* o *matriz columna*. Tenemos una tal columna para cada uno de los n elementos $T(e_1), \ldots, T(e_n)$. Colocándolas una junto a otra y encerrándolas en un par de corchetes obtenemos la disposición rectangular siguiente:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

Este cuadro se llama *matriz* y consta de m filas y n columnas. La llamamos matriz $m \times n$. La primera fila es la matriz $1 \times n$ $(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1n})$. La matriz $m \times 1$ (16.9) es la k-ésima columna. Los escalares t_{ik} van afectados con dos índices, el

primero i indica la *fila* y el segundo k indica la *columna* en las cuales aparece t_{ik}. A t_{ik} le llamamos el *elemento ik* de la matriz. También se utiliza la notación abreviada

$$(t_{ik}), \qquad \text{o} \qquad (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n},$$

para designar la matriz cuyo elemento ik es t_{ik}.

Así pues, toda transformación lineal T de un espacio n-dimensional V en un espacio m-dimensional W da origen a una matriz $m \times n$ (t_{ik}) cuyas columnas son los componentes de $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ relativos a la base $(w_1, \ldots, w_m)$. La llamamos *representación matricial* de T relativa a unas bases ordenadas $(e_1, \ldots, e_n)$ de V y $(w_1, \ldots, w_m)$ para W. Una vez conocida la matriz (t_{ik}), los componentes de un elemento cualquiera $T(x)$ con relación a la base $(w_1, \ldots, w_m)$ pueden determinarse como se explica en el teorema que sigue.

TEOREMA 16.13. *Sea T una transformación lineal perteneciente a $\mathscr{L}(V, W)$, donde* $\dim V = n$ *y* $\dim W = m$. *Sean $(e_1, \ldots, e_n)$ y $(w_1, \ldots, w_m)$ bases ordenadas de V y W, respectivamente, y (t_{ik}) la matriz $m \times n$ cuyos elementos están determinados por las ecuaciones*

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i, \quad \textit{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16.10}$$

Entonces un elemento cualquiera

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \tag{16.11}$$

de V con componentes $(x_1, \ldots, x_n)$ relativo a $(e_1, \ldots, e_n)$ es aplicado por T en el elemento

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i \tag{16.12}$$

en W con componentes $(y_1, \ldots, y_m)$ relativos a $(w_1, \ldots, w_m)$. Los y_i están ligados a los componentes de x mediante las ecuaciones lineales

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k \quad \textit{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{16.13}$$

Demostración. Aplicando T a cada uno de los miembros de (16.11) y utilizando (16.10), obtenemos

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k \right) w_i = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i ,$$

en donde cada y_i viene dada por (16.13). Esto completa la demostración.

Habiendo elegido un par de bases $(e_1, \ldots, e_n)$ y $(w_1, \ldots, w_m)$ para V y W, respectivamente, toda transformación lineal $T: V \rightarrow W$ tiene una representación matricial (t_{ik}). Recíprocamente, si disponemos de mn escalares colocados formando una matriz rectangular (t_{ik}) y elegimos un par de bases ordenadas para V y W, es fácil demostrar que existe exactamente una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ que tiene esa representación matricial. Definimos T simplemente con los elementos base de V por medio de las ecuaciones (16.10). Entonces, según el teorema 16.12, existe una y sólo una transformación $T: V \rightarrow W$ con esos valores asignados. La imagen $T(x)$ de un punto x de V viene entonces dada por las ecuaciones (16.12) y (16.13).

EJEMPLO 1. *Construcción de una transformación lineal a partir de una matriz dada.* Supongamos que disponemos de la matriz 2×3.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Elijamos las bases usuales de vectores coordenados unitarios para V_3 y V_2. Entonces la matriz dada representa una transformación lineal $T: V_3 \rightarrow V_2$ que aplica un vector cualquiera (x_1, x_2, x_3) de V_3 en el vector (y_1, y_2) de V_2 de acuerdo con las ecuaciones lineales

$$y_1 = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = x_1 + 0x_2 + 4x_3 .$$

EJEMPLO 2. *Construcción de una representación matricial de una transformación lineal dada.* Sea V el espacio lineal de todos los polinomios reales $p(x)$ de grado ≤ 3. Este espacio tiene dimensión 4, y elegimos la base $(1, x, x^2, x^3)$. Sea D el operador derivación que aplica cada polinomio $p(x)$ de V en su derivada $p'(x)$. Podemos considerar D como una transformación lineal de V en W, donde W es el espacio tri dimensional de todos los polinomios reales de grado ≤ 2. En W elegimos la base $(1, x, x^2)$. Para encontrar la representación matricial de D relativa a esa elección de bases, transformamos (derivamos) cada elemento base

de V y lo expresamos como una combinación lineal de los elementos base de W. Así pues, encontramos que

$$D(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \qquad D(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \qquad D(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2.$$

Los coeficientes de esos polinomios determinan las *columnas* de la representación matricial de D. Por consiguiente, la representación pedida viene dada por la siguiente matriz 3×4.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para hacer notar el hecho de que la representación matricial depende no solamente de los elementos base sino también de su orden, invirtamos el orden de los elementos base en W y utilicemos, en su lugar, la base ordenada $(x^2, x, 1)$. Entonces los elementos base de V se transforman en los mismos polinomios obtenidos antes, pero los componentes de éstos relativos a la nueva base $(x^2, x, 1)$ aparecen en orden inverso. Por consiguiente, la representación matricial de D ahora es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculemos una tercera representación matricial de D, usando la base $(1,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2,\ 1 + x + x^2 + x^3)$ para V, y la base $(1, x, x^2)$ para W. Los elementos base de V se transforman así:

$$D(1) = 0, \qquad D(1 + x) = 1, \qquad D(1 + x + x^2) = 1 + 2x,$$

$$D(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + 2x + 3x^2,$$

con lo que la representación matricial en este caso es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

16.11 Construcción de una representación matricial en forma diagonal

Ya que es posible obtener distintas representaciones matriciales de una transformación lineal dada mediante la elección de bases distintas, parece natural intentar elegir bases de modo que la matriz resultante tenga una forma lo más sencilla posible. El teorema que sigue prueba que podemos hacer todos los elementos 0 excepto los de la diagonal que va desde el vértice superior izquierdo al inferior derecho. A lo largo de esa diagonal habrá una hilera de unos seguidos de ceros, siendo el número de unos igual al rango de la transformación. Una matriz (t_{ik}) con todos los elementos $t_{ik} = 0$ cuando $i \neq k$ se llama *matriz diagonal.*

TEOREMA 16.14. *Sean V y W espacios lineales de dimensión finita, con* $\dim V = n$ y $\dim W = m$. *Supongamos que $T \in \mathscr{L}(V, W)$ y que $r = \dim T(V)$ represente el rango de T. Existen entonces una base $(e_1, \ldots, e_n)$ para V y otra $(w_1, \ldots, w_n)$ para W tales que*

$$T(e_i) = w_i \quad para \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{16.14}$$

y

$$T(e_i) = O \quad para \quad i = r + 1, \ldots, n. \tag{16.15}$$

Por consiguiente, la matriz (t_{ik}) de T relativa a esas bases tiene todos los elementos cero excepto los r elementos de la diagonal que valen

$$t_{11} = t_{22} = \cdots = t_{rr} = 1 .$$

Demostración. Construimos primero una base para W. Puesto que $T(V)$ es un subespacio de W con $\dim T(V) = r$, el espacio $T(V)$ tiene una base de r elementos en W, sean éstos $w_1, \ldots, w_r$. Según el teorema 15.7, esos elementos forman un subconjunto de una cierta base para W. Por consiguiente podemos adjuntar unos elementos $w_{r+1}, \ldots, w_m$ de modo que

$$(w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m) \tag{16.16}$$

sea una base para W.

Seguidamente construimos una base para V. Cada uno de los r primeros elementos w_i de (16.16) es la imagen por lo menos de un elemento de V. Elijamos uno de tales elementos de V y llamémosle e_i. Entonces $T(e_i) = w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, r$ así que (16.14) se satisface. Sea ahora k la dimensión del núcleo $N(T)$. Según el teorema 16.3 tenemos $n = k + r$. Puesto que $N(T) = k$, el espacio $N(T)$

tiene una base que consta de k elementos de V que designamos por $e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}$. Para cada uno de esos elementos, la ecuación (16.15) se satisface. Por lo tanto, para completar la demostración, tenemos que demostrar que el conjunto ordenado

(16.17) $$(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+k})$$

es una base para V. Ya que $\dim V = n = r + k$, sólo tenemos que demostrar que esos elementos son independientes. Supongamos que una cierta combinación lineal de ellos sea cero, por ejemplo

(16.18) $$\sum_{i=1}^{r+k} c_i e_i = O.$$

Aplicando T y haciendo uso de las ecuaciones (16.14) y (16.15), encontramos que

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = O.$$

Pero $w_1, \ldots, w_r$ son independientes, y por tanto $c_1 = \ldots = c_r = 0$. Por consiguiente, los r primeros términos de (16.18) son cero, por lo cual (16.18) se reduce a

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} c_i e_i = O.$$

Pero $e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}$ son independientes puesto que forman una base para $N(T)$, y por tanto $c_{r+1} = \ldots = c_{r+k} = 0$. Por consiguiente, todos los c_i de (16.18) son cero, luego los elementos de (16.17) forman una base para V. Esto completa la demostración.

EJEMPLO. Nos referimos al ejemplo 2 de la sección 16.10, donde D es el operador derivación que aplica el espacio V de los polinomios de grado ≤ 3 en el espacio W de los polinomios de grado ≤ 2. En este ejemplo, el recorrido $T(V) = W$, así que T tiene rango 3. Aplicando el método seguido en el teorema 16.14, elegimos cualquier base para W, por ejemplo la base $(1, x, x^2)$. Un conjunto de polinomios de V que se aplica sobre esos elementos es $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3)$. Ampliamos este conjunto para lograr una base para V adjuntando el polinomio constante 1, que es una base para el núcleo de D. Por consiguiente, si empleamos la base $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3, 1)$ para V y la base $(1, x, x^2)$ para W, la correspondiente representación matricial para D tiene la forma diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

16.12 Ejercicios

En todos los ejercicios en los que se considere el espacio vectorial V_n, la base que se utilizará será la de los vectores coordenados unitarios si no se dice lo contrario. En los ejercicios relativos a la matriz de una transformación lineal $T: V \to W$ siendo $V = W$, si no se indica lo contrario tomaremos la misma base en V y en W.

1. Determinar la matriz de cada una de las siguientes transformaciones lineales de V_n en V_n:
   a) la transformación idéntica,
   b) la transformación cero,
   c) multiplicación por un escalar fijo c.
2. Determinar la matriz para cada una de las siguientes proyecciones.

   (a) $T: V_3 \to V_2$, donde $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.
   (b) $T: V_3 \to V_2$, donde $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$.
   (c) $T: V_5 \to V_3$, donde $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$.

3. Una transformación lineal $T: V_2 \to V_2$ aplica los vectores base i y j como sigue:

   $$T(i) = i + j, \qquad T(j) = 2i - j.$$

   a) Calcular $T(3i - 4j)$ y $T^2(3i - 4j)$ en función de i y j.
   b) Determinar la matriz de T y de T^2.
   c) Resolver la parte b) si la base (i, j) se reemplaza por (e_1, e_2), siendo $e_1 = i - j$, $e_2 = 3i + j$.
4. Una transformación lineal $T: V_2 \to V_2$ se define así: Cada vector (x, y) se transforma en su simétrico respecto al eje y y luego se duplica su longitud para obtener $T(x, y)$. Determinar la matriz de T y la de T^2.
5. Sea $T: V_3 \to V_3$ una transformación lineal tal que

   $$T(k) = 2i + 3j + 5k, \qquad T(j + k) = i, \qquad T(i + j + k) = j - k.$$

   a) Calcular $T(i + 2j + 3k)$ y determinar la dimensión del núcleo y el rango de T.
   b) Determinar la matriz de T.
6. Para la transformación lineal del ejercicio 5, se consideran las dos bases coincidentes con (e_1, e_2, e_3), siendo $e_1 = (2, 3, 5)$, $e_2 = (1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 1, -1)$ y determinar la matriz T relativa a las nuevas bases.
7. Una transformación lineal $T: V_3 \to V_2$ aplica los vectores base como sigue: $T(i) = (0, 0)$, $T(j) = (1, 1)$, $T(k) = (1, -1)$.
   a) Calcular $T(4i - j + k)$ y determinar la dimensión del núcleo y el rango de T.
   b) Determinar la matriz de T.
   c) Utilizando la base (i, j, k) en V_3 y la (w_1, w_2) en V_2, siendo $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (1, 2)$, determinar la matriz de T relativa a esas bases.
   d) Hallar las bases (e_1, e_2, e_3) para V_3 y (w_1, w_2) para V_2 para las cuales la matriz de T tenga la forma diagonal.
8. Una transformación lineal $T: V_2 \to V_3$ aplica los vectores base como sigue: $T(i) = (1, 0, 1)$, $T(j) = (-1, 0, 1)$.
   a) Calcular $T(2i - 3j)$ y determinar la dimensión del núcleo y el rango de T.
   b) Determinar la matriz de T.
   c) Hallar bases (e_1, e_2) para V_2 y $(w_1 . w_2, w_3)$ para V_3 para las cuales la matriz de T tiene forma diagonal.
9. Resolver el ejercicio 8 si $T(i) = (1, 0, 1)$ y $T(j) = (1, 1, 1)$.

10. Sean V y W dos espacios lineales, ambos de dimensión 2 y con la misma base (e_1, e_2). Sea $T: V \to W$ una transformación lineal tal que

$$T(e_1 + e_2) = 3e_1 + 9e_2, \qquad T(3e_1 + 2e_2) = 7e_1 + 23e_2.$$

a) Calcular $T(e_2 - e_1)$ y determinar la dimensión del núcleo y el rango de T.
b) Determinar la matriz de T relativa a la base dada.
c) Utilizar para V la base (e_1, e_2) y hallar una nueva base de la forma $(e_1 + ae_2, 2e_1 + be_2)$ para W, para la que la matriz de T tenga la forma diagonal.

En el espacio lineal de todas las funciones reales, cada uno de los siguientes conjuntos es independiente y genera un subespacio V de dimensión finita. Utilizar el conjunto dado como base para V y sea $D: V \to V$ el operador derivación. En cada caso, hallar la matriz de D y la de D^2 relativa a la base que se elige.

11. $(\operatorname{sen} x, \cos x)$.
12. $(1, x, e^x)$.
13. $(1, 1 + x, 1 + x + e^x)$.
14. (e^x, xe^x).
15. $(-\cos x, \operatorname{sen} x)$.
16. $(\operatorname{sen} x, \cos x, x \operatorname{sen} x, x \cos x)$.
17. $(e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x)$.
18. $(e^{2x} \operatorname{sen} 3x, e^{2x} \cos 3x)$.
19. Elegir la base $(1, x, x^2, x^3)$ en el espacio lineal V de todos los polinomios reales de grado ≤ 3. Sean D el operador derivación y $T: V \to V$ la transformación lineal que aplica $p(x)$ en $xp'(x)$. Con relación a la base dada, determinar la matriz de cada una de las transformaciones siguientes: a) T; b) DT; c) TD; d) $TD - DT$; e) T^2; f) $T^2D^2 - D^2T^2$.
20. Con respecto al ejercicio 19. Sea W la imagen de V a través de TD. Hallar bases para V y W para las que la matriz TD tenga forma diagonal.

16.13 Espacios lineales de matrices

Hemos visto cómo las matrices se presentan espontáneamente como representaciones de las transformaciones lineales. También se pueden considerar las matrices como elementos existentes con independencia de las transformaciones lineales. Como tales elementos, forman otra clase de objetos matemáticos que pueden definirse por medio de las operaciones algebraicas que pueden realizarse con ellos. La relación con las transformaciones lineales da origen a esas definiciones, pero tal relación será por el momento ignorada.

Sean m y n dos enteros positivos y sea $I_{m,n}$ el conjunto de todos los pares de enteros (i, j) tales que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Cualquier función A cuyo dominio sea $I_{m,n}$ se denomina *matriz* $m \times n$. El valor de la función $A(i, j)$ se llama *elemento ij* de la matriz y se designará también por a_{ij}. Ordinariamente se disponen todos los valores de la función en un rectángulo que consta de m filas y n columnas, del modo siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los elementos a_{ij} pueden ser objetos arbitrarios de naturaleza cualquiera. Normalmente serán números reales o complejos, pero a veces conviene considerar matrices cuyos elementos son otros objetos, por ejemplo, funciones. También designaremos las matrices mediante la notación abreviada

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \qquad \text{o} \qquad A = (a_{ij}) .$$

Si $m = n$, la matriz se llama *cuadrada*. Una matriz $1 \times n$ se llama *matriz fila*; una matriz $m \times 1$ es una *matriz columna*.

Dos funciones son iguales si y sólo si tienen el mismo dominio y toman los mismos valores en cada elemento del dominio. Puesto que las matrices son funciones, dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si y sólo si tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas, e iguales elementos $a_{ij} = b_{ij}$ para cada par (i, j).

Supongamos ahora que los elementos son números (reales o complejos) y definamos la adición de matrices y la multiplicación por escalares siguiendo el mismo método que para funciones reales o complejas cualesquiera.

DEFINICIÓN. *Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices $m \times n$ y si c es un escalar cualquiera, definimos las matrices $A + B$ y cA del modo siguiente*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad cA = (ca_{ij}) .$$

La suma sólo se define cuando A y B tienen el mismo tamaño $m \times n$.

EJEMPLO. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

tenemos entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad (-1)B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Definimos la matriz O como la matriz $m \times n$ cuyos elementos son todos 0. Con esas definiciones, es inmediato el ejercicio de comprobar que el conjunto de todas las matrices $m \times n$ es un espacio lineal. Lo designamos con $M_{m,n}$. Si los elementos son números reales, el espacio $M_{m,n}$ es un espacio lineal real. Si son números complejos, $M_{m,n}$ es un espacio lineal complejo. Es también fácil demostrar

que este espacio es de dimensión $m \times n$. En efecto, una base para $M_{m,n}$ consta de mn matrices que tienen un elemento igual a 1 y todos los demás iguales a 0. Por ejemplo, las seis matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

forman una base para el conjunto de todas las matrices 2×3.

16.14 Isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices

Volvamos ahora a la relación entre matrices y transformaciones lineales. Sean V y W dos espacios lineales de dimensión finita con $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Elijamos una base $(e_1, \ldots, e_n)$ para V y otra $(w_1, \ldots, w_m)$ para W. En esta discusión esas bases se mantienen fijas. Designemos con $\mathscr{L}(V, W)$ el espacio lineal de todas las transformaciones lineales de V en W. Si $T \in \mathscr{L}(V, W)$, sea $m(T)$ la matriz de T relativa a las bases dadas. Recordemos que $m(T)$ se define como sigue.

La imagen de cada elemento base e_k se expresa como una combinación lineal de los elementos base de W:

(16.19) $$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Los multiplicadores escalares t_{ik} son los elementos ik de $m(T)$. Así pues, tenemos

(16.20) $$m(T) = (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n}\,.$$

La ecuación (16.20) define una nueva función m cuyo dominio es $\mathscr{L}(V, W)$ y cuyos valores son matrices de $M_{m,n}$. Puesto que toda matriz $m \times n$ es la matriz $m(T)$ para una cierta T de $\mathscr{L}(V, W)$, el recorrido de m es $M_{m,n}$. El teorema siguiente prueba que la transformación $m: \mathscr{L}(V, W) \to M_{m,n}$ es lineal y uno a uno en $\mathscr{L}(V, W)$.

TEOREMA 16.15. TEOREMA DE ISOMORFISMO. *Para cualesquiera S y T de $\mathscr{L}(V, W)$ y todos los escalares c, tenemos*

$$m(S + T) = m(S) + m(T) \qquad y \qquad m(cT) = cm(T)\,.$$

Además,

$$m(S) = m(T) \quad \textit{implica} \quad S = T\,,$$

así que m es uno a uno en $\mathscr{L}(V, W)$.

Demostración. La matriz $m(T)$ está formada con los factores t_{ik} de (16.19). Del mismo modo, la matriz $m(S)$ está constituida con los factores s_{ik} de las ecuaciones

$$S(e_k) = \sum_{i=1}^{m} s_{ik}w_i \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16.21}$$

Puesto que tenemos

$$(S + T)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (s_{ik} + t_{ik})w_i \qquad \text{y} \qquad (cT)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (ct_{ik})w_i\,,$$

obtenemos $m(S + T) = (s_{ik} + t_{ik}) = m(S) + m(T)$ y $m(cT) = (ct_{ik}) = cm(T)$. Esto demuestra que m es lineal.

Para demostrar que m es uno a uno, supongamos que $m(S) = m(T)$, siendo $S = (s_{ik})$ y $T = (t_{ik})$. Las ecuaciones (16.19) y (16.21) demuestran que $S(e_k) = T(e_k)$ para cada elemento base e_k, así que $S(x) = T(x)$ para todo x de V, y por tanto $S = T$.

Observación: La función m es un *isomorfismo.* Elegidas unas bases, m establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de las transformaciones $\mathscr{L}(V, W)$ y el conjunto $M_{m,n}$ de las matrices $m \times n$. Las operaciones de adición y multiplicación por escalares se conservan a través de esa correspondencia. Los espacios lineales $\mathscr{L}(V, W)$ y $M_{m,n}$ se dice que son *isomorfos.* Incidentalmente, el teorema 16.11 demuestra que el dominio de una transformación lineal uno a uno tiene la dimensión igual a su recorrido. Por consiguiente, $\dim \mathscr{L}(V, W) = \dim M_{m,n} = mn$.

Si $V = W$ y elegimos la misma base para ambos, la matriz $m(I)$ correspondiente a la transformación idéntica $I: V \to V$ es una matriz diagonal con los elementos de la diagonal iguales a 1 y todos los demás iguales a 0. Esta se llama *identidad* o *matriz unidad* y se designa con I o con I_n.

16.15 Multiplicación de matrices

Algunas transformaciones lineales pueden multiplicarse por medio de la composición. Definiremos ahora la multiplicación de matrices de manera que el producto de dos matrices corresponda a la composición de las transformaciones lineales que ellos representan.

Recordemos que si $T: U \to V$ y $S: V \to W$ son transformaciones lineales, su composición $ST: U \to W$ es una transformación lineal dada por

$$ST(x) = S[T(x)] \quad \text{para todo } x \text{ de } U.$$

Supongamos que U, V, y W son de dimensión finita, por ejemplo

$$\dim U = n, \qquad \dim V = p, \qquad \dim W = m.$$

Elijamos bases para U, V, y W. Con relación a esas bases $m(S)$ es una matriz $m \times p$, T es una matriz $p \times n$, y ST es una matriz $m \times n$. La siguiente definición de multiplicación de matrices nos permite deducir la relación $m(ST) = m(S)m(T)$. Esto extiende a los productos la propiedad de isomorfismo.

DEFINICIÓN. *Sean A una matriz $m \times p$ cualquiera, y B una matriz $p \times n$ cualquiera, tales como*

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,p} \qquad \text{y} \qquad B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,n}.$$

El producto AB se define como la matriz $m \times n$ $C = (c_{ij})$ cuyo elemento ij viene dado por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}. \tag{16.22}$$

Observación: El producto AB sólo está definido si el número de columnas de A es igual al de filas de B.

Si escribimos A_i para expresar la fila i de A y B^j para la columna j de B, y las imaginamos como vectores de dimensión p, la suma (16.22) es simplemente el producto escalar $A_i \cdot B^j$. Es decir, el elemento ij de AB es el producto escalar de la fila i de A por la columna j de B:

$$AB = (A_i \cdot B^j)_{i,j=1}^{m,n}.$$

Así pues, la multiplicación de matrices puede considerarse como una generalización del producto escalar.

EJEMPLO 1. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Puesto que A es 2×3 y B es 3×2, el producto AB es la matriz 2×2

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Los elementos de AB se calculan así

$$A_1 \cdot B^1 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 17, \qquad A_1 \cdot B^2 = 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 21,$$

$$A_2 \cdot B^1 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 1, \quad A_2 \cdot B^2 = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -7.$$

EJEMPLO 2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Aquí A es 2×3 y B es 3×1, con lo que AB es la matriz 2×1 dada por

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 \\ A_2 \cdot B^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

Puesto que $A_1 \cdot B^1 = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -9$ y $A_2 \cdot B^1 = 1 \cdot (-2) + $ $+ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 8$.

EJEMPLO 3. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces AB y BA están definidas. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

encontramos que

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Este ejemplo prueba que en general $AB \neq BA$. Si $AB = BA$, decimos que A y B son *permutables* o que *conmutan*.

EJEMPLO 4. Si I_p es la matriz identidad $p \times p$, entonces $I_pA = A$ para toda matriz A, $p \times n$, y $BI_p = B$ para toda matriz B, $m \times p$. Por ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Demostramos seguidamente que la matriz de una composición ST es el producto de las matrices $m(S)$ y $m(T)$.

TEOREMA 16.16. *Sean $T:U \to V$ y $S:V \to W$ dos transformaciones lineales, donde U, V, W son espacios lineales de dimensión finita. Entonces, elegidas unas bases fijas, las matrices de S, T y ST están relacionadas por la ecuación*

$$m(ST) = m(S)m(T)\,.$$

Demostración. Supongamos que $\dim U = n$, $\dim V = p$, $\dim W = m$. Sean $(u_1, \ldots, u_n)$ una base para U, $(v_1, \ldots, v_p)$ una base para V, y $(w_1, \ldots, w_m)$ una base para W. Con relación a esas bases tenemos

$$m(S) = (s_{ij})_{i,j=1}^{m,p}, \qquad \text{donde} \quad S(v_k) = \sum_{i=1}^{m} s_{ik}w_i \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,,$$

y

$$m(T) = (t_{ij})_{i,j=1}^{p,n}, \qquad \text{donde} \quad T(u_j) = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}v_k \qquad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Por consiguiente, tenemos

$$ST(u_j) = S[T(u_j)] = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}S(v_k) = \sum_{k=1}^{p} t_{kj} \sum_{i=1}^{m} s_{ik}w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{p} s_{ik}t_{kj}\right) w_i\,,$$

con ello encontramos que

$$m(ST) = \left(\sum_{k=1}^{p} s_{ik}t_{kj}\right)_{i,j=1}^{m,n} = m(S)m(T)\,.$$

Ya hemos observado que la multiplicación de matrices no siempre satisface la ley conmutativa. El teorema siguiente prueba que satisface las leyes asociativa y distributiva.

TEOREMA 16.17. LEYES ASOCIATIVA Y DISTRIBUTIVA PARA LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES. *Dadas las matrices A, B, C.*

a) *Si los productos $A(BC)$ y $(AB)C$ tienen sentido, tenemos*

$$A(BC) = (AB)C \qquad (\textit{ley asociativa}).$$

b) *Supongamos que A y B sean del mismo tamaño. Si AC y BC tienen sentido, tenemos*

$$(A + B)C = AC + BC \qquad (\textit{ley distributiva por la derecha}),$$

en tanto que si CA y CB tienen sentido, tenemos

$$C(A + B) = CA + CB \qquad (\textit{ley distributiva por la izquierda}).$$

Demostración. Esas propiedades pueden deducirse directamente a partir de la definición de multiplicación de matrices, pero preferimos razonar del siguiente modo. Introduzcamos los espacios lineales de dimensión finita U, V, W, X y las transformaciones lineales $T: U \to V$, $S: V \to W$, $R: W \to X$ tales que fijadas unas bases, tenemos

$$A = m(R), \qquad B = m(S), \qquad C = m(T).$$

Según el teorema 16.16, es $m(RS) = AB$ y $m(ST) = BC$. De la ley asociativa para la composición, encontramos que $R(ST) = (RS)T$. Aplicando el teorema 16.16 una vez más a esa ecuación, obtenemos $m(R)m(ST) = m(RS)m(T)$ o $A(BC) = (AB)C$, que demuestra a). La demostración de b) puede hacerse con un razonamiento parecido.

DEFINICIÓN. *Si A es una matriz cuadrada, definimos la potencia entera de A por inducción como sigue:*

$$A^0 = I, \qquad A^n = AA^{n-1} \quad \text{para } n \geq 1.$$

16.16 Ejercicios

1. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, calcular $B + C$, AB, BA, AC, CA, $A(2B - 3C)$.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Hallar todas las matrices B, 2×2, tales que a) $AB = O$; b) $BA = O$.

3. Hallar en cada caso a, b, c, d para que se satisfaga la ecuación dada.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Calcular en cada caso $AB - BA$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}.$

5. Si A es un matriz cuadrada, demostrar que $A^nA^m = A^{n+m}$ para todos los enteros $m \geq 0$, $n \geq 0$.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Comprobar que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y calcular A^n.

7. Sea $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Comprobar que $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ y calcular A^n.

8. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Comprobar que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular A^3 y A^4. Suponer una fórmula general para A^n y demostrarla por inducción.

9. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Demostrar que $A^2 = 2A - I$ y calcular A^{100}.

10. Hallar todas las matrices A, 2×2, tales que $A^2 = O$.

11. a) Probar que una matriz A, 2×2, conmuta con cualquier matriz 2×2 si y sólo si A conmuta con cada una de las cuatro matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Hallar todas esas matrices A.

12. La ecuación $A^2 = I$ se satisface para cada una de las matrices 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donde b y c son números reales arbitrarios. Hallar todas las matrices A, 2×2, tales que $A^2 = I$.

13. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, hallar matrices C y D, 2×2, tales que

$AC = B$ y $DA = B$.

14. a) Comprobar que las identidades algebraicas

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{y} \qquad (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

no son ciertas para las matrices 2×2, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Modificar el segundo miembro de esas identidades para obtener fórmulas válidas para todas las matrices cuadradas A y B.
c) ¿Para qué matrices A y B son válidas las identidades establecidas en a)?

16.17 Sistemas de ecuaciones lineales

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ de números dada, y sean $c_1, \ldots, c_m$ otros m números. Un conjunto de m ecuaciones de la forma

$$(16.23) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = c_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Consideramos $x_1, \ldots, x_n$ como incógnitas. Una *solución* del sistema es una n-pla cualquiera de número $(x_1, \ldots, x_n)$ para los que se satisfacen todas las ecuaciones. La matriz A se llama *matriz de los coeficientes* del sistema.

Los sistemas lineales pueden estudiarse por medio de las transformaciones lineales. Elegimos las bases usuales de vectores coordenados unitarios en V_n y V_m. La matriz de los coeficientes A determina una transformación lineal, $T: V_n \to V_m$, que aplica un vector arbitrario $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de V_n en el vector $y = (y_1, \ldots, y_m)$ de V_m dado por las ecuaciones lineales

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Sea $c = (c_1, \ldots, c_m)$ el vector de V_m cuyos componentes son los números que aparecen en el sistema (16.23). Este sistema puede escribirse más sencillamente poniendo

$$T(x) = c .$$

El sistema tiene una solución si y sólo si c está en el recorrido de T. Si un solo x de V_n se aplica en c, el sistema tiene una sola solución. Si más de un x se aplica en c, el sistema admite más de una solución.

EJEMPLO 1. *Un sistema sin solución.* El sistema $x + y = 1$, $x + y = 2$ no tiene solución. La suma de dos números no puede ser a la vez 1 y 2.

EJEMPLO 2. *Un sistema con solución única.* El sistema $x + y = 1$, $x - y = 0$ tiene exactamente una solución: $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

EJEMPLO 3. *Un sistema con más de una solución.* El sistema $x + y = 1$, que consta de una ecuación con dos incógnitas, tiene más de una solución. Dos números cualesquiera cuya suma sea 1 dan una solución.

A cada sistema lineal (16.23), podemos asociar otro sistema

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m ,$$

obtenido reemplazando cada c_i en (16.23) por 0. Éste se llama el *sistema homogéneo* correspondiente al (16.23). Si $c \neq O$, el sistema (16.23) se llama *no homogéneo.* Un vector x de V_n satisfará el sistema homogéneo si y sólo si

$$T(x) = O ;$$

donde T es la transformación lineal determinada por la matriz de los coeficientes. El sistema homogéneo tiene siempre la solución $x = O$, pero puede tener otras. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo es el núcleo de T. El teorema siguiente expone la relación entre las soluciones del sistema homogéneo y las del sistema no homogéneo.

TEOREMA 16.18. *Supongamos que el sistema no homogéneo* (16.23) *tenga una solución, por ejemplo* b.

a) *Si un vector x es una solución del sistema no homogéneo, entonces el vector $v = x - b$ es una solución del correspondiente sistema homogéneo.*

b) *Si un vector v es una solución del sistema homogéneo, el vector* $x=v+b$ *es una solución del sistema no homogéneo.*

Demostración. Sea $T: V_n \to V_m$ la transformación lineal determinada por la matriz de los coeficientes, como antes se ha dicho. Puesto que b es una solución del sistema no homogéneo tenemos $T(b) = c$. Sean x y v dos vectores de V_n tales que $v = x - b$. Entonces tenemos

$$T(v) = T(x - b) = T(x) - T(b) = T(x) - c .$$

Por consiguiente $T(x) = c$ si y sólo si $T(v) = O$. Esto demuestra a la vez a) y b).

Este teorema prueba que el problema de hallar todas las soluciones de un sistema no homogéneo se escinde en dos partes: 1) Hallar todas las soluciones v del sistema homogéneo, esto es, determinando el núcleo de T; y 2) hallar una solución particular b del sistema no homogéneo. Sumando b a cada uno de los vectores v del núcleo T, se obtienen todas las soluciones $x = v + b$ del sistema no homogéneo.

Sea k la dimensión de $N(T)$. Si podemos encontrar k soluciones *independientes* $v_1, \ldots, v_k$ del sistema homogéneo, ellas formarán una base para $N(T)$, y podemos obtener cualquier v de $N(T)$ formando todas las combinaciones lineales

$$v = t_1v_1 + \cdots + t_kv_k ,$$

donde $t_1, \ldots, t_k$ son escalares arbitrarios. Esta combinación lineal se llama *solución general del sistema homogéneo.* Si b es una solución particular del sistema no homogéneo, entonces todas las soluciones x vienen dadas por

$$x = b + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k .$$

Esta combinación lineal se llama *solución general del sistema no homogéneo.* El teorema 16.18 puede ponerse en esta otra forma:

TEOREMA 16.19. *Sea* $T: V_n \to V_m$ *la transformación lineal tal que* $T(x) = y$, *donde* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, e

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad para \quad i = 1, 2, \ldots, m .$$

Sea k la dimensión del núcleo de T. Si $v_1, \ldots, v_k$ son k soluciones independientes del sistema homogéneo $T(x) = O$, y si b es una solución particular del sistema no homogéneo $T(x) = c$, entonces la solución general del sistema no homogéneo es

$$x = b + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k,$$

Este teorema no nos dice cómo encontrar una solución particular b del sistema no homogéneo, ni las soluciones $v_1, \ldots, v_k$ del sistema homogéneo. Nos dice tan sólo lo que puede obtenerse cuando el sistema no homogéneo tenga una solución. El siguiente ejemplo, aunque muy sencillo, ilustra el teorema.

EJEMPLO. El sistema $x + y = 2$ tiene como sistema homogéneo asociado la ecuación $x + y = 0$. Por consiguiente, el núcleo consta de todos los vectores de V_2 de la forma $(t, -t)$, siendo t arbitrario. Puesto que $(t, -t) = t(1, -1)$, éste es un subespacio uni dimensional de V_2 con base $(1, -1)$. Una solución particular del sistema no homogéneo es $(0, 2)$. Por tanto, la solución general del sistema no homogéneo viene dada por

$$(x, y) = (0, 2) + t(1, -1) \qquad \text{o} \qquad x = t, \qquad y = 2 - t,$$

siendo t arbitrario.

16.18 Técnicas de cálculo

Volvamos al problema del cálculo efectivo de las soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Aunque se han desarrollado muchos métodos para atacar este problema, todos exigen cálculos considerables si el sistema es de gran tamaño. Por ejemplo, para resolver un sistema de diez ecuaciones con el mismo número de incógnitas pueden ser necesarias varias horas de cálculos, incluso con la ayuda de un calculador manual.

Vamos a comentar un método muy utilizado, que se llama *método de eliminación de Gauss-Jordan*, que es relativamente sencillo y puede programarse fácilmente para calculadores electrónicos de alta velocidad. El método consiste en la aplicación de tres operaciones fundamentales a las ecuaciones lineales del sistema:

1) *Intercambio de dos ecuaciones.*
2) *Multiplicación de todos los términos de una ecuación por un escalar no nulo.*
3) *Suma de una ecuación a otra multiplicada por un escalar.*

Cada vez que efectuamos una de esas operaciones en el sistema obtenemos un nuevo sistema con las mismas soluciones. Dos sistemas con las mismas soluciones se llaman *equivalentes*. Efectuando esas operaciones una tras otra de modo sistemático llegamos por fin a un sistema equivalente que puede resolverse a simple vista.

Ilustraremos el método con algunos ejemplos particulares. Se verá entonces cómo se aplica el método en general.

EJEMPLO 1. *Sistema con solución única.* Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - 4y + 6z &= 10 . \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución única, $x = 124$, $y = 75$, $z = 31$, que obtendremos por el método de eliminación de Gauss-Jordan. Para evitar trabajo no copiamos las letras x, y, z ni los signos de igualdad, sino que trabajaremos con la *matriz ampliada*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array}\right] \tag{16.24}$$

obtenida por la adjunción de los segundos miembros del sistema a la matriz de los coeficientes. Las tres operaciones básicas antes mencionadas se efectúan con las filas de la matriz ampliada y se llaman *operaciones fila*. En cualquier fase del proceso podemos poner las letras x, y, z e intercalar los signos de igualdad en las verticales correspondientes obteniendo ecuaciones. Nuestro objetivo es llegar a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right] \tag{16.25}$$

la matriz ampliada después de una sucesión de operaciones fila. El correspondiente sistema de ecuaciones es $x = 124$, $y = 75$, $z = 31$, que nos da la solución deseada.

El primer paso es obtener un 1 en el vértice superior izquierdo de la matriz Podemos hacerlo intercambiando la primera fila de la matriz dada (16.24) con la segunda o con la tercera. O bien, podemos multiplicar la primera fila por $\frac{1}{2}$. Intercambiando las filas primera y segunda, obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array}\right].$$

El paso siguiente consiste en convertir todos los restantes elementos de la primera columna en ceros, dejando el primero intacto. Basta para ello multiplicar la primera fila por -2 y sumar el resultado a la segunda fila. Luego multiplicamos la primera fila por -1 y sumamos el resultado a la tercera. Después de esas dos operaciones, obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right]. \tag{16.26}$$

Repetimos ahora el proceso en la matriz reducida $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -13 \\ -2 & 5 & 5 \end{array}\right]$ que aparece junto a los dos ceros. Podemos obtener 1 en *su* vértice superior izquierdo multiplicando la segunda fila de (16.26) por -1. Esto nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right].$$

Multiplicando la segunda fila por 2 y sumando el resultado a la tercera, conseguimos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right]. \tag{16.27}$$

Al llegar aquí, el correspondiente sistema de ecuaciones viene dado por

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ y - 2z &= 13 \\ z &= 31\,. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse sucesivamente partiendo de la tercera y trabajando hacia atrás, dándonos

$$z = 31, \quad y = 13 + 2z = 13 + 62 = 75, \quad x = 5 + 2y - z = 5 + 150 - 31 = 124.$$

O bien, podemos continuar el proceso de Gauss-Jordan convirtiendo en ceros todos los elementos situados por encima de la diagonal de unos en la segunda y en la tercera columnas. Multiplicando la segunda fila de (16.27) por 2 y sumando el resultado a la primera, obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right].$$

Por último, multiplicamos la tercera fila por 3 y sumamos el resultado a la primera fila, y luego multiplicamos la tercera fila por 2 y sumamos el resultado a la segunda con lo que llegamos a la matriz (16.25).

EJEMPLO 2. *Sistema con más de una solución.* Consideremos el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas:

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z + u - v &= -3 \\ x - 2y + z - u + v &= 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v &= 10. \end{aligned} \tag{16.28}$$

La correspondiente matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & -1 & 10 \end{array}\right].$$

Los coeficientes de x, y, z y los segundos miembros son los mismos que los del ejemplo 1. Si efectuamos las mismas operaciones fila que en el ejemplo 1, llegamos a la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 & 19 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 31 \end{array}\right].$$

El correspondiente sistema de ecuaciones puede resolverse respecto a x, y, z en función de u y v dándonos

$$\begin{aligned} x &= 124 + 16u - 19v \\ y &= 75 + 9u - 11v \\ z &= 31 + 3u - 4v\,. \end{aligned}$$

Si hacemos $u = t_1$ y $v = t_2$, siendo t_1 y t_2 números reales arbitrarios, y determiminamos x, y, z mediante esas ecuaciones, el vector (x, y, z, u, v) de V_5 dado por

$$(x, y, z, u, v) = (124 + 16t_1 - 19t_2\,,\ 75 + 9t_1 - 11t_2\,,\ 31 + 3t_1 - 4t_2\,,\ t_1\,,\ t_2)$$

es una solución particular del sistema no homogéneo (16.28). Los dos vectores

$$(x, y, z, u, v) = (124, 75, 31, 0, 0) + t_1(16, 9, 3, 1, 0) + t_2(-19, -11, -4, 0, 1)\,.$$

Esta ecuación nos da la solución general del sistema. El vector (124, 75, 31, 0, 0) es una solución particular del sistema no homogéneo (16.28). Los dos vectores (16, 9, 3, 1, 0) y (−19, −11, −4, 0, 1) son soluciones del correspondiente sistema homogéneo. Puesto que son independientes, constituyen una base para el espacio de todas las soluciones del sistema homogéneo.

EJEMPLO 3. *Sistema sin solución.* Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - 4y + 5z &= 10\,. \end{aligned} \tag{16.29}$$

Es idéntico al del ejemplo 1 excepto que en el coeficiente de z en la tercera ecuación ha sido cambiado el 6 por un 5. La matriz ampliada correspondiente es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right].$$

Aplicando las mismas operaciones fila usadas en el ejemplo 1 para transformar (16.24) en (16.27), llegamos a la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right]. \tag{16.30}$$

Cuando la última fila se expresa como ecuación, llegamos a $0 = 31$. Por consiguiente el sistema original no tiene solución puesto que los dos sistemas (16.29) y (16.30) son equivalentes.

En cada uno de los ejemplos anteriores, el número de ecuaciones no excedía al de incógnitas. Si hay más ecuaciones que incógnitas, el proceso de Gauss-Jordan puede aún aplicarse. Por ejemplo, consideremos el sistema del ejemplo 1, que tiene la solución $x = 124$, $y = 75$, $z = 31$. Si adjuntamos una nueva ecuación a este sistema que sea satisfecha por la misma terna, por ejemplo, la ecuación $2x - 3y + z = 54$, entonces el proceso de eliminación nos lleva a la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

con una fila de ceros en la parte inferior. Pero si adjuntamos una nueva ecuación que no se satisfaga por la terna (124, 75, 31), por ejemplo la ecuación $x + y + z = 1$, entonces el proceso de eliminación nos conduce a la matriz ampliada de la forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right],$$

donde $a \neq 0$. La última fila nos da una ecuación contradictoria $0 = a$ lo que prueba que el sistema no tiene solución.

16.19 Inversas de matrices cuadradas

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada $n \times n$, tal que $BA = I$, siendo I la matriz identidad $n \times n$, entonces A se llama *no singular* y B la *inversa* de A *por la izquierda.*

Elegida la base usual de los vectores coordenados unitarios de V_n, sea $T: V_n \to V_n$ la transformación lineal con matriz $m(T) = A$. Tenemos entonces el siguiente

TEOREMA 16.20. *La matriz A es no singular si y sólo si T es invertible. Si $BA = I$, entonces $B = m(T^{-1})$.*

Demostración. Supongamos que A es no singular y que $BA = I$. Demostraremos que $T(x) = O$ implica $x = O$. Dado x tal que $T(x) = O$, sea X la matriz columna $n \times 1$ formada a partir de los componentes de x. Puesto que $T(x) = O$, la matriz producto AX es una matriz columna $n \times 1$ formada por ceros, así que $B(AX)$ es también una matriz columna de ceros. Pero $B(AX) = (BA)X = IX = X$, por lo que todo componente de x es 0. Por consiguiente, T es invertible, y la ecuación $TT^{-1} = I$ implica que $m(T)m(T^{-1}) = I$ o $Am(T^{-1}) = I$. Multiplicando a la izquierda por B, encontramos $m(T^{-1}) = B$. Recíprocamente, si T es invertible entonces $T^{-1}T$ es la transformación idéntica así que $m(T^{-1})m(T)$ es la matriz identidad. Por consiguiente A es no singular y $m(T^{-1})A = I$.

Todas las propiedades de las transformaciones lineales invertibles tienen su contrapartida para las matrices no singulares. En particular, las inversas por la izquierda (si existen) son únicas, y toda inversa por la izquierda es también inversa por la derecha. Dicho de otro modo, si A es no singular y $BA = I$, entonces $AB = I$. Llamamos a B la *inversa* de A y la designamos por A^{-1}. La inversa A^{-1} también es no singular y *su* inversa es A.

Seguidamente demostramos que el problema de la determinación efectiva de los elementos de la inversa de una matriz no singular es equivalente a la resolución de n sistemas lineales no homogéneos.

Sea $A = (a_{ij})$ no singular y sea $A^{-1} = (b_{ij})$ su inversa. Los elementos de A y A^{-1} están ligados por las n^2 ecuaciones.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}, \tag{16.31}$$

siendo $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Para cada valor fijo de j, podemos considerar (16.31) como un sistema no homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$. Puesto que A es no singular, cada uno de esos sistemas tiene solución única, la columna j de B. Todos esos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes A y difieren tan sólo en sus segundos miembros. Por ejemplo, si A es una matriz 3×3, existen 9 ecuaciones en (16.31) que pueden representarse como 3 sistemas lineales que tienen las siguientes matrices ampliadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right]$$

Si aplicamos el proceso de Gauss-Jordan, llegamos a las respectivas matrices ampliadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{32} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{33} \end{array}\right].$$

En la práctica aprovechamos el hecho de que los tres sistemas tienen la misma matriz de coeficientes y resolvemos los tres sistemas de una vez trabajando con la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

El proceso de eliminación nos lleva a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right].$$

La matriz de la parte derecha de la barra vertical es la inversa deseada. La de la izquierda es la matriz identidad 3×3.

No es preciso conocer de antemano si A es no singular. Si A es *singular*, podemos aún aplicar el método de Gauss-Jordan, pero ocurre que en el proceso uno de los elementos de la diagonal se convierte en cero, y no será posible transformar A en la matriz identidad.

16.20 Ejercicios

Aplicando el proceso de Gauss-Jordan a cada uno de los sistemas siguientes, determinar la solución general, si existe.

1. $\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 4z &= 11 \\ -y + z &= 3. \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1. \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3. \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$

5. $$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + u &= 1 \\ x + y - 3z + 2u &= 2 \\ 6x + y - 4z + 3u &= 7. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x + y - 3z + u &= 5 \\ 2x - y + z - 2u &= 2 \\ 7x + y - 7z + 3u &= 3. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x + y + 2z + 3u + 4v &= 0 \\ 2x + 2y + 7z + 11u + 14v &= 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v &= 0. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x - 2y + z + 2u &= -2 \\ 2x + 3y - z - 5u &= 9 \\ 4x - y + z - u &= 5 \\ 5x - 3y + 2z + u &= 3. \end{aligned}$$

9. Demostrar que el sistema $x + y + 2z = 2$, $2x - y + 3z = 2$, $5x - y + az = 6$, tiene solución única si $a \neq 8$. Hallar todas las soluciones cuando $a = 8$.

10. a) Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2\,. \end{aligned}$$

b) Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \\ x + y + z \quad\quad &= 6\,. \end{aligned}$$

11. Este ejercicio nos indica cómo se determinan todas las matrices no singulares 2×2. Demostrar que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc)I\,.$$

Deducir que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es no singular si y sólo si $ad - bc \neq 0$, en cuyo caso su inversa es

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Determinar la inversa de cada una de las matrices de los ejercicios del 12 al 16.

12. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

16.21 Ejercicios varios sobre matrices

1. Si una matriz cuadrada tiene una columna de ceros o una fila de ceros, demostrar que es singular.
2. Para cada una de las proposiciones siguientes relativas a matrices $n \times n$, dar una demostración o un contraejemplo.
   a) Si $AB + BA = O$, entonces $A^2B^3 = B^3A^2$.
   b) Si A y B son no singulares, entonces $A + B$ es no singular.
   c) Si A y B son no singulares, entonces AB es no singular.
   d) Si A, B, y $A + B$ son no singulares, entonces $A - B$ es no singular.
   e) Si $A^3 = O$, entonces $A - I$ es no singular.
   f) Si el producto de k matrices $A_1 \ldots A_k$ es no singular, cada una de las matrices A_i es no singular.
3. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, hallar una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
4. La matriz $A = \begin{bmatrix} a & i \\ i & b \end{bmatrix}$, donde $i^2 = -1$, $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, y $b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, tiene la propiedad de que $A^2 = A$. Describir en forma completa todas las matrices A, 2×2, con elementos complejos tales que $A^2 = A$.
5. Si $A^2 = A$, demostrar que $(A + I)^k = I + (2^k - 1)A$.
6. La teoría de la relatividad utiliza un conjunto de ecuaciones de la forma $x' = a(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = a(t - vx/c^2)$. Aquí v representa la velocidad de un objeto que se mueve, c la velocidad de la luz, y $a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$, donde $|v| < c$. La transformación que aplica el vector bi dimensional (x, t) en (x', t') se llama *transformación de Lorentz*. Su matriz relativa a las bases usuales se designa con $L(v)$ y viene dada por

$$L(v) = a\begin{bmatrix} 1 & -v \\ -vc^{-2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que $L(v)$ es no singular y que $L(0) = I$. Demostrar que $L(v)L(u) = L(w)$, siendo $w = (u + v)c^2/(uv + c^2)$. Es decir, el producto de dos transformaciones de Lorentz es otra transformación de Lorentz.

7. Si cambiamos las filas por las columnas en una matriz rectangular A, la nueva matriz así obtenida se llama la *transpuesta* de A y se designa por A^t. Por ejemplo, si tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que las transpuestas tienen las propiedades siguientes:

(a) $(A^t)^t = A$. (b) $(A + B)^t = A^t + B^t$. (c) $(cA)^t = cA^t$.
(d) $(AB)^t = B^tA^t$. (e) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ si A es no singular.

8. Una matriz cuadrada A se llama matriz ortogonal si $AA^t = I$. Comprobar que la matriz 2×2 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ es ortogonal para cada número real θ. Si A es cualquier matriz ortogonal $n \times n$, demostrar que sus filas, consideradas como vectores de V_n, forman un conjunto ortogonal.

9. Para cada una de las proposiciones siguientes acerca de las matrices $n \times n$, dar una demostración o en su lugar un contra ejemplo.
a) Si A y B son ortogonales, $A + B$ es ortogonal.
b) Si A y B son ortogonales, AB es ortogonal.
c) Si A y AB son ortogonales, B es ortogonal.

10. *Matrices de Hadamard*, llamadas así por Jacques Hadamard (1865-1963), son aquellas matrices $n \times n$ con las propiedades siguientes:
I. Cada elemento es 1 ó -1.
II. Cada fila, considerada como un vector de V_n, tiene longitud igual a $\sqrt{n}$.
III. El producto escalar de dos filas distintas cualesquiera es 0.
Las matrices de Hadamard se presentan en ciertos problemas de geometría y en la teoría de números, y han sido aplicadas recientemente en la codificación óptima para la comunicación espacial. A pesar de su aparente simplicidad, presentan muchos problemas sin resolver. El principal problema no resuelto en este momento es el de determinar todos los valores de n para los que existe una matriz de Hadamard $n \times n$. Este ejercicio da idea de una solución parcial.
a) Determinar todas las matrices de Hadamard 2×2 (hay exactamente 8).
b) Esta parte del ejercicio esboza una demostración sencilla del siguiente teorema: *Si A es una matriz de Hadamard $n \times n$, siendo $n > 2$, entonces n es un múltiplo de* 4. La demostración se basa en dos lemas muy sencillos relativos a los vectores en el espacio de dimensión n. Demostrar cada uno de esos lemas y aplicarlos a las filas de la matriz de Hadamard para demostrar el teorema.

LEMA 1. *Si X, Y, Z son vectores ortogonales de V_n, se tiene*

$$(X + Y) \cdot (X + Z) = \|X\|^2.$$

LEMA 2. *Póngase $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, \ldots, z_n)$. Si cada componente x_i, y_i, z_i es 1 o -1, el producto $(x_i + y_i)(x_i + z_i)$ es 0 ó 4.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

Introducción

***I 1.4 Ejercicios (pág. 9)**

1. (a) $\frac{2}{3}b^3$ (b) b^3 (c) $\frac{1}{12}b^3$ (d) $\frac{2}{3}b^3 + b$ (e) $\frac{1}{3}ab^3 + bc$
2. (c) $\frac{1}{4}ab^4 + bc$
3. (b) $s_n < \dfrac{b^{k+1}}{k+1} < S_n$ (c) $\dfrac{ab^{k+1}}{k+1} + bc$

I 2.5 Ejercicios (pág. 19)

1. $A = \{1, -1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1\}$, $D = \{2\}$, $E = \{1, -17\}$,
$F = \{1, -17, -8 + \sqrt{47}, -8 - \sqrt{47}\}$.
2. $A \subseteq A$, $B \subseteq A$, $B \subseteq B$, $B \subseteq C$, $B \subseteq E$, $B \subseteq F$, $C \subseteq A$, $C \subseteq B$, $C \subseteq C$, $C \subseteq E$, $C \subseteq F$, $D \subseteq D$, $E \subseteq E$, $E \subseteq F$, $F \subseteq F$. (No tener en cuenta las inclusiones «propias».)
3. (a) cierta (b) cierta (c) falsa (d) cierta (e) falsa (f) falsa
4. (a) cierta (b) cierta (c) cierta (d) cierta (e) falsa (f) falsa
5. $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, S$
6. (a) falsa (b) falsa (c) falsa (d) cierta (e) falsa (f) falsa
(g) cierta (h) falsa (i) cierta

17. (c) $A \subset C$ (d) si (e) Nc

I 4.4 Ejercicios (pág. 44)

2. $1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$
3. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$
4. $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$
5. $\dfrac{n+1}{2n}$

6. (b) $A(1)$ falsa (c) $1 + 2 + \cdots + n < \frac{(2n+1)^2}{8}$
7. $n_1 = 3$

I 4.7 Ejercicios (pág. 49)

1. (a) 10 (b) 15 (c) 170 (d) 288 (e) 36 (f) $\frac{5}{6}$
8. (b) $n + 1$
9. constante $= 2$
11. (a) cierta (b) falsa (c) falsa (d) falsa (e) falsa (f) falsa
12. $\frac{n}{n+1}$

I 4.9 Ejercicios (pág. 53)

2. $(a_1, b_2), (a_2, b_5), (a_3, b_7), (a_4, b_{10}), (a_5, b_3), (a_6, b_8), (a_7, b_9), (a_8, b_4), (a_9, b_6), (a_{10}, b_1)$
3. (a) falsa (b) cierta (c) cierta (d) falsa (e) falsa

***I 4.10 Ejercicios varios sobre la inducción (pág. 54)**

1. (a) 10 (b) 1 (c) 7 (d) 21 (e) 680 (f) 1
2. (b) 17 (c) 9 (d) No
5. $\prod_{k=1}^{0} a_k = 1;\quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$
8. 2^n
9. cierta si cada $a_k \geq 0$
11. $n \geq 4$

Capítulo 1

1.5 Ejercicios (pág. 69)

1. $f(2) = 3, f(-2) = -1, -f(2) = -3, f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}, 1/f(2) = \frac{1}{3}, f(a+b) = a + b + 1,$
$f(a) + f(b) = a + b + 2, f(a)f(b) = ab + a + b + 1$
2. $f(2) + g(2) = 2, f(2) - g(2) = 4, f(2)g(2) = -3, f(2)/g(2) = -3, f[g(2)] = 0,$
$g[f(2)] = -2, f(a) + g(-a) = 2 + 2a, f(t)g(-t) = (1+t)^2$
3. $\varphi(0) = 4, \varphi(1) = 2, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 2, \varphi(-1) = 6, \varphi(-2) = 8, t = 1.$
4. a) Todo x b) Todo x y todo y c) Todo x y todo h d) Todo y
e) Todo t f) Todo a
5. (a) $|x| \leq 2$ (b) $|y| \leq 1$ (c) $|t| \geq \frac{1}{2}$ (d) $0 \leq a \leq 4$ (e) $|s| \leq 4$
(f) $|x| \leq 2,\ x \neq 0$
6. (b) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (c) $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$ d) El dominio es vacío
7. Se cortan cuando $x = 0, 1, -1$
8. Se cortan cuando $x = -1, -3$
10. (a) $p(x) = 1$ (b) $p(x) = \frac{1}{2}x(x-1) + 1$ (c) $p(x) = ax(x-1) + 1$, a arbitraric
(d) $p(x) = ax(x-1) + b$, a y b arbitrarios

11. (a) $p(x) = ax(1 - x) + b$, a y b arbitrarios (b) $p(x) = c$, c arbitrario
(c) $p(x) = ax$, a arbitrario (d) $p(x) = c$, c arbitrario

12. (a) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$ (b) $\sum_{k=0}^{n} x^k$ (c) $\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k$

1.11 Ejercicios (pág. 78)

5. $[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right]$

1.15 Ejercicios (pág. 86)

1. (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 4 (e) 6 (f) -6
2. Un ejemplo: $s(x) = \frac{5}{2}$ si $0 \le x < 2$, $s(x) = -1$ si $2 \le x \le 5$
5. (b) $2\sum_{k=1}^{8} k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(21 - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{7})$
6. (c) $x = 1, x = \frac{5}{2}$
7. (a) 13
10. (a) $f(3) = 1, f(4) = -1, f[f(3)] = 0$ (b) $p = 14, p = 15$
11. (a), (d), (e)
12. (a), (b), (c)

1.26 Ejercicios (pág. 102)

1. 9
2. 18
3. 16
4. 0
5. 1
6. 2
7. 0
8. 0
9. 6
10. 11
11. $\frac{21}{8}$
12. 18
13. $\frac{1}{3}$
14. $-\frac{1}{3}$
15. 2
16. $\frac{62}{27}$
17. -78
18. $\frac{2592}{35}$
19. $5^6/21$
20. $-2^{11}/11$
21. (a) $0, \frac{3}{2}$ (b) 0
22. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $c/2$
23. $p(x) = 6x - 6x^2$
24. $p(x) = 4x + 8x^2 + 3x^3$
27. $(1/A)\int_{Aa+B}^{Ab+B} f(x)\,dx$ si $A \neq 0$; $(b - a)f(B)$ si $A = 0$.

Capítulo 2

2.4 Ejercicios (pág. 116)

1. $\frac{32}{3}$
2. $\frac{32}{3}$
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{4}{3}$
5. $\frac{1}{12}$
6. $\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{12}$
7. $\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{1}{6}$
8. $\frac{1}{3}(10 - 4\sqrt{2})$

9. $\frac{1}{4}(5\sqrt{5} - 3)$
10. $\frac{7}{4}$
11. $\frac{7}{3}$
12. $\frac{7}{3}$
13. $\dfrac{9\sqrt{3} - 1}{27}$
14. 5
15. $c = \frac{1}{2}$
16. $a = -2$
17. (a) $9\pi/2$ (b) $\pi/2$ (c) -6π

2.8 Ejercicios (pág. 129)

Observación: En los ejercicios del 1 al 13, n es un entero cualquiera.

1. (b) $\frac{1}{2}\pi + n\pi$
2. (a) $\frac{1}{2}\pi + 2n\pi$ (b) $2n\pi$ (c) $\frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ (d) $(2n + 1)\pi$
6. $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$; $\cot(x + y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$
7. $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
8. $A = C\cos\alpha$, $B = C \operatorname{sen}\alpha$
9. $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$. si $A^2 + B^2 \neq 0$, elíjase α de modo que $\alpha = A/C$, sen $\alpha = B/C$. si $A = B = 0$, elíjase cualquier α.
10. $C = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 5\pi/4$
11. $C = \sqrt{2}$, $\alpha = -\pi/4$
12. $\frac{1}{4}\pi + n\pi$
13. $\frac{1}{2}\pi + 2n\pi$; $\pi + 2n\pi$
17. (a) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (b) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1 (e) 2 (f) 0 (g) 0 (h) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
18. $\frac{1}{2}\pi^2 + 2$
19. $1 + \pi^3/24$
20. 0
21. $2\sqrt{2} - 2$
22. $\frac{1}{2}\pi$
23. $\sqrt{3} + \pi/6$
24. $\sqrt{3} + \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x + \pi/6$ si $0 \leq x \leq 2\pi/3$; $2\sqrt{3} - \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x + 5\pi/6$ si $2\pi/3 \leq x \leq \pi$
25. $(x^6 - x^3)/3 + \cos x - \cos(x^2)$
26. 1
27. 1

2.11 Ejercicios (pág. 136)

5. $4\pi^3/3$
6. π
7. 2π
8. 4π
9. 8π
10. $\pi/8$
11. $\pi/2$
12. 2
13. 2
14. $3\pi/2$
15. $9\pi/2$

2.13 Ejercicios (pág. 140)

1. $\pi c^2 b^3/3$
2. $\pi/2$
3. $2\pi/3$
4. $33\pi/5$
5. $\pi^2/2$
6. $\pi^2/4$
7. π^2
8. $\pi/2$

9. $3\pi/10$
10. $\pi/2$
11. $2\pi\sqrt{3}$
12. $\frac{8}{5}$
13. $(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3})\pi r^3$
14. $a = \frac{4}{3}$
15. $16\sqrt{3}/3$
16. $4a^5/5$
17. $\frac{h}{6}(B_1 + 4M + B_2)$
18. (a) $8\pi/5$ (b) 2π (c) $10\pi/3$ (d) $16\pi/15$

2.15 Ejercicios (pág. 144)

1. 60 lb-pié
2. 125 joules; 0,8 metros
3. (a) 441 joules (b) 425 joules
4. $a = 3, b = -2$
5. 3750 lb-pié
6. 5000 lb-pié
7. 20 000 lb-pié
8. 21 800 lb-pié

2.17 Ejercicios (pág. 147)

1. $(a^2 + ab + b^2)/3$
2. $\frac{7}{12}$
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{45}{28}$
5. $2/\pi$
6. $2/\pi$
7. $2/\pi$
8. $1/\pi$
9. $\frac{1}{2}$
10. $\frac{1}{2}$
11. $c = a/\sqrt{3}$; $c = a/(n + 1)^{1/n}$
12. (a) $w(x) = x$ (b) $w(x) = x^2$ (c) $w(x) = x^3$
14. Las tres
16. (a) $L/2$ (b) $L^3/3$ (c) $L/\sqrt{3}$
17. (a) $7L/12$ (b) $5L^3/8$ (c) $\sqrt{15}\,L/6$
18. (a) $2L/3$ (b) $L^4/4$ (c) $\sqrt{2}\,L/2$
19. (a) $11L/18$ (b) $31L^4/192$ (c) $\sqrt{62}\,L/12$
20. (a) $3L/4$ (b) $L^5/5$ (c) $\sqrt{15}\,L/5$
21. (a) $21L/32$ (b) $19L^5/240$ (c) $\sqrt{190}\,L/20$
22. $\rho(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq L$ da $\bar{x} = 3L/4$
23. (a) $6/\pi$ (b) $3\sqrt{2}/2$
24. $T = 2\pi$ seg; $80\sqrt{3}$

2.19 Ejercicios (pág. 153)

1. $x + x^2/2 + x^3/3$
2. $2y + 2y^2 + 8y^3/3$
3. $\frac{5}{6} + 2x + 2x^2 + 8x^3/3$
4. $-2x + 2x^2 - x^3$
5. $(3x^5 + 5x^3 + 136)/15$
6. $x^{10}/5 + 2x^6/3 - x^5/5 - 2x^3/3 + x^2 - x$
7. $x + \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{5}{3}$
8. $\frac{2}{3}(x^3 - x^{3/2}) + \frac{4}{5}(x^{5/2} - x^{5/4})$
9. $\operatorname{sen} x$
10. $\frac{1}{2}x^2 + \operatorname{sen}(x^2)$

11. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \cos(x^2) - \cos x$
12. $\frac{1}{3}(x^3 - \cos 3x + 1)$
13. $\frac{1}{3}(x^6 - x^3 + \cos 3x - \cos(3x^2))$
14. $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y$
15. $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$
16. $\frac{3}{4}(x + \pi) + \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
17. $0, \pm\sqrt{2}$
18. (c) $P(x) = \frac{1}{3}(x - [x])^2 - \frac{1}{2}(x - [x])$ (d) $\frac{1}{12}$
20. (b) $g(2) = 2A, g(5) = 5A$ (c) $A = 0$

Capítulo 3

3.6 Ejercicios (pág. 169)

1. $\frac{1}{4}$
2. -1
3. 4
4. 1
5. $2t$
6. -1
7. 1
8. 0
9. 0
10. 0
11. 1
12. -1
13. 1
14. -1
22. $a = (\operatorname{sen} c - b)/c$ si $c \neq 0$; si $c = 0$ no hay solución a menos que $b = 0$, en cuyo caso servirá cualquier a.
23. $a = (2\cos c - b)/c^2$ si $c \neq 0$; si $c = 0$ no hay solución a menos que $b = 2$, en cuyo caso servirá cualquier a.
24. La tangente es continua para todo valor de x excepto en $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, siendo n un entero cualquiera; la cotangente es continua para todo x excepto en $x = n\pi$, siendo n un entero cualquiera.
25. $f(x) \to 1$ cuando $x \to 0$. Se define $f(0) = 1$ para la continuidad en 0.
28. No
29. No
30. $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. Se define $f(0) = 0$ para la continuidad en 0.
32. $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. Se define $f(0) = 0$ para la continuidad en 0.

3.8 Ejercicios (pág. 174)

1. $x^2 - 1$, todo x
2. $(x - 1)^2$, todo x
3. $|x|$, todo x
4. 0, definida sólo en $x = 0$
5. $x, x \geq 0$
6. $-x, x \geq 0$
7. $\operatorname{sen}\sqrt{x}, x \geq 0$
8. $\sqrt{\operatorname{sen} x}$, $2k\pi \leq x \leq (2k + 1)\pi$, k entero
9. $\sqrt{x + \sqrt{x}}, x > 0$
10. $\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x > 0$
11. -3
12. $\sqrt{3}$
13. 1
14. 1
15. 1
16. 2
17. 0
18. 2
19. 1
20. $\frac{1}{2}$
21. x^2 si $x \geq 0$; 0 si $x < 0$

22. 1 si $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$; 0 en los demas valores de x.
23. x^2 si $x \geq 0$; 0 si $x < 0$

3.15 Ejercicios (pág. 183)

1. $g(y) = y - 1$; todo y
2. $g(y) = \frac{1}{2}(y - 5)$; todo y
3. $g(y) = 1 - y$; todo y
4. $g(y) = y^{1/3}$; todo y
5. $g(y) = y$ si $y < 1$; $\sqrt{y}$ si $1 \leq y \leq 16$; $(y/8)^2$ si $y > 16$

3.20 Ejercicios (pág. 190)

3. 0,099 669 con error menor que una millonésima.

Capítulo 4

4.6 Ejercicios (pág. 204)

1. $f'(0) = 1, f'(\frac{1}{2}) = 0, f'(1) = -1, f'(-10) = -19$
2. (a) $1, -2$ (b) $0, -1$ (c) $3, -4$
3. $2x + 3$
4. $4x^3 + \cos x$
5. $4x^3 \operatorname{sen} x + x^4 \cos x$
6. $-1/(x + 1)^2$
7. $-2x/(x^2 + 1)^2 + 5x^4 \cos x - x^5 \operatorname{sen} x$
8. $-1/(x - 1)^2$
9. $\operatorname{sen} x/(2 + \cos x)^2$
10. $-\dfrac{2x^5 + 9x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 2x - 3}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$
11. $\dfrac{1 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(2 - \cos x)^2}$
12. $\dfrac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1 + x^2} - \dfrac{2x^2 \operatorname{sen} x}{(1 + x^2)^2}$
13. (b) $v_0/32$ seg (c) $-v_0$ pié/seg (d) 16 pié/seg; 160 pié/seg; $16T$ pié/seg
    (f) $f(t) = v_0 t - 10t^2$ es un ejemplo
14. $3x^2$, donde x es la longitud de una arista
16. $\frac{1}{2}x^{-1/2}$
17. $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$
18. $\frac{3}{2}x^{1/2}$
19. $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$
20. $\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{4}x^{-3/4}$
21. $-\frac{1}{2}x^{-3/2} - \frac{1}{3}x^{-4/3} - \frac{1}{4}x^{-5/4}$
22. $\dfrac{1 - x}{2\sqrt{x}(1 + x)^2}$
23. $\dfrac{2 + \sqrt{x}}{2(1 + \sqrt{x})^2}$
26. $\sec x(1 + 2\tan^2 x)$

27. $x \sec^2 x + \tan x$
28. $-(x^{-2} + 4x^{-3} + 9x^{-4})$
29. $\dfrac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}$
30. $\dfrac{2(1 - 2x)}{(1 - x + x^2)^2}$
31. $\dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$
32. $-\dfrac{1 + \cos x}{(x + \operatorname{sen} x)^2}$
33. $\dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$
34. $-\dfrac{(2x^2 + 3)\operatorname{sen} x + 4x \cos x}{(2x^2 + 3)^2}$
35. $\dfrac{(2ax + b)(\operatorname{sen} x + \cos x) + (ax^2 + bx + c)(\operatorname{sen} x - \cos x)}{1 + \operatorname{sen} 2x}$
36. $a = d = 1;\ b = c = 0$
37. $a = c = e = 0;\ b = f = 2;\ d = -1$
38. (a) $\dfrac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(x - 1)^2}$

    (b) $\dfrac{n^2x^{n+3} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} + (n + 1)^2x^{n+1} - x^2 - x}{(x - 1)^3}$

4.9 Ejercicios (pág. 211)

1. 1, 3
2. (a) $-1, \frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}, 0$ (c) $-2, \frac{3}{2}$
3. $(2n + 1)\pi$, donde n es un entero cualquiera
4. $a = -2, b = 4$
5. $a = 1, b = 0, c = -1$
6. (a) $x_1 + x_2 + a$ (b) $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$
7. Tangente en $(3, -3)$; corta la curva en $(0, 0)$
8. $m = -2, b = -2, a = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{8}$
9. $a = 2c, b = -c^2$
10. $a = \dfrac{3}{2c}, b = -\dfrac{1}{2c^3}$
11. $a = \cos c, b = \operatorname{sen} c - c \cos c$
12. $-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$; $\dfrac{1 + 3\sqrt{x}}{2(x + \sqrt{x})^3}$; $-\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 4\sqrt{x} + 5x}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^4}$
13. $a = -4,\ b = 5,\ c = -1,\ d = -2$
14. (a) $\dfrac{15}{4}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$
15. (a) cierta (b) cierta (c) Falsa si $f'(a) \neq 0$. El límite es $2f'(a)$
    (d) Falsa si $f'(a) \neq 0$. El límite es $\frac{1}{2}f'(a)$

16. (a) $D^*(f+g) = (1+g/f)D^*f + (1+f/g)D^*g$ cuando $f(x)$ y $g(x)$ no es 0;
$D^*(f\cdot g) = g^2\,D^*f + f^2\,D^*g$;
$D^*(f/g) = (g^2\,D^*f - f^2\,D^*g)/g^4$ cuando $g(x) \neq 0$
(b) $D^*f(x) = 2f(x)\,Df(x)$
(c) $f(x) = c$ para todo x

4.12 Ejercicios (pág. 219)

1. $-2\cos x(1 + 2\,\text{sen}\,x)$
2. $x/\sqrt{1+x^2}$
3. $(2x^3 - 4x)\,\text{sen}\,x^2 - 2x\cos x^2 + 2\,\text{sen}\,x^3 + 6x^3\cos x^3$
4. $-\text{sen}\,2x\cos(\cos 2x)$
5. $n\,\text{sen}^{n-1}x\cos(n+1)x$
6. $\cos x\cos(\text{sen}\,x)\cos[\text{sen}(\text{sen}\,x)]$
7. $\dfrac{2\,\text{sen}\,x(\cos x\,\text{sen}\,x^2 - x\,\text{sen}\,x\cos x^2)}{\text{sen}^2 x^2}$
8. $2/(\text{sen}^2 x)$
9. $-\dfrac{16\cos 2x}{\text{sen}^3 2x}$
10. $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$
11. $4(4-x^2)^{-3/2}$
12. $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$
13. $-(1+x^2)^{-3/2}$
14. $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\,g(x)}{8\sqrt{x}\,g(x)\sqrt{x+g(x)}}$, donde $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$
15. $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{(2+x^2)^{1/2}(3+x^3)^{2/3}}$
16. $f'(x) = (x+1)^{-2}$; $g'(x) = (2x+1)^{-2}$

17.

x	$h(x)$	$h'(x)$	$k(x)$	$k'(x)$
0	0	−10	0	5
1	1	5	1	12
2	2	4	2	−10
3	3	12	3	4

18.

x	$g'(x)$	$g''(x)$
0	0	0
1	3	10
2	30	36

19. (a) $2xf'(x^2)$ (b) $[f'(\text{sen}^2 x) - f'(\cos^2 x)]\,\text{sen}\,2x$ (c) $f'[f(x)]f'(x)$ (d) $f'(x)f'[f(x)]f'\{f[f(x)]\}$
20. (a) $75\ \text{cm}^3/\text{seg}$ (b) $300\ \text{cm}^3/\text{seg}$ (c) $3x^2\ \text{cm}^3/\text{seg}$
21. 400 Km/h
22. (a) $20\sqrt{5}$ piés/seg (b) $50\sqrt{2}$ piés/seg
23. 7,2 mi/h
24. (a) y (b) $5/(4\pi)$ piés/min
25. $c = 1 + 36\pi$
26. $dV/dh = 75\pi$ piés³/piés ; $dr/dt = 1/(15\pi)$ piés/seg
27. $\dfrac{66}{7}\ \text{cm}^2/\text{seg}$
28. $n = 33$
29. (a) $x = \frac{1}{2},\quad y = \frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4.15 Ejercicios (pág. 227)

3. (b) $c = \frac{1}{2},\quad c = \sqrt{2}$
6. (a) $\theta = \frac{1}{2},\quad \theta \to \frac{1}{2}$

   (b) $\theta = \dfrac{x + \frac{1}{3}h}{x + \sqrt{x^2 + xh + \frac{1}{3}h^2}}\ ;\quad \theta \to \frac{1}{2}$ si $x > 0$
7. (b) f tiene a lo sumo $k + r$ ceros en $[a, b]$

4.19 Ejercicios (pág. 233)

1. a) $\frac{3}{2}$ b) decrece si $x < \frac{3}{2}$; crece si $x > \frac{3}{2}$ c) f' crece para todo x.
2. a) $\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ b) f crece si $|x| > \frac{2}{3}\sqrt{3}$; decrece si $|x| < \frac{2}{3}\sqrt{3}$
   c) f' crece si $x > 0$; decrece si $x < 0$.
3. a) ± 1 b) f crece si $|x| > 1$; decrece si $|x| < 1$ c) f' crece si $x > 0$; decrece si $x < 0$
4. a) 1,3 b) f crece si $x < 1$ o si $x > 3$; decrece si $1 < x < 3$ c) f' crece si $x > 2$; decrece si $x < 2$
5. (a) 1 (b) f crece si $x > 1$; decrece si $x < 1$ (c) f' crece para todo x
6. a) ninguno b) f crece si $x < 0$; decrece si $x > 0$
   c) f' crece si $x < 0$, o si $x > 0$

7. a) $2^{1/3}$ b) f crece si $x < 0$, o si $x > 2^{1/3}$; decrece si $0 < x < 2^{1/3}$
c) f' crece si $x < 0$, o si $x > 0$
8. a) 2 b) f crece si $x < 1$, o si $1 < x < 2$; decrece si $2 < x < 3$, o si $x > 3$
c) f' crece si $x < 1$, o si $x > 3$; decrece si $1 < x < 3$
9. a) ± 1 b) f crece si $|x| < 1$; decrece si $|x| > 1$ c) f' crece si $-\sqrt{3} < x < 0$, o si $x > \sqrt{3}$; decrece si $x < -\sqrt{3}$, o si $0 < x < \sqrt{3}$
10. a) 0 b) f crece si $x < -3$ o si $-3 < x < 0$; decrece si $0 < x < 3$, o si $x > 3$ c) f' crece si $|x| > 3$; decrece si $|x| < 3$

Observación: En los ejercicios 11, 12 y 13, n representa un entero cualquiera.

11. (a) $\frac{1}{2}n\pi$ (b) f crece si $n\pi < x < (n + \frac{1}{2})\pi$; decrece si $(n - \frac{1}{2})\pi < x < n\pi$
(c) f' crece si $(n - \frac{1}{4})\pi < x < (n + \frac{1}{4})\pi$; decrece si $(n + \frac{1}{4})\pi < x < (n + \frac{3}{4})\pi$
12. (a) $2n\pi$ (b) f crece para todo x
(c) f' crece si $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$; decrece si $(2n - 1)\pi < x < 2n\pi$
13. (a) $(2n + \frac{1}{2})\pi$ (b) f crece para todo x
(c) f' crece si $(2n + \frac{1}{2})\pi < x < (2n + \frac{3}{2})\pi$; decrece si $(2n - \frac{1}{2})\pi < x < (2n + \frac{1}{2})\pi$
14. (a) 0 (b) f crece si $x > 0$; decrece si $x < 0$ (c) f' crece para todo x

4.21 Ejercicios (pág. 237)

2. $\frac{1}{4}L$ m ancho, $\frac{1}{2}L$ m largo
3. ancho $\frac{1}{2}\sqrt{2A}$, largo $\sqrt{2A}$
7. $\sqrt{2}\,L$
10. $r = h = R/\sqrt{2}$
12. $r = \frac{1}{2}R$, $h = \frac{1}{2}H$
13. $r = 2R/3$, $h = H/3$
14. $h = \frac{4}{3}R$, $r = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,R$
15. Un rectángulo cuya base es doble de la altura
16. Trapecio isósceles, base inferior el diámetro, base superior igual al radio
17. (a) $6\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$
(b) $8 + 2\sqrt{7}, 2 + 2\sqrt{7}, 5 - \sqrt{7}$
18. $\sqrt{5}$
19. (a) 35 Km/h; 519 ptas.
(b) $20\sqrt{5}$ Km/h; 669 ptas.
(c) $20\sqrt{7}$ Km/h; 792 ptas.
(d) 55 Km/h; 902 ptas.
20. $\pi/4$
21. pliegue $= 11'43 \cdot \sqrt{3}$ cm; ángulo $= \arctan \frac{1}{2}\sqrt{2}$
22. (a) $\max = 3\sqrt{3}\,r$; $\min = 4r$
(b) $\frac{1}{4}L$

23. El rectángulo tiene por base $4P/(3\pi + 8)$, y por altura $P(4 + \pi)/(6\pi + 16)$
24. $V = 48\pi$ para $0 \leq h < 2$; $V = 4\pi(4 + h)^3/(9h)$ para $h \geq 2$
26. $A = 2(\frac{24}{7})^{7/2}$
27. $m(t) = 0$ si $t^2 \geq \frac{1}{3}$; $m(t) = t^2 - \frac{1}{3}$ si $t^2 \leq \frac{1}{3}$

★4.23 Ejercicios (pág. 245)

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = -16xy$
2. $f_x = \operatorname{sen}(x + y) + x\cos(x + y)$; $f_y = x\cos(x + y)$; $f_{yy} = -x\operatorname{sen}(x + y)$;
$f_{xx} = 2\cos(x + y) - x\operatorname{sen}(x + y)$; $f_{xy} = f_{yx} = \cos(x + y) - x\operatorname{sen}(x + y)$
3. $D_1 f = y + y^{-1}$; $D_2 f = x - xy^{-2}$; $D_{1,1}f = 0$; $D_{2,2}f = 2xy^{-3}$; $D_{1,2}f = D_{2,1}f = 1 - y^{-2}$
4. $f_x = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$; $f_y = y(x^2 + y^2)^{-1/2}$; $f_{xx} = y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$;
$f_{yy} = x^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$; $f_{xy} = f_{yx} = -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$
5. $f_{yy} = 6x^2y\cos(x^2y^3) - 9x^4y^4\operatorname{sen}(x^2y^3)$;
$f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2\cos(x^2y^3) - 6x^3y^5\operatorname{sen}(x^2y^3)$
6. $f_{xy} = f_{yx} = 6\cos(2x - 3y)\cos[\cos(2x - 3y)] + 6\operatorname{sen}^2(2x - 3y)\operatorname{sen}[\cos(2x - 3y)]$
7. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = -2(x + y)(x - y)^{-3}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y(x - y)^{-3}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x(x - y)^{-3}$
8. $f_{xx} = -3xy^2(x^2 + y^2)^{-5/2}$; $f_{yy} = -x(x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}$;
$f_{xy} = f_{yx} = y(2x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}$

Capítulo 5

5.5 Ejercicios (pág. 254)

1. $\frac{5}{4}(b^4 - a^4)$
2. $\frac{4}{5}(b^5 - a^5) + 6(a^2 - b^2)$
3. $\frac{1}{5}(b^5 - a^5) + \frac{1}{4}(b^4 - a^4) - (b^2 - a^2) - 2(b - a)$
4. $\dfrac{1}{2}(b^2 - a^2) - \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$
5. $(b - a) + \frac{4}{3}(b^{3/2} - a^{3/2}) + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$
6. $\sqrt{2}(b^{3/2} - a^{3/2})$
7. $\frac{2}{5}(b^{5/2} - a^{5/2}) - 2(b^{3/2} - a^{3/2}) + 7(b^{1/2} - a^{1/2})$
8. $\frac{3}{2}(b^{4/3} - a^{4/3} - b^{2/3} + a^{2/3})$
9. $\frac{1}{3}(b^6 - a^6) - 3(\cos b - \cos a)$
10. $\frac{3}{7}(b^{7/3} - a^{7/3}) - 5(\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a)$
14. $f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi$; $f'(\frac{1}{4}\pi) = 2 - \pi$
15. $f(t) = -\operatorname{sen} t$; $c = \pi/3$
16. $f(t) = \operatorname{sen} t - 1$; $c = 0$
17. $f(x) = 2x^{15}$; $c = -\frac{1}{9}$
18. $p(x) = 3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$

19. $f''(1) = 2$; $f'''(1) = 5$
20. (a) $(1 + x^2)^{-3}$ (b) $2x(1 + x^4)^{-3}$ (c) $2x(1 + x^4)^{-3} - 3x^2(1 + x^6)^{-3}$
21. $\dfrac{2x^{13}}{1 + x^8} - \dfrac{3x^{20}}{1 + x^{12}}$
22. (a) 16 (b) $1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (c) $(36)^{1/3}$ (d) $\frac{1}{5}$
23. $f(a) = a(3 - \cos a)^{1/2}$
24. (a) $-\pi$ (b) $1 - \pi$ (c) 0 (d) $-\pi^2$ (e) $3\pi/2$
25. (a) $\pi - \frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2} + (\pi - \frac{1}{2})(t - 1)$ (d) $\frac{1}{2}(t - 1) + (\pi - \frac{1}{2})(t - 1)^2/2$
26. (a) ninguna (b) un ejemplo es $f(x) = x + x^2$ (c) ninguna
(d) Un ejemplo es $f(x) = 1 + x + x^2$ para $x \geq 0$, $f(x) = 1/(1 - x)$ para $x \leq 0$
28. (a) implica α y δ; (b) implica α; (c) implica α y γ; (d) implica α y δ;
(e) implica α, δ, y ϵ.

5.8 Ejercicios (pág. 264)

1. $\frac{1}{3}(2x + 1)^{3/2} + C$
2. $(\frac{2}{45})(1 + 3x)^{5/2} - (\frac{2}{27})(1 + 3x)^{3/2} + C$
3. $\frac{2}{7}(x + 1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x + 1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} + C$
4. $-\frac{2}{27}$
5. $-\dfrac{1}{4(x^2 + 2x + 2)^2} + C$
6. $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
7. $\frac{3}{7}(z - 1)^{7/3} + \frac{3}{4}(z - 1)^{4/3} + C$
8. $-\frac{1}{2}\csc^2 x + C$
9. $\frac{8}{3} - \sqrt{3}$
10. $\dfrac{1}{3 + \cos x} + C$
11. $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$
12. $2(\cos 2 - \cos 3)$
13. $-\dfrac{\cos x^n}{n} + C$
14. $-\frac{1}{3}\sqrt{1 - x^6} + C$
15. $\frac{4}{9}(1 + t)^{9/4} - \frac{4}{5}(1 + t)^{5/4} + C$
16. $x(x^2 + 1)^{-1/2} + C$
17. $\frac{1}{40}(8x^3 + 27)^{5/3} + C$
18. $\frac{3}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)^{2/3} + C$
19. $2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + C$
20. $-\frac{5}{2}(x - 1)^{2/5} + C$

5.10 Ejercicios (pág. 269)

1. $\operatorname{sen} x - x\cos x + C$
2. $2x\operatorname{sen} x + 2\cos x - x^2\cos x + C$
3. $x^3\operatorname{sen} x + 3x^2\cos x - 6x\operatorname{sen} x - 6\cos x + C$
4. $-x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C$
5. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$
6. $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + C$
15. (b) $(5\pi/32)a^6$
17. $\frac{2}{3}(3\sqrt{31} + \sqrt{3} - 11.35)$
18. $\tan x - x$; $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$
19. $-\cot x - x$; $-\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x$
20. (a) $n = 4$ (b) 2

*5.11 Ejercicios de repaso (pág. 272)

1. $g^{(k)}(0) = 0$ si $0 \leq k \leq n - 1$; $g^{(n)}(0) = n!$
2. $6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$
6. 3
7. $\frac{67}{5}$
9. $y = 16x^2/9$
10. (b) $f'(0) = 0$
11. $-\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{3}{25}\operatorname{sen} 5x - \frac{3}{5}x\cos 5x$
12. $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2}$
13. $-3^{10}/20$
14. $37/8281$
15. $\frac{1}{30}(1 + x^5)^6$
16. $1/265650$
17. $\cos\frac{1}{2} - \cos 1$
18. $[12(x - 1)^{1/2} - 24]\operatorname{sen}(x - 1)^{1/4} - 4[(x - 1)^{3/4} - 6(x - 1)^{1/4}]\cos(x - 1)^{1/4}$
19. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x^2$
20. $-\frac{2}{9}(1 + 3\cos^2 x)^{3/2}$
22. $a = 9$, $b = \frac{27}{2}$
23. $\frac{8}{15}$, $\frac{16}{35}$, $\frac{128}{315}$, $\frac{256}{693}$
24. $\frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{6}x^{12} + \frac{1}{11}x^{11}$
26. 3
27. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi + 2} - A\right)$
34. (a) $p(x) = -x^2 + x - 1$
35. (a) $P_1(x) = x - \frac{1}{2}$; $P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$; $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$;
$P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$; $P_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

Capítulo 6

6.9 Ejercicios (pág. 289)

1. (a) 1 (b) $(a + b)/(1 + ab)$
2. (a) 0 (b) $\dfrac{e - 1}{e + 1}$ (c) 4 (d) $\dfrac{(e^2 - 1)^2}{4e^2}$
3. crece si $0 < x < e$, decrece si $x > e$; convexa si $x > e^{3/2}$, cóncava si $0 < x < e^{3/2}$
4. $(2x)/(1 + x^2)$
5. $x/(1 + x^2)$
6. $x/(x^2 - 4)$
7. $1/(x \log x)$
8. $(2/x) + 1/(x \log x)$
9. $x/(x^4 - 1)$
10. $\dfrac{n(x + \sqrt{1 + x^2})^n}{\sqrt{1 + x^2}}$
11. $1/[2(1 + \sqrt{x + 1})]$
12. $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$
13. $1/(a - bx^2)$
14. $2\operatorname{sen}(\log x)$

15. $-1/(x \log^2 x)$
16. $\frac{1}{3}\log|2+3x| + C$
17. $x\log^2|x| - 2x\log|x| + 2x + C$
18. $\frac{1}{2}x^2\log|x| - \frac{1}{4}x^2 + C$
19. $\frac{1}{2}x^2\log^2|x| - \frac{1}{2}x^2\log|x| + \frac{1}{4}x^2 + C$
20. 3
21. $\log|\operatorname{sen} x| + C$
22. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\log|ax| - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$ si $n \neq -1$; $\frac{1}{2}\log^2|ax| + C$ si $n = -1$
23. $\dfrac{x^3}{3}(\log^2|x| - \frac{2}{3}\log|x| + \frac{2}{9}) + C$
24. $\log|\log x| + C$
25. -2
26. $\frac{2}{3}(-2 + \log|x|)\sqrt{1 + \log|x|} + C$
27. $\dfrac{x^4}{4}\log^3|x| - \frac{3}{16}x^4\log^2|x| + \frac{3}{32}x^4\log|x| - \frac{3}{128}x^4 + C$
34. $4\log x$
35. $3 + 3\log x$.
36. $a \cdot \log a$

6.17 Ejercicios (pág. 304)

1. $3e^{3x-1}$
2. $8xe^{4x^2}$
3. $-2xe^{-x^2}$
4. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
5. $-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
6. $2^x \log 2$
7. $2^{1+x^2}x\log 2$
8. $(\cos x)e^{\operatorname{sen} x}$
9. $-(\operatorname{sen} 2x)e^{\cos^2 x}$
10. 1
11. $e^x e^{e^x}$
12. $e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}}$
13. $e^x(x-1) + C$
14. $-e^{-x}(x+1) + C$
15. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
16. $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2}) + C$
17. $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$
18. $-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C$
19. $b = e^a$, a arbitrario
21. $x^x(1 + \log x)$
22. $1 + (1 + 2x + 2x^2)e^{x^2}$
23. $4(e^x + e^{-x})^{-2}$
24. $a^a x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\log a + a^x a^{a^x}(\log a)^2$
25. $1/[x\log x\log(\log x)]$
26. $e^x(1 + e^{2x})^{-1/2}$
27. $x^x x^{x^x}\left[\dfrac{1}{x} + \log x + (\log x)^2\right]$
28. $(\log x)^x\left(\log\log x + \dfrac{1}{\log x}\right)$

29. $2x^{-1+\log x}\log x$

30. $\dfrac{(\log x)^{x-1}}{x^{1+\log x}}[x - 2(\log x)^2 + x\log x \log(\log x)]$

31. $(\operatorname{sen} x)^{1+\cos x}[\cot^2 x - \log(\operatorname{sen} x)] - (\cos x)^{1+\operatorname{sen} x}[\tan^2 x - \log(\cos x)]$

32. $x^{-2+1/x}(1 - \log x)$

33. $\dfrac{54x - 36x^2 + 4x^3 + 2x^4}{3(1-x)^2(3-x)^{2/3}(3+x)^{5/3}}$

34. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{b_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{x - a_k}$

6.19 Ejercicios (pág. 308)

16. $\frac{5}{3}$
17. $\frac{3}{4}$
18. $\operatorname{senh} x = \frac{5}{12}$, $\cosh x = \frac{13}{12}$
19. $\frac{37}{12}$
20. $\frac{24}{25}$

6.22 Ejercicios (pág. 314)

12. $\dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ si $|x| < 2$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$ si $|x - 1| < \sqrt{2}$

14. $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$ si $|x| > 1$

15. $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$ si $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$, k entero

16. $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1 + x)}$ si $x \geq 0$

17. $\dfrac{1 + x^4}{1 + x^6}$

18. $-\dfrac{2x}{|x|(1 + x^2)}$ si $x \neq 0$

19. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}$ si $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$

20. $\dfrac{1}{2(1 + x^2)}$

21. $\dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$ si $k\pi < x < (k + \frac{1}{2})\pi$

22. $\dfrac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$ si $0 < |x| < 1$

23. $1/(1 + x^2)$ si $x \neq 1$

24. $\dfrac{4x}{\sqrt{1 - x^4}(\arccos x^2)^3}$ si $|x| < 1$

25. $\dfrac{1}{2x\sqrt{x - 1}\arccos(1/\sqrt{x})}$ si $x > 1$

27. $\dfrac{3x}{(1 - x^2)^2} + \dfrac{(1 + 2x^2)\operatorname{arcsen} x}{(1 - x^2)^{5/2}}$

29. $\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{|a|} + C$

30. $\operatorname{arcsen}\dfrac{x + 1}{\sqrt{2}} + C$

31. $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

32. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) + C$ si $ab > 0$;

$\frac{a}{2\,|a|\sqrt{-ab}}\log\left|\frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}}\right| + C$ si $ab < 0$

33. $\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C$

34. $\frac{1}{2}[(1 + x^2)\arctan x - x] + C$

35. $\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{2 + x^2}{9}\sqrt{1 - x^2} + C$

36. $\frac{1}{2}(1 + x^2)(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + C$

37. $(1 + x)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

38. $(\arctan\sqrt{x})^2 + C$

39. $\frac{1}{2}(\text{arcsen}\, x + x\sqrt{1 - x^2}) + C$

40. $\frac{(x - 1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1 + x^2}} + C$

41. $\frac{(x + 1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1 + x^2}} + C$

42. $\frac{1}{2}\left(\arctan x - \frac{x}{1 + x^2}\right) + C$

43. $\arctan e^x + C$

44. $\frac{1}{2}\log(1 + e^{-2x}) - \frac{\text{arccot}\, e^x}{e^x} + C$

45. $a\,\text{arcsen}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$

46. $\frac{2(b - a)}{|b - a|}\text{arcsen}\sqrt{\frac{x - a}{b - a}} + C$

47. $\frac{1}{4}\,|b - a|\,(b - a)\,\text{arcsen}\sqrt{\frac{x - a}{b - a}} + \frac{1}{4}\sqrt{(x - a)(b - x)}\,[2x - (a + b)] + C$

6.25 Ejercicios (pág. 326)

1. $\log|x - 2| + \log|x + 5| + C$
2. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{(x + 2)^4}{(x + 1)(x + 3)^3}\right| + C$
3. $-\frac{1}{3(x - 1)} + \frac{2}{9}\log\left|\frac{x - 1}{x + 2}\right| + C$
4. $\frac{1}{2}x^2 - x + \log\left|\frac{x^3(x + 2)}{x - 1}\right| + C$
5. $\log|x + 1| - \frac{3}{(2x + 1)^2} + \frac{3}{2x + 1} + C$
6. $2\log|x - 1| + \log(x^2 + x + 1) + C$
7. $x + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{8}{3}\arctan(x/2) + C$
8. $2\log|x| - \log|x + 1| + C$

9. $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2 + 1) + \dfrac{1}{2(x^2 + 1)} + C$

10. $\dfrac{9x^2 + 50x + 68}{4(x + 2)(x + 3)^2} + \frac{1}{8}\log\left|\dfrac{(x + 1)(x + 2)^{16}}{(x + 3)^{17}}\right| + C$

11. $\dfrac{1}{x + 1} + \log|x + 1| + C$

12. $\frac{1}{2}\log|x^2 - 1| - \log|x| + C$

13. $x + \frac{4}{5}\log|x - 2| - \frac{9}{5}\log|x + 3| + C$

14. $\log|x - 2| - \dfrac{4}{x - 2} + C$

15. $\dfrac{1}{2 - x} - \arctan(x - 2) + C$

16. $4\log|x + 1| - \frac{3}{2}\log|x| - \frac{5}{2}\log|x + 2| + C$

17. $\frac{1}{4}\log\left|\dfrac{x + 1}{x - 1}\right| - \dfrac{x}{2(x^2 - 1)} + C$

18. $\frac{1}{3}\log\dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + x + 1} + C$

19. $\log|x| + \dfrac{1}{x^2 + 1} + C$

20. $\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{1}{8}\log\left|\dfrac{x - 2}{x}\right| + C$

21. $\log\dfrac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} - x + \arctan x + C$

22. $\frac{1}{4}\log|(x - 1)/(x + 1)| - \frac{1}{2}\arctan x + C$

23. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\log\dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C$

24. $(x^2 + 2x + 2)^{-1} + \arctan(x + 1) + C$

25. $-x/(x^5 + x + 1) + C$

26. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{1 + 3\tan(x/2)}{\sqrt{5}} + C$

27. $\dfrac{2}{\sqrt{1 - a^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1 - a}{1 + a}}\tan\dfrac{x}{2}\right) + C$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}\log\left|\dfrac{a + \cos x + \sqrt{a^2 - 1}\,\mathrm{sen}\,x}{1 + a\cos x}\right| + C$

29. $x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C$

30. $\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C$

31. $-\frac{\cos x}{a(a\operatorname{sen} x + b\cos x)} + C$

32. $(\pi/4) - \frac{1}{2}\log 2$

33. $\frac{1}{2}x\sqrt{3 - x^2} + \frac{3}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

34. $-\sqrt{3 - x^2} + C$

35. $\sqrt{3 - x^2} - \sqrt{3}\log\left(\frac{\sqrt{3 - x^2} + \sqrt{3}}{x}\right) + C$

36. $\sqrt{x^2 + x} + \frac{1}{2}\log(2\sqrt{x^2 + x} + 2x + 1) + C$

37. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \frac{5}{2}\log(x + \sqrt{x^2 + 5}) + C$

38. $\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\log(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}) + C$

39. $\log(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + 1}) + C$

40. $-\frac{\sqrt{2 - x - x^2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\log\left(\frac{\sqrt{2 - x - x^2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x + 1}{3}\right) + C$

6.26 Ejercicios de repaso (pág. 328)

1. $f(x) + f(1/x) = \frac{1}{2}(\log x)^2$

2. $f(x) = \log\sqrt{3/(2 + \cos x)}$

4. 1

5. (a) $-\frac{7}{12}$ (b) $V = \int_1^4 \frac{\pi(4x + 2)}{x(x + 1)(x + 2)}\,dx$

6. (a) $x \geq 1$ (c) $F(ax) - F(a)$; $F(x) - \frac{e^x}{x} + e$; $xe^{1/x} - e - F\left(\frac{1}{x}\right)$

7. (a) No existe tal función (b) $-2^x \log 2$ (c) $\frac{1}{2}x \pm 1$

9. (a) $g(3x) = 3e^{2x}g(x)$ (b) $g(nx) = ne^{(n-1)x}g(x)$ (c) 2 (d) $C = 2$

10. $f(x) = b^{x/a}g(x)$, siendo g una función periódica con período a.

12. (a) $-Ae^{-a}$ (b) $\frac{1}{2}A$ (c) $A + 1 - \frac{1}{2}e$ (d) $e\log 2 - A$

13. (b) $c_0 + nc_1 + n(n - 1)c_2 + n(n - 1)(n - 2)c_3$

    (c) Si $p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$, entonces $f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{m} k!\binom{n}{k}c_k$

16. (a) $\frac{2}{3}x^2(x + |x|)$

    (b) $x - \frac{1}{3}x^3$ si $|x| \leq 1$; $x - \frac{1}{2}x|x| + \frac{1}{6}\frac{|x|}{x}$ si $|x| > 1$

    (c) $1 - e^{-x}$ si $x \geq 0$; $e^x - 1$ si $x < 0$

    (d) x si $|x| \leq 1$; $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\frac{|x|}{x}$ si $|x| > 1$

17. $f(x) = \sqrt{(2x+1)/\pi}$
18. (a) $\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$ (b) $\frac{1}{4}\pi(1 - e^{-4t})$ (c) $\frac{1}{2}\pi[1 - e^{-2t}(2t+1)]$ (d) π
19. (a) $\log 3 - 2\log 2$ (b) No existe ningún x real
20. (a) cierta (b) falsa (c) cierta (d) falsa si $x < 0$
25. (d) $\int_0^x e^{-t}t^n\,dt = n!e^{-x}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$
27. (a) $f(t) = 2\sqrt{t} - 1$ si $t > 0$
    (b) $f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$ si $0 \le t \le 1$
    (c) $f(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}$ si $|t| \le 1$
    (d) $f(t) = t$ si $t \le 0$; $f(t) = e^t - 1$ si $t > 0$
28. (b) $C_n = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{\log^k 2}$ (c) $b = \log 2$ (d) $e^2\,\mathrm{Li}\,(e^{2x-2})$
29. $g(y) = -e^y$; todo y
30. (b) constante $= \frac{3}{2}$

Capítulo 7

7.8 Ejercicios (pág. 348)

8. (b) $\frac{55\sqrt{2}}{672} + R$, donde $|R| \le \frac{\sqrt{2}}{7680} < 2 \cdot 10^{-4}$
9. $0.9461 + R$, donde $|R| < 2 \cdot 10^{-4}$

7.11 Ejercicios (pág. 356)

1. $1 + x\log 2 + \frac{1}{2}x^2\log^2 2$
2. $\cos 1 + (\cos 1 - \operatorname{sen} 1)(x-1) - \frac{1}{2}(2\operatorname{sen} 1 + \cos 1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}(\operatorname{sen} 1 - 3\cos 1)(x-1)^3$
3. $x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{59x^5}{120} + \frac{x^6}{8}$
4. $a = 0$, $b = 1$, $c = -\frac{1}{2}$
5. $-\frac{2}{3}$
6. a/b
7. $\frac{2}{3}$
8. $-\frac{1}{6}$
9. $\frac{1}{2}$
10. 1
11. 1
12. $\log a/\log b$
13. $\frac{1}{3}$
14. $\frac{1}{2}$
15. $\frac{1}{6}$
16. -1
17. -1
18. $\frac{1}{6}$
19. 1
20. -2
21. $\frac{1}{6}\log a$
22. $\frac{1}{6}$
23. $1/e$
24. e^3
25. $-e/2$
26. $e^{-1/2}$
27. $e^{1/6}$
28. $\frac{1}{2}$
29. $\frac{1}{2}$
30. $a = 2$; límite $= \frac{3}{2}$
33. $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 4$; límite $= e^2$

7.13 Ejercicios (pág. 362)

1. $\frac{14}{3}$
2. -2
3. $\frac{1}{3}$
4. $-\frac{1}{6}$
5. $(a/b)^2$
6. $\frac{1}{6}$

7. $1/\sqrt{2a}$
8. -2
9. 1
10. $-\frac{1}{3}$
11. $n(n+1)/2$
12. $\frac{1}{3}(a^2-b^2)/(a^2b^2)$
13. 6 cuando $x \to 0$; $4/\pi$ cuando $x \to \pi/2$
14. $a = -3$; $b = \frac{9}{2}$
15. $a = 4$; $b = 1$
16. (a) $T(x) = \tan \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ (b) $S(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ (c) $\frac{3}{2}$
17. tE/L
18. $-\dfrac{At \cos kt}{2k}$

7.17 Ejercicios (pág. 371)

1. 0
2. 1
3. $\frac{1}{3}$
4. $1/\sqrt{b}$
5. $\frac{1}{24}$
6. 1
7. 0
8. $e/2$
9. $+\infty$
10. 1
11. 0
12. 0
13. $\frac{1}{2}$
14. 0
15. 0
16. 1
17. -1
18. 1
19. e
20. 1
21. $1/e$
22. 1
23. e^e
24. $e^{2/\pi}$
25. $-\frac{1}{2}$
26. $\log 2$
27. $\frac{1}{2}$
28. $c = \frac{1}{5}$; límite $= \frac{7}{5}$
29. $\frac{1}{2}$
30. $c = 1$; límite $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$
32. (b) 11,55 años (c) 11,67 años

Capítulo 8

8.5 Ejercicios (pág. 381)

1. $y = e^{3x} - e^{2x}$
2. $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^5$
3. $y = 4 \cos x - 2 \cos^2 x$
4. $y = x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2}$
5. $x = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$
6. $y = (x + C)/\operatorname{sen} x$
7. $y = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)(C - e^{-x^2})$
8. $y = \operatorname{sen} x + C/\operatorname{sen} x$
9. $y = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^2 \left(x + \dfrac{1}{x-2} + C\right)$
10. $y = xT(x) + Cx$
11. $f(x) = 1 + \log x$
12. Sólo la función dada
14. $y = (\sqrt{2}e^{2x} + e^{2x} - e^x)^2$
15. $y = 1/(x^2 - x + 2 - e^{-x})$
16. $y = (x^3 - x)^2$
17. $y = 1/(x^2 + x - x^2 \log x)$
18. (a) $y = \left(\dfrac{e^x + e^{2-x}}{2x}\right)^{1/2}$ (b) $y = -\left(\dfrac{e^x + e^{2-x}}{2x}\right)^{1/2}$ (c) $y^2 = \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$
20. (a) $y = \dfrac{Ce^{3x} + 2}{Ce^{3x} - 1}$ siendo $C = \dfrac{b+2}{b-1}$ (b) $y = \dfrac{e^{3x} + 2C}{e^{3x} - C}$ siendo $C = \dfrac{b-1}{b+2}$

8.7 Ejercicios (pág. 390)

1. $100(1 - 2^{-1/16}) = 4{,}2$ por ciento
2. Cuatro veces la cantidad inicial
3. (a) $T = (\log n)/k$ (b) $w(t) = (b - t)/(b - a)$
4. $256(1 - e^{-t/8})$ si $0 \le t \le 10$; $16 + 166e^{20-2t}$ si $t \ge 10$
6. $v \to \sqrt{mg/k}$
7. (c) 54,5 min (d) $T = \dfrac{1}{10k}[1 + (600 - t)k + (1400k - 1)e^{-kt}]$
8. 55°
9. 8,85 Kg
10. 24,81 Kg
13. Para la ecuación (8.20), $x = x_0e^{k(t-t_0)}$; para la ecuación (8.22), $\alpha = Mk$
15. $x = M\left[1 + \exp\left(-M\int_{t_0}^{t} k(u)\,du\right)\right]^{-1}$
16. (a) 200 Millones (b) 217 Millones
17. (a) 0,026 por año (b) 0,011 por año; 260 Millones 450 Millones
18. $dx/dt = kx(1 - at)$; $x = x_0e^{k(t-at^2/2)}$; curva (d)

8.14 Ejercicios (pág. 401)

1. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
2. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$
3. $y = c_1 + c_2e^{4x}$
4. $y = c_1 + c_2e^{-4x}$
5. $y = e^x(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x)$
6. $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$
7. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$
8. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$
9. $y = e^{-x}(c_1 + c_2x)$
10. $y = e^x(c_1 + c_2x)$
11. $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^{-3x/2}$
12. $y = -\cos(5x - 15)$
13. $y = \dfrac{a}{2}e^{b(x-1)} + \dfrac{b}{2}e^{a(x-1)}$, donde $a = 2 - \sqrt{5}, b = 2 + \sqrt{5}$
14. $y = 2e^{-2x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$
15. $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x-\pi} \operatorname{sen} 5x$; $v(x) = \frac{5}{6}e^{-2x-\pi} \operatorname{sen} 3x$
16. $u(x) = 6(e^{4x} - e^{-x})/5$; $v(x) = e^x - e^{-5x}$
17. $k = n^2\pi^2$; $f_k(x) = C \operatorname{sen} n\pi x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
19. (b) No (c) si $k \ne 0$ la condición es $a_1 - a_2 \ne n\pi/k$
20. (a) $y'' - y = 0$
    (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
    (c) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$
    (d) $y'' + 4y = 0$
    (e) $y'' - y = 0$

8.17 Ejercicios (pág. 408)

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - x$
2. $y = c_1e^x + c_2 - 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$

3. $y = c_1e^{-x} + c_2 + \frac{1}{3}x^3$
4. $y = e^x(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x) - \frac{8}{27} + \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
5. $y = c_1e^x + c_2e^{4x} + \frac{9}{32} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x^2$
6. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} - \frac{7}{12} + \frac{1}{2}x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$
7. $y = (c_1 + \frac{1}{4}x)e^{2x} + c_2e^{-2x}$
8. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}e^{-2x}$
9. $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + \frac{1}{3}x)e^x$
10. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^x + \frac{1}{4}e^{2x}$
11. $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + \frac{1}{3}x)e^x + \frac{1}{4}e^{2x}$
12. $y = (c_1 + c_2x + \frac{1}{3}x^3)e^x + x + 2$
13. $y = (c_1 + c_2x - \log|x|)e^{-x}$
14. $y = c_1 \operatorname{sen} x + (c_1 + \log|\csc x + \cot x|) \cos x - 2$
15. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + (e^x - e^{-x}) \log(1 + e^x) - xe^x - 1$
16. $y = (c_1 + \frac{1}{3}x)e^x + \frac{1}{3}e^{-x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}(e^x + e^{-2x}) \log(1 + e^x)$
17. $y = \begin{cases} (c_1 + c_2x)e^{-3x} & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 2, \\ (a + bx)e^{-3x} + \frac{1}{9} & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$
18. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{6}xe^{3x}$
19. $y = (c_1 - \frac{1}{6}x) \cos 3x + (c_2 - \frac{1}{18}) \operatorname{sen} 3x$
20. $y = (c_1 - \frac{1}{2}x) \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$
21. $y = c_1 \cos x + (c_2 + \frac{1}{2}x) \operatorname{sen} x$
22. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + x \cos x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} x$
23. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + x \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} \cos x$
24. $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{5}e^{2x}(3 \operatorname{sen} x + \cos x)$
25. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{1}{40}e^{2x}(3 \operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$

8.19 Ejercicios (pág. 414)

1. $2\sqrt{2}$
2. $\pm 140\pi$
3. $A = C, \quad m = k, \quad \beta = \alpha - \frac{1}{2}\pi$
4. $y = 3 \cos 4\pi x$
5. $C = (y_0^2 + v_0^2)^{1/2}$
6. $y = \frac{1}{3}\sqrt{6}, \quad y'' = -12y = -4\sqrt{6}$
7. $y = -A \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{3}$, siendo A positivo
8. $I(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t + 1 - \cos t & \text{si } 0 \le t \le 2\pi, \\ \operatorname{sen} t & \text{si } t \ge 2\pi \end{cases}$
9. (a) $1/(2\pi\sqrt{2})$ (b) $R < 2$
10. $r(t) = \frac{1}{2}gt^2 - ct + c\left(t - \dfrac{w}{k}\right) \log\left(1 - \dfrac{kt}{w}\right)$
11. $r(t) = ct + c\left(\dfrac{w}{k} - t\right) \log\left(1 - \dfrac{kt}{w}\right)$

12. $r(t) = \frac{wv_0}{k} \log \frac{w}{w - kt}$

8.22 Ejercicios (pág. 421)

1. $y' + \frac{2}{3} = 0$
2. $y' + 2y = 0$
3. $yy' - x = 0$
4. $xy' + y = 0$
5. $2xy' - y = 0$
6. $(x^2 - y^2 - 1)y' - 2xy = 0$
7. $(x - 1)y' - xy = 0$
8. $(x^2 - 4)y' - y = 0$
9. $y' + y \tan x = 0$
10. $\sqrt{1 - x^2}\, y' + y^2 + 1 = 0$
11. $(x^2 - y^2 - 1)y' - 2xy = 0$
12. $(x^2 + 2xy - y^2 - 2)y' - y^2 - 2xy + x^2 + 2 = 0$
14. $x + y = -1$ es a la vez una curva integral y una isoclina
15. $y = Cx + C^2$; envolvente: $y = -\frac{1}{4}x^2$

8.24 Ejercicios (pág. 424)

1. $y^3 = \frac{3}{4}x^4 + C$
2. $\cos x = Ce^{1/\cos y}$
3. $y(C + \log|x + 1|) = 1$
4. $y - 2 = C(y - 1)e^x$
5. $y^2 + 2\sqrt{1 - x^2} = C$
6. $y = C(x - 1)e^x$
7. $\arctan y + \operatorname{arcsen} x = C$
8. $(1 + y^2)(1 + x^2) = Cx^2$
9. $y^4(x + 2) = C(x - 2)$
10. $1 + y^2 = Cx^2e^{x^2}$
11. $(y + \frac{1}{2})e^{-2y} = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + C$
12. $x^2 - 1 = C(y^2 + 1)$
13. $f(x) = 2e^{x-1}$
14. $f(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$
15. $f(x) = -\log(1 + x^2)$
16. $f(x) = \pm 1$; $f(x) = \operatorname{sen}(x + C)$; también, aquellas funciones continuas cuyas gráficas pueden obtenerse uniendo porciones de las curvas $y = \operatorname{sen}(x + C)$ con porciones de las rectas $y = \pm 1$. Uno de tales ejemplos es $f(x) = -1$ para $x \le 0$, $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi)$ para $0 \le x \le 3\pi$, $f(x) = 1$ para $x \ge 3\pi$
17. $f(x) = C$
18. $f(x) = Ae^{x/C}$
19. $f(x) = 0$
20. $f(x) = 0$

8.26 Ejercicios (pág. 429)

2. $x^2 + y^2 = C$
3. $y = x \log|Cx|$
4. $x^2 + y^2 = Cx^4$
5. $y^2 = C(x^2 + y^2)^3$
6. $x^2 + 2Cy = C^2, \quad C > 0$
7. $y(Cx^2 - 1) = x$
8. $\arctan \frac{x}{y} + \log|y| = C$
9. $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \log \frac{y^3}{x} = C$
10. $\tan \frac{y}{2x} = Ce^x$
11. $(x + y)^3 = Cx^4y^4$

8.28 Ejercicios de repaso (pág. 434)

1. $3x - 2y = C$
2. $x^2 - y^2 = C$
3. $x^2 + y^2 - Cx + 1 = 0$
4. $2x^2 + y^2 = C$
5. $2y^2 - x^2 = C$
6. $y^2 = x + C$
7. $xy = C$
8. $y^2 - \log(\operatorname{sen}^2 x) = C$
9. $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - 1$
10. $x^2 + y^2 - C(x + y) + 2 = 0$
11. $y = -2x \log x$
12. $y = -\dfrac{1}{k} x \log x$
13. $f(x) = Cx^n$, o $f(x) = Cx^{1/n}$
14. $f(x) = Cx^{n/2}$, o $f(x) = Cx^{1/(2n)}$
15. $y = \dfrac{6}{\pi} \dfrac{x}{x^3 + 2}$
16. $y = \frac{3}{2}(1 - e^{x-1})$; $b = \dfrac{3}{2e} - 3$
17. $y = -6x^2 + 5x + 1$
18. 59,6 seg
19. $\dfrac{2\pi R^2\sqrt{h}}{9A_v}$ seg, siendo R el radio de la base y h la altura del cono
20. $y = e^x$
21. $y^3 = -\frac{1}{3}x + Cx^{-1/2}$ para $x > 0$, o $y^3 = -\frac{1}{3}x$ para todo x
22. $m = -1$; $y^2 \log|y| = \frac{1}{2}e^{-2x} + Cy^2$
23. (a) $a = 0, b = \frac{1}{4}$ (b) $f(x) = 2x^{1/2}$
24. (b) $y = e^{4x} - e^{-x^3/3}$
25. (a) $1/(t + 1)$ gramos en t años (b) 1 gramos^{-1} años^{-1}
26. $[1 - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})t]^2$ gramos en t años $2 + \sqrt{2}$ años
27. (a) $365e^{-2.65t}$ ciudadanos en t años (b) $365(1 - e^{-2,65t})$ defunciones en t años
28. 6,96 mi/seg = 25 056 mi/h
29. (a) Mínimo relativo en 0 (b) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{20}{9}$ (d) $\frac{2}{3}$
30. (b) Mínimo (c) $\frac{1}{2}$

Capítulo 9

9.6 Ejercicios (pág. 445)

1. (a) $2i$ (b) $-i$ (c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (d) $18 + i$ (e) $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ (f) $1 + i$ (g) 0 (h) $1 + i$
2. (a) $\sqrt{2}$ (b) 5 (c) 1 (d) 1 (e) $\sqrt{2}$ (f) $\sqrt{65}$
3. (a) $r = 2, \theta = \frac{1}{2}\pi$ (b) $r = 3, \theta = -\frac{1}{2}\pi$ (c) $r = 1, \theta = \pi$ (d) $r = 1, \theta = 0$ (e) $r = 2\sqrt{3}, \theta = 5\pi/6$ (f) $r = 1, \theta = \frac{1}{4}\pi$ (g) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{1}{4}\pi$ (h) $r = 2\sqrt{2}, \theta = -\frac{1}{4}\pi$ (i) $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \theta = -\frac{1}{4}\pi$ (j) $r = \frac{1}{2}, \theta = -\frac{1}{2}\pi$
4. (a) $y = 0$, x arbitrario (b) $x > 0, y = 0$ (c) Todo x y todo y (d) $x = 0$, y arbitrario; o $y = 0$, x arbitrario (e) $x = 1, y = 0$ (f) $x = 1, y = 0$

9.10 Ejercicios (pág. 453)

1. (a) i (b) $-2i$ (c) -3 (d) 1 (e) $1 + i$ (f) $(1 + i)/\sqrt{2}$
(g) $\sqrt{2}\, i$ (h) $-i$
2. (a) $y = 0$, x arbitrario (b) $x = y = 0$ (c) $x = 0, y = (2n + 1)\pi$, siendo n un entero cualquiera (d) $x = 1, y = \frac{1}{2}\pi + 2n\pi$, siendo n un entero cualquiera
3. (b) $z = 2n\pi i$, siendo n un entero cualquiera
6. $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k})$ para $k = 1, 2, \ldots, n$
10. (c) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $-i$
(d) $a + bi$, $-a - bi$, $-b + ai$, $b - ai$, siendo $a = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ y $b = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
(e) $a - bi$, $-a + bi$, $b + ai$, $-b - ai$, siendo a y b los de (d)
11. (a) $1, e^{-\pi/2}, e^{-\pi}$ (c) $-\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \le \pi$
13. $B = A/(b - \omega^2 + a\omega i)$

Capítulo 10

10.4 Ejercicios (pág. 467)

1. (a) Converge (b) 0
2. (a) Converge (b) -1
3. (a) Divergente
4. (a) Converge (b) $\frac{1}{5}$
5. (a) Converge (b) 0
6. (a) Divergente
7. (a) Converge (b) 0
8. (a) Divergente
9. (a) Converge (b) 1
10. (a) Divergente
11. (a) Converge (b) 0
12. (a) Converge (b) $\frac{1}{3}$
13. (a) Converge (b) 0
14. (a) Converge (b) 0
15. (a) Converge (b) 0
16. (a) Converge (b) 0
17. (a) Converge (b) e^2
18. (a) Divergente
19. (a) Converge (b) 0
20. (a) Divergente
21. (a) Converge (b) 0
22. (a) Divergente
23. $N > 1/\epsilon$
24. $N > 1/\epsilon$
25. $N > 1/\epsilon$
26. $N > 1/\epsilon$
27. $N > \sqrt{2/\epsilon}$
28. $N > \dfrac{\log \epsilon}{\log (9/10)}$

34. c) Sea $s_n = \dfrac{b - a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right)$ y definamos t_n del mismo modo como una suma de 1 a n. Las dos sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen hacia la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

10.9 Ejercicios (pág. 477)

22. (a) 1 (b) $2e - 3$ (c) $e + 1$

23. (b) 5
24. (a) Idéntica (b) No idéntica (c) No idéntica (d) Idéntica

★10.10 Ejercicios sobre desarrollos decimales (pág. 479)

1. $\frac{4}{9}$
2. $\frac{51}{99}$
3. $\frac{200}{99}$
4. $\frac{41}{333}$
5. $\frac{1}{7}$

10.14 Ejercicios (pág. 486)

1. Divergente
2. Convergente
3. Convergente
4. Convergente
5. Convergente
6. Convergente
7. Convergente
8. Convergente
9. Divergente
10. Convergente
11. Divergente
12. Convergente
13. Divergente
14. Convergente
15. Convergente para $s > 1$; divergente para $s \leq 1$
16. Convergente
17. Convergente
18. Convergente

10.16 Ejercicios (pág. 490)

1. Convergente
2. Convergente
3. Convergente
4. Divergente
5. Divergente
6. Divergente
7. Divergente
8. Convergente
9. Convergente
10. Divergente
11. Convergente
12. Divergente
13. Convergente
14. Convergente si $0 < r < 1$, o cuando $x = k\pi$, k entero cualquiera

10.20 Ejercicios (pág. 499)

1. Condicionalmente convergente
2. Condicionalmente convergente
3. Divergente para $s \leq 0$; condicionalmente convergente para $0 < s \leq 1$; absolutamente convergente para $s > 1$
4. Absolutamente convergente
5. Absolutamente convergente
6. Absolutamente convergente
7. Divergente
8. Divergente
9. Divergente
10. Condicionalmente convergente
11. Absolutamente convergente
12. Divergente
13. Absolutamente convergente
14. Absolutamente convergente
15. Divergente

16. Absolutamente convergente
17. Absolutamente convergente
18. Absolutamente convergente
19. Condicionalmente convergente
20. Condicionalmente convergente
21. Divergente
22. Condicionalmente convergente
23. Divergente
24. Condicionalmente convergente
25. Divergente para $s \leq 0$; condicionalmente convergente para $0 < s \leq 1$; absolutamente convergente para $s > 1$
26. Absolutamente convergente
27. Absolutamente convergente
28. Divergente
29. Absolutamente convergente
30. Absolutamente convergente
31. Absolutamente convergente
32. Absolutamente convergente
33. $z = 0$
34. Todo z
35. Todo z que satisfaga $|z| < 3$
36. Todo z
37. Todo z excepto enteros negativos
38. Todo $z \neq 1$ que satisfaga $|z| \leq 1$
39. $|z| < e^{-1/85}$
40. Todo z
41. Todo $z \neq 0$ que satisfaga $0 \leq |z - 1| \leq 1$
42. Todo $z \neq -1$ que satisfaga $|2z + 3| \leq 1$
43. Todo $z = x + iy$ con $x \geq 0$
44. Todo z que satisfaga $|2 + 1/z| > 1$
45. Todo z que satisfaga $|2 + 1/z| > 1$
46. Todo $z \neq 0$
47. $|x - k| \leq \pi/4$, k entero cualquiera
48. $|x - k| \leq \pi/6$, k entero cualquiera

10.22 Ejercicios de repaso (pág. 506)

1. (a) 0
   (b) Converge si $c \leq 1$; el límite es 0 si $c < 1$; el límite es 1 si $c = 1$; diverge si $c > 1$
2. (a) 1 (b) el mayor de los dos números a y b
3. $\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2$
4. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
5. 0
7. Divergente
8. Convergente si $s < \frac{1}{2}$; divergente si $s \geq \frac{1}{2}$
9. Convergente
10. Divergente
11. Divergente
14. $c \leq 3$
15. $a \geq 3$
17. Cuando $a \geq -1$, el límite es $\dfrac{a+1}{a+2}$; cuando $a \leq -1$, el límite es 0

10.24 Ejercicios (pág. 513)

1. Divergente
2. Convergente
3. Convergente
4. Convergente
5. Convergente
6. Convergente
7. Convergente
8. Convergente
9. Divergente
10. Convergente si $s > 1$; divergente si $s \leq 1$

11. $C = \frac{1}{2}$; la integral tiene el valor $\frac{1}{4}\log\frac{5}{4}$
12. $C = \frac{1}{2}$; la integral tiene el valor $\frac{1}{4}\log\frac{8}{3}$
13. $C = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; la integral tiene el valor $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\log\sqrt{2}$
14. $a = b = 2e - 2$
15. $a = 1$; $b = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$
16. (b) Divergen ambas
17. (c) Diverge

Capítulo 11

11.7 Ejercicios (pág. 526)

1. $r = 2$; convergente para $|z| < 2$
2. $r = 2$; convergente para $|z| \leq 2$, $z \neq 2$
3. $r = 2$; convergente para $|z + 3| \leq 2$, $z \neq -1$
4. $r = \frac{1}{2}$; convergente para $|z| \leq \frac{1}{2}$
5. $r = \frac{1}{2}$; convergente para $|z| < \frac{1}{2}$
6. $r = e$; convergente para $|z| < e$
7. $r = 1$; convergente para $|z + 1| \leq 1$
8. $r = +\infty$
9. $r = 4$; convergente para $|z| < 4$
10. $r = 1$; convergente para $|z| < 1$
11. $r = 1$
12. $r = 1/e$
13. $r = +\infty$ si $a = k\pi$, k entero; $r = 1$ si $a \neq k\pi$
14. $r = e^{-a}$
15. $r = \max(a, b)$
16. $r = \min(1/a, 1/b)$

11.13 Ejercicios (pág. 536)

1. $|x| < 1$; $1/(1 + x^2)$
2. $|x| < 3$; $1/(3 - x)$
3. $|x| < 1$; $x/(1 - x)^2$
4. $|x| < 1$; $-x/(1 + x)^2$
5. $|x| < \frac{1}{2}$; $\dfrac{1}{1 + 2x} + \dfrac{\log(1 + 2x)}{2x}$
6. $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$; $-\log(1 - 2x)$
7. $-2 \leq x < 2$; $\dfrac{2}{x}\arctan\dfrac{x}{2}$
8. Todo x; e^{-x^3}

9. Todo x; $x^{-3}(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2)$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$

10. Todo x; $\dfrac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$ si $x \neq 1$; $\frac{1}{2}$ si $x = 1$

22. $-\dfrac{\sqrt{2}\,2^{97}}{98!}$

23. $a_0 = 4\sqrt{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 5\sqrt{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{15}{8}\sqrt{2}$

11.16 Ejercicios (pág. 542)

1. $a_{n+2} = \dfrac{(n+3)(n-2)}{(n+2)(n+1)}\, a_n$ para $n \geq 0$; $f(x) = 1 - 3x^2$

2. $a_{n+2} = \dfrac{(n+4)(n-3)}{(n+2)(n+1)}\, a_n$ para $n \geq 0$; $f(x) = 2x - \dfrac{10}{3}x^3$

3. Todo x
4. Todo x
5. Todo x; $a = 1, b = 0$
6. Todo x; $f(x) = e^{x^2}$
7. Todo x; $f(x) = e^x - x - 1$
8. Todo x; $f(x) = \cos 2x$
9. Todo x; $f(x) = x + \operatorname{senh} 3x$
12. $y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$
13. $y = x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{14}x^7 + \frac{23}{1120}x^{10} + \cdots$
14. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{060}x^8 + \frac{7}{8800}x^{11} + \cdots$

15. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$

16. $$y = c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots[(3n-1)\cdot(3n)]}\right) + c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots[(3n)\cdot(3n+1)]}\right)$$

17. $y = c_0\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right) + c_1 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$

18. $a_1 = -1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{2}{3}$; $f(x) = (x+1)e^{-2x}$

19. $a_5 = 0, \quad a_6 = -\dfrac{7}{8!}$; $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ si $x \neq 0$; $f(0) = \frac{1}{2}$; $f(\pi) = -2/\pi^2$

20. (c) $\sqrt{2} = 1{,}4142135623$
21. (b) $\sqrt{3} = 1{,}732050807568877$

Capítulo 12

12.4 Ejercicios (pág. 551)

1. (a) $(5, 0, 9)$ (b) $(-3, 6, 3)$ (c) $(3, -1, 4)$ (d) $(-7, 24, 21)$ (e) $(0, 0, 0)$
5. $x = \frac{1}{5}(3c_1 - c_2)$, $y = \frac{1}{5}(2c_2 - c_1)$
6. (a) $(x + z, x + y + z, x + y)$ (c) $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$
7. (a) $(x + 2z, x + y + z, x + y + z)$ (b) Un ejemplo: $x = -2$, $y = z = 1$
8. (a) $(x + z, x + y + z, x + y, y)$ (c) $x = -1$, $y = 4$, $z = 2$
12. Las diagonales de un paralelógramo se cortan en su punto medio.

12.8 Ejercicios (pág. 558)

1. (a) -6 (b) 2 (c) 6 (d) 0 (e) 4
2. (a) $(A \cdot B)C = (21, 28, -35)$ (b) $A \cdot (B + C) = 64$ (c) $(A + B) \cdot C = 72$
   (d) $A(B \cdot C) = (30, 60, -105)$ (e) $A/(B \cdot C) = \left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{-7}{15}\right)$
5. Un ejemplo: $(1, -5, -3)$
6. Un ejemplo: $x = -2$, $y = 1$
7. $C = \frac{4}{9}(-1, -2, 2)$, $D = \frac{1}{9}(22, -1, 10)$
8. $C = \frac{1}{11}(1, 2, 3, 4, 5)$, $D = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{44}, \frac{1}{33}, \frac{-5}{88}, \frac{-7}{55}\right)$
9. (a) $\sqrt{74}$ (b) $\sqrt{14}$ (c) $\sqrt{53}$ (d) 5
10. (a) $(1, -1)$ o $(-1, 1)$ (b) $(1, 1)$ o $(-1, -1)$ (c) $(3, 2)$ o $(-3, -2)$
    (d) $(b, -a)$ o $(-b, a)$
11. (a) $\frac{1}{\sqrt{42}}(4, -1, 5)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{14}}(-2, -3, 1)$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$
    (d) $\frac{1}{\sqrt{42}}(-5, -4, -1)$ (e) $\frac{1}{\sqrt{42}}(-1, -5, 4)$
12. A y B, C y D, C y E, D y E
13. (a) $(2, -1)$ y $(-2, 1)$ (b) $(2, 1)$ y $(-2, -1)$ (c) $(1, 2)$ y $(-1, -2)$
    (d) $(1, 2)$ y $(-1, -2)$
14. Un ejemplo: $C = (8, 1, 1)$
15. Un ejemplo: $C = (1, -5, -3)$
16. $P = \frac{11}{25}(3, 4)$, $Q = \frac{2}{25}(-4, 3)$
17. $P = \frac{5}{2}(1, 1, 1, 1)$, $Q = \frac{1}{2}(-3, -1, 1, 3)$
18. $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$
20. La suma de los cuadrados de los lados de un paralelógramo cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.
22. 4; $12\sqrt{2}$

23. $C = \frac{1}{11}(1, 2, 3, 4, 5)$, $D = \frac{1}{11}\left(10, \frac{7}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{4}, \frac{-14}{5}\right)$

24. $C = tA$, $D = B - tA$, siendo $t = (A \cdot B)/(A \cdot A)$

12.11 Ejercicios (pág. 563)

1. $\frac{11}{9}B$
2. $\frac{5}{2}B$
3. (a) $\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-2}{7}$ (b) $\left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-2}{7}\right)$ y $\left(\frac{-6}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{2}{7}\right)$
5. $0, \sqrt{\frac{35}{41}}, \sqrt{\frac{6}{41}}$
6. $7\pi/8$
8. $\pi/6$
9. 0
10. b) La ecuación es válida para x e y cualesquiera si $\cos\theta = 1$; si $\cos\theta \neq 1$ la única solución es $x = y = 0$
14. Todas excepto b).
17. c) Todas excepto el teorema 12.4 a).
18. a) Todas

12.15 Ejercicios (pág. 571)

1. (a) $x = y = \frac{1}{2}$ (b) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ (c) $x = 4$, $y = -1$ (d) $x = 1$, $y = 6$
2. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{7}{8}$
3. $x = 3$, $y = -4$
7. Todas $t \neq 0$
9. (c) $7i - 4(i + j)$
10. (b) $j = B - A$, $k = \frac{1}{3}(C - B)$ (c) $\frac{1}{3}(15A - 14B + 5C)$
11. $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{C, D\}$
12. (a) Independiente (b) Un ejemplo: $D = A$ (c) Un ejemplo: $E = (0, 0, 0, 1)$ (d) Eligiendo $E = (0, 0, 0, 1)$, tenemos $X = 2A + B - C + 3E$
13. (c) $t = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
14. (a) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0)\}$ (b) El conjunto dado (c) El conjunto dado
17. $\{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$, $\{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$
18. $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$, $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$
19. $L(U) \subseteq L(T) \subseteq L(S)$
20. Un ejemplo: $A = \{E_1, \ldots, E_n\}$, $B = \{E_1 + E_2, E_2 + E_n, \ldots, E_{n-1} + E_n, E_n + E_1\}$

12.17 Ejercicios (pág. 575)

1. (a) $-1 - i$ (b) $-1 + i$ (c) $1 - i$ (d) $-1 + i$ (e) $-1 - i$ (f) $2 - i$ (g) $-i$ (h) $-1 + 2i$ (i) $-3 - 2i$ (j) $2i$

2. Un ejemplo: $(1 + i, -5 - 3i, 1 - 3i)$
8. $\pi/3$
9. $3A - B + 2C$

Capítulo 13

13.5 Ejercicios (pág. 584)

1. (b), (d), y (e)
2. (a) y (e)
3. (c), (d), y (e)
4. (b), (e), y (f)
5. (a) No (b) No (c) No
6. A, B, C, D, F están alineados
7. Se cortan en $(5, 9, 13)$
8. (b) No
9. (a) $9t^2 + 8t + 9$ (b) $\frac{1}{3}\sqrt{65}$

13.8 Ejercicios (pág. 590)

1. (c) y (e)
2. (a), (b), y (c)
3. (a) $x = 1 + t, \quad y = 2 + s + t, \quad z = 1 + 4t$
   (b) $x = s + t, \quad y = 1 + s, \quad z = s + 4t$
4. (a) $(1, 2, 0)$ y $(2, -3, -3)$ (b) $M = \{(1, 2, 0) + s(1, 1, 2) + t(-2, 4, 1)\}$
6. (a), (b), y (c) $x - 2y + z = -3$
7. (a) $(0, -2, -1)$ y $(-1, -2, 2)$
   (b) $M = \{(0, -2, -1) + s(-1, 0, 3) + t(3, 3, 6)\}$
8. Dos ejemplos: $(-5, 2, 6)$ y $(-14, 3, 17)$
9. (a) Si (b) Dos ejemplos: $(1, 0, -1)$ y $(-1, 0, 1)$
10. $(-2, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$
11. (a), (b) y (c) No
13. $x - y = -1$

13.11 Ejercicios (pág. 597)

1. (a) $(-2, 3, -1)$ (b) $(4, -5, 3)$ (c) $(4, -4, 2)$ (d) $(8, 10, 4)$
   (e) $(8, 3, -7)$ (f) $(10, 11, 5)$ (g) $(-2, -8, -12)$ (h) $(2, -2, 0)$
   (i) $(-2, 0, 4)$
2. (a) $\pm \dfrac{1}{\sqrt{26}}(-4, 3, 1)$ (b) $\pm \dfrac{1}{\sqrt{2054}}(-41, -18, 7)$ (c) $\pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$
3. (a) $\frac{15}{2}$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{35}$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
4. $8\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
6. (b) $\cos\theta$ es negativo (c) $\sqrt{5}$
9. (a) una solución es $B = -\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}$ (b) $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ es la única solución

11. (a) Tres posibilidades; $D = B + C - A = (0, 0, 2)$, $D = A + C - B = (4, -2, 2)$, $D = A + B - C = (-2, 2, 0)$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
12. -4; $8\sqrt{3}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

13.14 Ejercicios (pág. 602)

1. (a) 96 (b) 27 (c) -84
2. 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$
3. 2
6. (a) $(2b - 1)\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, siendo b y c arbitrarios (b) $-\frac{1}{5}\boldsymbol{i} + \frac{2}{5}\boldsymbol{j}$
11. $-3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$
14. (b) 2
15. (b) $\sqrt{2005/41}$
17. $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$
18. $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$
19. $x = 1$, $y = 4$, $z = 1$

13.17 Ejercicios (pág. 607)

1. (a) $(-7, 2, -2)$ (b) $-7x + 2y - 2z = 0$ (c) $-7x + 2y - 2z = -9$
2. (a) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ (b) $-7, -\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ (c) $\frac{7}{3}$ (d) $(-\frac{7}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{14}{9})$
3. $3x - y + 2z = -5$; $9/\sqrt{14}$
4. (b) $\frac{19}{18}\sqrt{6}$
5. (a) $(1, 2, -2)$ (b) $x + 2y - 2z = 5$ (c) $\frac{5}{3}$
6. $10x - 3y - 7z + 17 = 0$
7. Dos ángulos: $\pi/3$ y $2\pi/3$
8. $x + 2y + 9z + 55 = 0$
9. $X(t) = (2, 1, -3) + t(4, -3, 1)$
10. (b) $N = (1, 3, -2)$ (c) $t = 1$ (d) $2x + 3y + 2z + 15 = 0$ (e) $x + 3y - 2z + 19 = 0$
11. $x + \sqrt{2}\,y + z = 2 + \sqrt{2}$
12. 6
13. $\dfrac{1}{\sqrt{122}}(7, -8, -3)$
14. $x - y + z = 2$
15. $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$
17. $X(t) = (1, 2, 3) + t(1, -2, 1)$
19. (b) $P = -\frac{1}{25}(5, -14, 2)$

13.21 Ejercicios (pág. 615)

3. $r = ed/(1 - e \operatorname{sen} \theta)$; $r = -ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$
4. $e = 1$, $d = 2$
5. $e = \frac{1}{2}$, $d = 6$
6. $e = \frac{1}{3}$, $d = 6$
7. $e = 2$, $d = 1$
8. $e = 2$, $d = 2$

9. $e = 1, \quad d = 4$
10. $d = 5, \quad r = 25/(10 + 3\cos\theta + 4\,\text{sen}\,\theta)$
11. $d = 5, \quad r = 25/(5 + 4\cos\theta + 3\,\text{sen}\,\theta)$
12. $d = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad r = 1/(\cos\theta + \text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\sqrt{2}), \quad r = 1/(\cos\theta + \text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\sqrt{2})$
13. (a) $r = 1{,}5 \times 10^8/(1 + \cos\theta)$; $7{,}5 \times 10^7$ Km (b) $r = 5 \times 10^7/(1 - \cos\theta)$; 2.5×10^7 Km

13.24 Ejercicios (pág. 621))

1. Centro en $(0, 0)$; focos en $(\pm 8, 0)$; vértices en $(\pm 10, 0)$; $e = \frac{4}{5}$
2. Centro en $(0, 0)$; focos en $(0, \pm 8)$; vértices en $(0, \pm 10)$; $e = \frac{4}{5}$
3. Centro en $(2, -3)$; focos en $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$; vértices en $(6, -3), (-2, -3)$; $e = \sqrt{7}/4$
4. Centro en $(0, 0)$; focos en $(\pm\frac{4}{3}, 0)$; vértices en $(\pm\frac{5}{3}, 0)$; $e = \frac{4}{5}$
5. Centro en $(0, 0)$; focos en $(\pm\sqrt{3}/6, 0)$; vértices en $(\pm\sqrt{3}/3, 0)$; $e = \frac{1}{2}$
6. Centro en $(-1, -2)$; focos en $(-1, 1), (-1, -5)$; vértices en $(-1, 3), (-1, -7)$; $e = \frac{3}{5}$
7. $7x^2 + 16y^2 = 7$
8. $\dfrac{(x+3)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$
9. $\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$
10. $\dfrac{(x+4)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$
11. $\dfrac{(x-8)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$
12. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$
13. Centro en $(0, 0)$; focos en $(\pm 2\sqrt{41}, 0)$; vértices en $(\pm 10, 0)$; $e = \sqrt{41}/5$
14. Centro en $(0, 0)$; focos en $(0, \pm 2\sqrt{41})$; vértices en $(0, \pm 10)$; $e = \sqrt{41}/5$
15. Centro en $(-3, 3)$; focos en $(-3 \pm \sqrt{5}, 3)$; vértices en $(-1, 3), (-5, 3)$; $e = \sqrt{5}/2$
16. Centro en $(0, 0)$; focos en $(\pm 5, 0)$; vértices en $(\pm 4, 0)$; $e = 5/4$
17. Centro en $(0, 0)$; focos en $(0, \pm 3)$; vértices en $(0, \pm 2)$; $e = \frac{3}{2}$
18. Centro en $(1, -2)$; focos en $(1 \pm \sqrt{13}, -2)$; vértices en $(3, -2), (-1, -2)$; $e = \frac{1}{2}\sqrt{13}$
19. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$
20. $y^2 - x^2 = 1$
21. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
22. $(y-4)^2 - \dfrac{(x+1)^2}{3} = 1$
23. $\dfrac{8(y+3)^2}{27} - \dfrac{5(x-2)^2}{27} = 1$

24. $\pm\sqrt{\frac{23}{3}}$
25. $4x^2 - y^2 = 11$
26. Vértice en $(0, 0)$; directriz $x = 2$; eje $y = 0$
27. Vértice en $(0, 0)$; directriz $x = -\frac{3}{4}$; eje $y = 0$
28. Vértice en $(\frac{1}{2}, 1)$; directriz $x = -\frac{5}{2}$; eje $y = 1$
29. Vértice en $(0, 0)$; directriz $y = -\frac{3}{2}$; eje $x = 0$
30. Vértice en $(0, 0)$; directriz $y = 2$; eje $x = 0$
31. Vértice en $(-2, -\frac{9}{4})$; directriz $y = -\frac{13}{4}$; eje $x = -2$
32. $x^2 = -y$
33. $y^2 = 8x$
34. $(x + 4)^2 = -8(y - 3)$
35. $(y + 1)^2 = 5(x - \frac{7}{4})$
36. $(x - \frac{3}{2})^2 = 2(y + \frac{1}{8})$
37. $(y - 3)^2 = -8(x - 1)$
38. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 40x + 20y - 100 = 0$

13.25 Ejercicios varios sobre cónicas (pág. 623)

3. $B > 0$, $A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})B$
4. $\frac{2}{3}bh$
5. 16π
6. (a) $\frac{8}{3}$ (b) 2π (c) $48\pi/5$
7. $x^2/12 + y^2/16 = 1$
8. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 1$
9. $y^2 - 4x^2 - 4y + 4x = 0$
10. (a) $e = \sqrt{2/(p + 2)}$; focos en $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$ (b) $6x^2 - 3y^2 = 4$
15. (b) $y = Cx^2$, $C \neq 0$
16. $(4, 8)$
17. (a) $x = \frac{4}{3}a$ (b) $27pq^2 = 4a^3$
18. $(x - \frac{2}{5})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = \frac{4}{5}$

Capítulo 14

14.4 Ejercicios (pág. 632)

1. $F'(t) = (1, 2t, 3t^2 + 4t^3)$; $F''(t) = (0, 2, 6t, 12t^2)$
2. $F'(t) = (-\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t, \sec^2 t)$; $F''(t) = (-\cos t, 2\cos 2t, -4\operatorname{sen} 2t, 2\sec^2 t \tan t)$
3. $F'(t) = ((1 - t^2)^{-1/2}, -(1 - t^2)^{-1/2})$; $F''(t) = (t(1 + t^2)^{-3/2}, -t(1 + t^2)^{-3/2})$
4. $F'(t) = (2e^t, 3e^t)$; $F''(t) = (2e^t, 3e^t)$
5. $F'(t) = (\operatorname{senh} t, 2\cosh 2t, -3e^{-3t})$; $F''(t) = (\cosh t, 4\operatorname{senh} 2t, 9e^{-3t})$
6. $F'(t) = (2t/(1 + t^2), 1/(1 + t^2), -2t/(1 + t^2))$;
   $F''(t) = ((2 - 2t^2)/(1 + t^2)^2, -2t/(1 + t^2)^2, (6t^2 - 2)/(1 + t^2)^3)$
8. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, e - 1)$
9. $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \log \frac{1}{2}\sqrt{2})$

10. $\left(\log \frac{1+e}{2}, 1 - \log \frac{1+e}{2}\right)$
11. $(1, e-2, 1-2/e)$
12. 0
15. $G'(t) = F(t) \times F''(t)$
20. $F(t) = \frac{1}{6}t^3A + \frac{1}{2}t^2B + tC + D$
22. $F''(1) = A, \quad F(3) = (6 + 3\log 3)A$
23. $F(x) = e^x(x+1)A - eA$

14.7 Ejercicios (pág. 641)

1. $\boldsymbol{v}(t) = (3 - 3t^2)\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j} + (3 + 3t^2)\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}(t) = -6t\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k}$; $v(t) = 3\sqrt{2}\,(1 + t^2)$
2. $\boldsymbol{v}(t) = -\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}(t) = -\cos t\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$; $v(t) = (1 + e^{2t})^{1/2}$
3. $\boldsymbol{v}(t) = 3(\cos t - t\operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + 3(\operatorname{sen} t + t\cos t)\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}(t) = -3(2\operatorname{sen} t + t\cos t)\boldsymbol{i} + 3(2\cos t - t\operatorname{sen} t)\boldsymbol{j}$; $v(t) = (9t^2 + 25)^{1/2}$
4. $\boldsymbol{v}(t) = (1 - \cos t)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + 2\cos\frac{t}{2}\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}(t) = \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\frac{t}{2}\boldsymbol{k}$; $v(t) = 2$
5. $\boldsymbol{v}(t) = 6t\boldsymbol{i} + 6t^2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}(t) = 6\boldsymbol{i} + 12t\boldsymbol{j}$; $v(t) = 6t^2 + 3$
6. $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} t\,\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}(t) = -\operatorname{sen} t\,\boldsymbol{j} + \cos t\,\boldsymbol{k}$; $v(t) = \sqrt{2}$
9. $A = ab\omega^3, \quad B = a^2\omega^3$
11. (b) $8e^{4t}/\cos^2\theta$
15. (a) $x(t) = 4\cos 2t, \quad y(t) = 3\operatorname{sen} 2t$ (b) $x^2/16 + y^2/9 = 1$
16. $3T/4$

14.9 Ejercicios (pág. 646)

1. (a) $T = \frac{1}{10}\sqrt{2}\,(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})$; $N = -\frac{4}{5}\boldsymbol{i} - \frac{3}{5}\boldsymbol{j}$ (b) $\boldsymbol{a} = 12\sqrt{2}\,T + 6N$
2. (a) $T = -(1 + e^{2\pi})^{-1/2}\boldsymbol{j} + e^{\pi}(1 + e^{2\pi})^{-1/2}\boldsymbol{k}$; $N = \dfrac{(1 + e^{2\pi})\boldsymbol{i} + e^{2\pi}\boldsymbol{j} + e^{\pi}\boldsymbol{k}}{(1 + e^{2\pi})^{1/2}(1 + 2e^{2\pi})^{1/2}}$
   (b) $\boldsymbol{a} = (1 + e^{2\pi})^{-1/2}[e^{2\pi}T + (1 + 2e^{2\pi})^{1/2}N]$
3. (a) $T = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}$; $N = \boldsymbol{j}$ (b) $\boldsymbol{a} = 6N$
4. (a) $T = \boldsymbol{i}$; $N = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$; (b) $\boldsymbol{a} = \sqrt{2}\,N$
5. (a) $T = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$; $N = \frac{1}{3}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$ (b) $\boldsymbol{a} = 12T + 6N$
6. (a) $T = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$; $N = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\boldsymbol{k}$ (b) $\boldsymbol{a} = N$
9. Contraejemplo para b) y d): movimiento sobre una hélice
11. Un ejemplo: $\boldsymbol{r}(t) = 2\int e^{2t}\cos t\,dt\,\boldsymbol{i} + 2\int e^{2t}\operatorname{sen} t\,dt\,\boldsymbol{j} + e^{2t}\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{v}(t)$ forma un ángulo constante con $\boldsymbol{k}$, pero $\boldsymbol{a}(t)$ nunca es cero ni paralelo a $\boldsymbol{v}(t)$
12. (a) Contraria a las agujas del reloj (b) 3 (c) $2\pi/\sqrt{3}$
13. $x^2/3 + y^2/4 = 1$
14. $y^2 = 4x$; $y^2 = 8 - 4x$
15. (b) $\|A\|\,\|B\|\operatorname{sen}\theta$

14.13 Ejercicios (pág. 655)

1. $8a$
2. $\sqrt{2}\,(e^2 - 1)$

3. $2\pi^2 a$
4. $4(a^3 - b^3)/(ab)$
5. $2a\left(\cosh \frac{T}{2} \sqrt{\cosh T} - 1\right) - \sqrt{2}\, a \log\left(\frac{\sqrt{2}\cosh (T/2) + \sqrt{\cosh T}}{1 + \sqrt{2}}\right)$
6. $2\sqrt{2}\,\pi$
7. 50
8. $\sqrt{2}\log(1 + \sqrt{2})$
9. $|\omega| \sqrt{a^2 + b^2}\,(t_1 - t_0)$
10. $\int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$
11. $\frac{26\sqrt{13} - 16}{27}$
13. (a) $\int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$ (b) $\int_1^e \sqrt{2 + \frac{2}{t^2}}\, dt$
14. (c) $c \operatorname{senh} \frac{2}{c}$
16. $f(x) = k \cosh\left(\frac{x}{k} + C\right)$, o $f(x) = k$
19. $v(t) = 1 + 2t$; 3 unidades de tiempo

14.15 Ejercicios (pág. 659)

1. (1) $\frac{1}{75}$ (2) $(1 + 2e^{2\pi})^{1/2}(1 + e^{2\pi})^{-3/2}$ (3) $\frac{6}{25}$ (4) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ (5) $\frac{2}{27}$ (6) $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{\|B\| \operatorname{sen} \theta}$
4. (a) $x = z$
7. $\kappa = \|\boldsymbol{a}\|/\|\boldsymbol{v}\|^2$
9. $a = \frac{1}{4}$, $b = 2$; se cortan en $(0, 0)$
10. Vértice en $-\frac{1}{2}\cos\theta\, A + \frac{1}{4}\cos^2\theta\, B$
11. (a) $\alpha(t) = \frac{1}{2}\pi - 5t^2$ (b) $\boldsymbol{v}(t) = 5 \operatorname{sen} 5t^2\, \boldsymbol{i} + 5 \cos 5t^2\, \boldsymbol{j}$
12. $\sqrt{2}\, \boldsymbol{i} + \sqrt{2}\, \boldsymbol{j}$

14.19 Ejercicios (pág. 665)

1. $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{u}_r + t\boldsymbol{u}_\theta$; $\boldsymbol{a}(t) = -t\boldsymbol{u}_r + 2\boldsymbol{u}_\theta$; $\kappa(t) = (2 + t^2)(1 + t^2)^{-3/2}$
2. (a) $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{u}_r + t\boldsymbol{u}_\theta + \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}(t) = -t\boldsymbol{u}_r + 2\boldsymbol{u}_\theta$; $\kappa(t) = (t^4 + 5t^2 + 8)^{1/2}(2 + t^2)^{-3/2}$
   (b) $\arccos\sqrt{2/(2 + t^2)}$
3. (b) $\frac{1}{2}\pi - t$
5. 32
6. (b) $L(c) = \frac{\sqrt{1 + c^2}}{c}(e^{2\pi c} - 1)$ si $c \neq 0$; $L(0) = 2\pi$. $a(c) = \frac{e^{4\pi c} - 1}{4c}$ si $c \neq 0$; $a(0) = \pi$

7. (a) $3\pi/16$ (b) $2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\log(2 + \sqrt{3})$
8. $\frac{1}{2}\pi(\pi^2 + 1)^{1/2} + \frac{1}{2}\log(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})$
9. $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$
10. 4
11. 8
13. (a) $(\theta^2 + 1)^{3/2}/(\theta^2 + 2)$ (b) $\sqrt{2}\,e^{\theta}$ (c) $\frac{2}{3}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (d) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
15. $r = r_0 e^{-\theta\cot\alpha}$; blanco en el origen, punto de partida del cohete $r = r_0$, $\theta = 0$; α es el ángulo, $0 < \alpha < \pi$, determinado por $\boldsymbol{v}$ y $-\boldsymbol{r}$; para $0 < \alpha < \pi/2$ el camino es una espiral para la que $r \to 0$ cuando θ crece indefinidamente; para $\alpha = \pi/2$ es una circunferencia en torno al origen; para $\pi/2 < \alpha < \pi$ es una espiral para la que r crece indefinidamente cuando θ crece indefinidamente.
16. Tómese como eje x positivo la recta que va desde la posición observada a cuatro millas de distancia a la base de lanzamiento. Continúese a lo largo de esta recta tres millas (para evitar la posibilidad de que el proyectil vuelva a la base) y después se sigue la espiral $r = e^{\theta/\sqrt{8}}$
17. $\log\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan(y/x) = C$

14.21 Ejercicios de repaso (pág. 671)

1. $\tan\alpha = \tan\theta/(2 + \tan^2\theta)$
3. $(c/m^2, 2c/m)$
4. (a) $y - y_0 = m(x - x_0) + c/m$; tangente en $(x_0 + c/m^2, y_0 + 2c/m)$
   (b) $y - y_0 = m(x - x_0) - cm^2$; tangente en $(x_0 + 2cm, y_0 + cm^2)$
6. $(y_1 - y_0)(y - y_0) = 2c(x + x_1 - 2x_0)$; $x_1 y = 2y_1 x - x_1 y_1$;
   $(x_1 - x_0)(y - y_0) = 2(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)$
7. (a) $(0, \frac{1}{2})$
   (b) Escribir $Q = (0, b(x))$. si $f''(0) \neq 0$ entonces $b(x) \to f(0) + \dfrac{1}{f''(0)}$ cuando $x \to 0$.
   En cualquier otro caso $|b(x)| \to +\infty$ cuando $x \to 0$.
8. $r = \dfrac{1 + c}{2} \to \dfrac{1}{2}$ cuando $c \to 0$
13. $(2, 1), (-2, -1)$
14. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
15. $3x^2 - y^2 = 3a^2$; $\dfrac{A(r)}{r^3} \to \dfrac{1}{36a}$
21. (a) $f(\theta) = k\operatorname{sen}(\theta + C)$, o $f(\theta) = k$
    (b) $f(\theta) = Ce^{\theta/\sqrt{k^2-1}}$, donde $k^2 > 1$
    (c) $f(\theta) = (2/k)\sec(\theta + C)$, o $f(\theta) = 2/k$

Capítulo 15

15.5 Ejercicios (pág. 680)

1. si 2. si 3. si 4. si

5. No
6. si
7. si
8. si
9. si
10. si
11. No
12. si
13. si
14. No
15. si
16. si
17. si
18. si
19. si
20. si
21. si
22. si
23. No
24. si
25. No
26. si
27. si
28. si
31. (a) No (b) No (c) No (d) No

15.9 Ejercicios (pág. 686)

1. si ; 2
2. si ; 2
3. si ; 2
4. si ; 2
5. si ; 1
6. No
7. No
8. No
9. si ; 1
10. si ; 1
11. si ; n
12. si ; n
13. si ; n
14. si ; n
15. si ; n
16. si ; n
17. si ; dim $= 1 + \frac{1}{2}n$ si n es par, $\frac{1}{2}(n + 1)$ si n es impar
18. si ; dim $= \frac{1}{2}n$ si n es par, $\frac{1}{2}(n + 1)$ si n es impar
19. si ; $k + 1$
20. No
21. (a) dim = 3 (b) dim = 3 (c) dim = 2 (d) dim = 2
23. (a) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, el conjunto es independiente, dim = 3; si a ó b es cero, el conjunto es dependiente; dim = 2 (b) independiente, dim = 2 (c) si $a \neq 0$, independiente, dim = 3; si $a = 0$, dependiente, dim = 2 (d) independiente; dim = 3 (e) dependiente; dim = 2 (f) independiente dim = 2 (g) independiente dim = 2 (h) dependiente; dim = 2 (i) independiente; dim = 2 (j) independiente; dim = 2

15.12 Ejercicios (pág. 694)

1. (a) No (b) No (c) No (d) No (e) si
8. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{e^2 + 1}$ (b) $g(x) = b\left(x - \dfrac{e^2 + 1}{4}\right)$, b arbitrario
10. (b) $\dfrac{(n + 1)(2n + 1)}{6n}a + \dfrac{n + 1}{2}b$ (c) $g(t) = a\left(t - \dfrac{2n + 1}{3n}\right)$, a arbitrario
11. (c) 43 (d) $g(t) = a(1 - \frac{2}{3}t)$, a arbitrario
12. (a) No (b) No (c) No (d) No
13. (c) 1 (d) $e^2 - 1$
14. (c) $n!/2^{n+1}$

15.16 Ejercicios (pág. 706)

1. (a) y (b) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,(1, 1, 1)$, $\frac{1}{6}\sqrt{6}\,(1, -2, 1)$
2. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{6}\sqrt{6}\,(-1, 1, 2, 0)$, $\frac{1}{6}\sqrt{3}\,(1, -1, 1, 3)$
   (b) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,(1, 1, 0, 1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{42}}(1, -2, 6, 1)$
6. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\log^2 3$

7. $e^2 - 1$

8. $\frac{1}{2}(e - e^{-1}) + \frac{3}{e}x$; $1 - 7e^{-2}$

9. $\pi - 2 \operatorname{sen} x$

10. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

Capítulo 16

16.4 Ejercicios (pág. 714)

1. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 2
2. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 2
3. Lineal; dimensión del núcleo 1, rango 1
4. Lineal; dimensión del núcleo 1, rango 1
5. No lineal
6. No lineal
7. No lineal
8. No lineal
9. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 2
10. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 2
11. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 2
12. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 2
13. No lineal
14. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 2
15. No lineal
16. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 3
17. Lineal; dimensión del núcleo 1, rango 2
18. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango 3
19. No lineal
20. No lineal
21. No lineal
22. No lineal
23. Lineal; dimensión del núcleo 1, rango 2
24. Lineal; dimensión del núcleo 0, rango $n + 1$
25. Lineal; dimensión del núcleo 1, rango infinito
26. Lineal; dimensión del núcleo infinita, rango 2
27. Lineal; dimensión del núcleo 2, rango infinito

28. $N(T)$ es el conjunto de las sucesiones constantes; $T(V)$ es el conjunto de las sucesiones con límite 0

29. d) $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$ es una base para $T(V)$; $\dim T(V) = 3$ e) $N(T) = S$ f) Si $T(f) = cf$ siendo $c \neq 0$, entonces $c \in T(V)$ con lo que tenemos $f(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$; si $c_1 = 0$, entonces $c = \pi$ y $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$, donde c_1, c_2 son arbitrarias y no simultáneamente nulas; si $c_1 \neq 0$, entonces $c = 2\pi$ y $f(x) = c_1$, donde c_1 no es nula pero arbitraria.

16.8 Ejercicios (pág. 723)

3. si ; $x = v, \quad y = u$
4. si ; $x = u, \quad y = -v$
5. No
6. No
7. No
8. si ; $x = \log u, \quad y = \log v$
9. No
10. si ; $x = u - 1, \quad y = v - 1$
11. si ; $x = \frac{1}{2}(v + u), \quad y = \frac{1}{2}(v - u)$
12. si ; $x = \frac{1}{3}(v + u), \quad y = \frac{1}{3}(2v - u)$
13. si ; $x = w, \quad y = v, \quad z = u$
14. No
15. si ; $x = u, \quad y = \frac{1}{2}v, \quad z = \frac{1}{3}w$
16. si ; $x = u, \quad y = v, \quad z = w - u - v$
17. si ; $x = u - 1, \quad y = v - 1, \quad z = w + 1$
18. si ; $x = u - 1, \quad y = v - 2, \quad z = w - 3$
19. si ; $x = u, \quad y = v - u, \quad z = w - v$
20. si ; $x = \frac{1}{2}(u - v + w), \quad y = \frac{1}{2}(v - w + u); \quad z = \frac{1}{2}(w - u + v)$
25. $(S + T)^2 = S^2 + ST + TS + T^2$;
$(S + T)^3 = S^3 + TS^2 + STS + S^2T + ST^2 + TST + T^2S + T^3$
26. (a) $(ST)(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x)$; $(TS)(x, y, z) = (z, z + y, z + y + x)$;
$(ST - TS)(x, y, z) = (x + y, x - z, -y - z)$; $S^2(x, y, z) = (x, y, z)$;
$T^2(x, y, z) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$;
$(ST)^2(x, y, z) = (3x + 2y + z, 2x + 2y + z, x + y + z)$;
$(TS)^2(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$;
$(ST - TS)^2 = (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$;
(b) $S^{-1}(u, v, w) = (w, v, u)$; $T^{-1}(u, v, w) = (u, v - u, w - v)$;
$(ST)^{-1}(u, v, w) = (w, v - w, u - v)$; $(TS)^{-1}(u, v, w) = (w - v, v - u, u)$
(c) $(T - I)(x, y, z) = (0, x, x + y)$; $(T - I)^2(x, y, z) = (0, 0, x)$;
$(T - I)^n(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si $n \geq 3$
28. (a) $Dp(x) = 3 - 2x + 12x^2$; $Tp(x) = 3x - 2x^2 + 12x^3$; $(DT)p(x) = 3 - 4x + 36x^2$;
$(TD)p(x) = -2x + 24x^2$; $(DT - TD)p(x) = 3 - 2x + 12x^2$;
$(T^2D^2 - D^2T^2)p(x) = 8 - 192x$ (b) $p(x) = ax$, a un escalar cualquiera
(c) $p(x) = ax^2 + b$, a y b escalares cualesquiera (d) Todo p de V
31. (a) $Rp(x) = 2$; $Sp(x) = 3 - x + x^2$; $Tp(x) = 2x + 3x^2 - x^3 + x^4$;
$(ST)p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$; $(TS)p(x) = 3x - x^2 + x^3$; $(TS)^2p(x) = 3x - x^2 + x^3$;
$(T^2S^2)p(x) = -x^2 + x^3$; $(S^2T^2)p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$; $(TRS)p(x) = 3x$;
$(RST)p(x) = 2$
(b) $N(R) = \{p \mid p(0) = 0\}$; $R(V) = \{p \mid p$ es constante$\}$; $N(S) = \{p \mid p$ es constante$\}$;
$S(V) = V$; $N(T) = \{O\}$; $T(V) = \{p \mid p(0) = 0\}$ (c) $T^{-1} = S$
(d) $(TS)^n = I - R$; $S^nT^n = I$
32. T no es uno a uno en V porque aplica toda sucesión constante en la misma sucesión.

16.12 Ejercicios (pág. 732)

1. a) La matriz identidad $I = (\delta_{jk})$, siendo $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$, y $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$
   b) La matriz cero $O = (a_{jk})$, en la que cada elemento $a_{jk} = O$.
   c) La matriz $(c\delta_{jk})$, siendo (δ_{jk}) la matriz identidad de la parte a)

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. (a) $-5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$, $9\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j}$
   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. (a) $3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$; dimensión del núcleo 0, rango 3 (b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. (a) $T(4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = (0, -2)$; dimensión del núcleo 1, rango 2 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $e_1 = \boldsymbol{j}$, $e_2 = \boldsymbol{k}$, $e_3 = \boldsymbol{i}$, $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (1, -1)$

8. (a) $(5, 0, -1)$; dimensión del núcleo 0, rango 2 (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (c) $e_1 = \boldsymbol{i}$, $e_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (0, 0, 2)$, $w_3 = (0, 1, 0)$

9. (a) $(-1, -3, -1)$; dimensión del núcleo 0, rango 2 (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (c) $e_1 = \boldsymbol{i}$, $e_2 = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i}$, $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1)$

10. (a) $e_1 - e_2$; dimensión del núcleo 0, rango 2 (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $a = 5$, $b = 4$

11. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$

19. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. Elíjase $(x^3, x^2, x, 1)$ como base para V, y (x^2, x) como base para W. Entonces la matriz de TD es

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16.16 Ejercicios (pág. 740)

1. $B + C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 15 & -14 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 16 & -8 \\ 7 & -28 & 14 \end{bmatrix}$,

$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$, $A(2B - 3C) = \begin{bmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a y b arbitrarios (b) $\begin{bmatrix} -2a & a \\ -2b & b \end{bmatrix}$, a y b arbitrarios

3. (a) $a = 9$, $b = 6$, $c = 1$, $d = 5$ (b) $a = 1$, $b = 6$, $c = 0$, $d = -2$

4. (a) $\begin{bmatrix} -9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 24 \\ 12 & -27 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

8. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, siendo b y c arbitrarios y a es una solución cualquiera de la ecuación $a^2 = -bc$

11. (b) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, siendo a arbitrario

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, siendo b y c arbitrarios y a es una solución cualquiera de la ecuación $a^2 = 1 - bc$

13. $C = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{13}{2} \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \frac{33}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{43}{4} & \frac{25}{4} \end{bmatrix}$

14. (b) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; $(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2$
(c) Para aquellos que conmutan

16.20 Ejercicios (pág. 752)

1. $(x, y, z) = (\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5})$
2. Ninguna solución
3. $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-3, 4, 1)$
4. $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-3, 4, 1)$
5. $(x, y, z, u) = (1, 1, 0, 0) + t(1, 14, 5, 0)$
6. $(x, y, z, u) = (1, 8, 0, -4) + t(2, 7, 3, 0)$
7. $(x, y, z, u, v) = t_1(-1, 1, 0, 0, 0) + t_2(-1, 0, 3, -3, 1)$
8. $(x, y, z, u) = (1, 1, 1, -1) + t_1(-1, 3, 7, 0) + t_2(4, 9, 0, 7)$
9. $(x, y, z) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0) + t(5, 1, -3)$
10. (a) $(x, y, z, u) = (1, 6, 3, 0) + t_1(4, 11, 7, 0) + t_2(0, 0, 0, 1)$
(b) $(x, y, z, u) = (\frac{3}{11}, 4, \frac{19}{11}, 0) + t(4, -11, 7, 22)$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 9 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

16.21 Ejercicios varios sobre matrices (pág. 754)

3. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$, donde b y c son arbitrarios y a es una solución cualquiera de la ecuación cuadrática $a^2 - a + bc = 0$.

10. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

ÍNDICE ALFABÉTICO

E

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

T

V

W